F1130
REFERÁLVA
KAT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

R

TOMUL XXVII NUMĂRUL 1 ANUL 1965
IANUARIE — FEBRUARIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

БУЛЕТИНУЛ ИНСТИТУТУЛУИ ПОЛИТЕХНИК БУКУРЕШТЬ

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 1

IANUARIE—FEBRUARIE
1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Acad. Prof. *M. Bercovici;* Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli;* Conf. *S. Călin*, cand. St. Th. ; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu ;* Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea ;* Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu ;* Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet ;* Prof. *Al. Rău ;* Prof. *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

ECONOMIE POLITICĂ

D. Rebuşapcă, R. Soare, P. Ioniţă, S. Antonescu, Gh. Maşală, M. Vasilache, M. Hagistate

Productivitatea muncii şi factorii ei de creştere în industria electrotehnică 17

MATEMATICĂ

A. Tănăsescu

Ein Achsial — helikoidales Projektionssystem 25

MECANICĂ

G. Ţiţeica

Rezultate experimentale în studiul ciocnirilor. Roci poroase cu infiltrare de petrol 39

Al. Marinescu, C. Guţă

Urcarea în timp minim a rachetelor cu mai multe trepte . . . 47

CHIMIA MACROMOLECULARĂ

O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu, M. Georgescu

Polimerizarea N-vinil-carbazolului cu perclorați hidratați . . 59

TERMOTEHNICĂ

L. Stoicescu, S. Petrescu

Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden 65

MAŞINI TERMICE

T. Dudaş

Unele probleme de dinamică ale motoarelor în patru timpi cu două linii paralele de cilindri 97

AUTOMATICĂ

S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici

Considerații asupra elementelor de calcul pneumatice, cu jet . . . 105

ELECTRONICA

M. Petrescu

Forma, perioada şi aspectul oscilațiilor libere în circuitul LC cu capacitatea neliniară a joncțiunii p-n aliate 117

TRANSPORTURI

A. Popa

Determinarea vitezelor şi timpilor de mers ai trenurilor prin metoda nomogramelor 135

Резюме

Д.К. 338.062.413:621.3

Д. Ребушапка, Р. Соаре, П. Ионица, С. Антонеску, Гх. Мащале, М. Василаке, М. Хагистате

Производительность труда и факторы его повышения в электротехничесыой промышленности

На основе изучения богатого документального материала авторы анализируют рост производительности труда в электротехнической промышленности и основные факторы, которые этому способствовали, как: непрерывный технический прогресс, организация производства и труда, квалификация и материальная заинтересованность трудящихся и т.д.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 515

А. Тэнэсеску

К вопросу об аксиально-геликоидальной системе проектирования

В настоящей работе описывается аксиально-геликоидальная система проекции в которой проекционные лучи проективной системы являются образующими данных геликоидальных плоскостей-трехугольный винт.

Способ изображения одноплоскостный.

Рассматриваются изображения основных геометрических элементов и решаются все позиционные задачи относящиеся к прямой, плоскости, многограннику и поверхности.

Эта геликоидальная система проектирования в значительной мере упрощает решение многих задач, в частности задач относящихся к геликоидальным поверхностям и поверхностям второго разряда.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 622.35:622.276.51

Г. Цицейка

Экспериментальные результаты в изучении соударений. Пористые породы с нефтяными инфильтрациями

С помощью одного аппарата составленного из двух идентичных маятников производятся ударения над породистой пробиркой, находяящейся между маятниками. Известна энергия полученная породой от одного и от другого маятников.

Потеренная энергия в породе вычислена. Используя метод, изложенный в предыдущих работах, определяется радиус эквивалентных пор породы. В данном случае наполняются нефтью эти поры.

Делается вывод о том, что потеря энергии зависит особенно от природы жидкости находящейся в породе и от размеров пор, а не от природы породы.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Summary

D.C. 338.062.413 : 621.3

D. Rebuşapcă, R. Soare, P. Ioniţă, S. Antonescu
Gh. Maşală, M. Vasilache, M. Hagistate.

Work Productivity and its Factors of Growing in Electrical Engineering Industry.

On the basis of studying a rich reference material, the authors analyse the growing, of labour productivity in electrical engineering industry and the main factors contributing to that as: the continuous technical progress, the organization of production and labour, the training and the material incentive of the working people, etc.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 515

A. Tănăsescu

An Axial-helicoid Projection System

The present paper presents an axial-helical projection system where the projections of the system are the generatrix of certain helical-triangular screw surfaces.

The representation system is mono-plane.

All representations of the geometrical elements are studied and the positional problems of the right line, the plane, the polyhedron and the surfaces, are solved.

The helicoid projection system greatly simplifies the solving of many problems, especially those referring to helical surfaces and second degree surfaces.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 622.35 : 622.276.51

G. Ţiţeica

Experimental Results in the Study of Impacts. Porous Rocks Infiltration of Petroleum

With the help of an apparatus composed of two identical pendulums, impacts are given to a rock placed between the two pendulums. The energy given by the first pendulum and the energy received by the second pendulum being known, the energy lost in the rock can be calculated. The radius of the equivalent pores of the rock is calculated by a method given in another work. In this study the pores are filled with petroleum. The result arrived at is that the loss of energy depends on the liquid and on the dimensions of the pores and the nature of the rock itself.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 663.5

Ал. Маринеску, К. Гуцэ

Подъем многоступенчатых ракет за минимальное время

В работе исследуется задача минимального времени подъема многоступенчатых ракет на плоской траектории.

При полете на первом участке траектории (с первой ступенью) допустили линеиный закон изменения скорости истечения газа по высоте полета.

При полете с помощью других ступеней, поскольку предполагается что этот имеет место вне предел плотных слоев атмосферы, пренебрегали аэродинамическими силами. В этом случае учитывалось изменение газа по высоте. Формулы (7) и (21) могут легко использоваться при расчетах в первом приближении.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 547.431.4:547.759.32

О. Ф. Сломон, И. З. Чутэ, Н. Кобияну, М. Георгеску

Полимеризация и — винилового карбозола с гидратированным перхлоратом

В настоящей работе изучается кинематика полимеризации мономера с гетероциклиным и — винил карбозолем в полярной среде $(ClO_4)_2$ Mg, ClO_4 Li В этом случае полимеризация проходит с большей скоростью и позволяет одновременно получить кристаллиичские олигомеры с повышенной точкой плавления 225°С.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 621.1.016:621-58

Л. Стойческу, С. Петреску

Термодинамические преобразования состояния которые происходят с конечной переменной скоростью

На основании нового математического выражения перого првинципа термодинамических процессов (смотрите брошюру 5/961 тех же авторов) выводят уравнение адиабаты развертывающейся с переменной скоростью в поршневых машинах.

Это уравнение сравнивают с уравнением адиабаты постоянной скорости, определяя коэффициент отклонения, зависящий — от степени компрессии или экспансии и от показателя степени адиабаты к. Отсюда следует, что адиабатический процесс сжатия или распространения с переменной скоростью можно рассматривать как имеющий постоянную скорость равную средней скорости помноженную на коэффициент отклонения.

Рассматривая поршневуя машину с бесконечным ходом (поршень не имея внешних соединений) приходят к порядку величины максимальной достигнутой скорости, которую может достичь поршень при экспансии адиабаты без течения. Устанавливается уравнение этого процесса в форме, которая в частности приводит к кллссической адиабате. Указывается когда можно использовать последнею с достаточной приближенностью. Устанавливается что при экспансии с переменной скоростью нельзя передать поршню всю внутренюю энергию газа, даже в том случае когда расширение доводит до конечного объема, что равно недостиженности температуры 0° К.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 663.5

Al. Marinescu, C. Guță

The Shortest Rising Time of Multy-stage Rockets

In this paper is studied the problem of the shortest rising time of multy-stage rockets on a plane path.

For the first-stage-flight, the speed of the flow of gases from the motor, variable with height was admitted.

The formulas (7) representing the extremals of the problem have been deduced.

For the higher stage flight, it was considered that the rocket is out of the dense atmosphere layers, and thus, the aerodynamic forces may be negligible.

In this case, the author took into account the variation with the gravity acceleration height, as well as the flowing speed of gases.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 547.431.4 : 547.759.32

O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu, M. Georgescu

Polimerization of N. Vinil Carbazol with Perchlorine in Aqueous Medium

In this work the author studies the kinetics of polimerization in the monomer with eterocycle N vinil carbazol in polar medium, in the presence of per-salts, such as $(ClO_4)_2Mg$, ClO_4Li. In this case the polimerization proceeds with high velocities and allows the obtaining of crystal oligomers with high melting points 225°C.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.G. 621.1.016 : 621—58

L. Stoicescu, S. Petrescu

Thermodynamic State Changes Displayed with Variable Finite Speed

On the basis of the new mathematical expression of the first principle for thermodynamic processes with finite speed (see part 5/1964 by the same authors) is deduced an equation of the adiabatic line which develops with a variable speed in the piston engines.

The equation is compared to that of the adiabatic line of constant speed determining a coefficient of deviation which depends on the rate of compression or of expansion and on the adiabatic exponent K. It results that an adiabatic process of compression or release with variable speed may be treated as one with constant speed equal to the average speed amplified by the coefficient of deviation. Considering a piston engine with infinite stroke (the piston without external connections) it comes to the order of magnitude of the maximum speed which may be reached by the piston by an adiabatic expansion without flow. The equation of this process is found in a form which by particularization leads to the classical adiabatic line. It is shown when the latter may be used with a sufficient approximation. It is established that in an expansion with variable speed the whole internal energy of the gas cannot be transmitted to the piston even if the release is done up to the infinite volume which is equivalent to the inaccessibility of the 0°K temperature.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 621. 434.1

Т. Дудаш

Нткоторые вопросы динамики четырех фазовых двигателей с двумя параллельными линиями цилиндров

Исследуется проблема установления функционального отставания между линиями цилиндров у одного четырехфазного двигателя с двумя параллельными линияма цилиндров и с равномерно распределенными зажиганиями в каждой линии. В начале оценивается функциональное отставание которое обеспечивает равномерное распределение зажиганий для всего комплекса обеих линий и уточняется равновесие двигателя в этом случае. Затем устанавливаются новые отставания между линиями цилиндров, для которых равновесие является наилучшим.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 621-52

С. Флоря, И. Думитраке, В. Гэбурич

Струйные пневматические счетно-решающие узлы

Неудобства, которые представляют пневматические элементы, созданные на принципе сжатия сил, используемых как в создании пневматических регуляторов, так и в технике аналогичного и цифрового вычисления, обусловили поиски новых принципов их работы, таких как аэродинамическое действие струи воздуха, движение в струе воздуха и взаимодействие струи и профиля (эффект конда).

На основе этих принципов были осуществелены в нашей лаборатории элементы для цифрового и аналогичного вычисления методом печатания; были также определены соотношения вычислений для элементов с двумя или тремя соплами, основанными на аэродинамическом взаимодействии.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 621.374.3

М. Петреску

Форма, период и спектр свободных колебаний в LC — контуре с нелинеиной емкостью сплавного $p-n$ перехода

В работе рассматриваются свободные колебания в LC — контуре с нелинейной емкостью сплавного $p-n$ перехода. Временная зависимость напряжения на контуре выражается через еллиптические функции Якоби. Показывается, что период свободных колебаний растет, когда увеличивается их амплитуда. Приводятся экспериментальные результаты, хорошо подтверждающие теоретические выводы.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Д.К. 656.222

А. Попа

Определение скоростей и времени хода поездов шаблонным методом

Исходя с решения уравнения движения поезда методом конечного роста и сохраняя неизменнный элемент времени, автор построил номограмму с помощью которой обозначается на графике в очень короткое время и с довольно большой точностю, кривая $V=f(s)$ для данного поезда буксируемого определенным локомотивом.

Номограмма имеющая общий характер, будучи построена может быть использована на все режимы работы локомотива который буксирует данный поезд. Она может быть использована и для определения времени хода.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 621.434.1

T. Dudaş

Some Problems on the Dynamics of the Four — Stroke Motors with Two Parallel Lines of Cylinders

The problem of establishing the functional difference between the cylinder lines in a four-stroke motor with two parallel cylinder lines and ignitions uniformly distributed into each line; is studied in the present paper.

The author considers firstly the functional difference, ensuring the uniform, ignition distribution for both lines, and states the balance of the motor in this case. Then, other differences between the cylinder lines are stated, for a betler balance of the motor.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 621—52

S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici

Consideration Aboute Pneumatic with Jet Computation Elements

The disadvantages which present pneumatic elements built on the principle of force compensation used in construction of pneumatic regulators as well as in technique of analogical and digital calculus determined the finding of new principles of work based on the aerodynamic air jet action, on the motion of bodies in air jet and on effect Coandă.

Relying on these principles, circuits of digital and analogical calculus have been carried out by printing, in our lavoratory. At the same time, relateons of calculus for elements with two and three nozzles, based on the interaction of aerodynamic jets were determined.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 621.374.3

M. Petrescu

The Form, the Period and the Spectrum of the Free. Oscilations in the *LC* Circuit with a Nonlinear Capacity of the *p-n* Function.

In the paper, the free oscillations in the *LC* circuit with a nonlinear capacity of an alloyed **p-n** junction is studied. The time dependence of the volttage at the terminals of the circuit is expressed by Iasobi's elliptical functions. It is shown that the free oscillation period increases with their magnitude. There are shown experimental results according to the theoretical conclusions.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.C. 656.222

A. Popa

The Determination of the Running Speed and Times of Trains by the Pattern Method

Starting with the solving of the motion equation of time by the finite increment method and keepimg constant the time element, the author builds up a nomogram, with the help of which a graph for the $V=f(s)$ curve for a given train trailed by a certain locomotive, is readily rapidly and accuratly enough drawn.

Once the nomogram built up, having a general feature, it may be used for all the running rates of a locomotive trailing a given train.

It may be as well used for determining the running time. Using this method, the working volume may be about 8—10 times cut off.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Résumé

C.D. 338.062.413 : 621.3

D. Rebuşapcă, R. Soare, P. Ioniţă, S. Antonescu, Gh. Maşală, M. Vasilache, M. Hagistate.

La productiviité du travail et les facteurs qui déterminent son accroissement dans l'industrie électrotechnique

Dans l'ouvrage les auteurs, après avoir étudié un vaste matériel, analysent l'accroissement de la productivité du travail dans l'industrie électrotehchnique et les principaux facteurs qui y ont contribué, tels que : le progrès technique ininterrompu, l'organisation de la production et du travail, le degré de qualification etc.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 515

A. Tănăsescu

Sur un système axial-hélicoïdal de projection

Dans cet ouvrage on présente un système axial-hélicoïdal de projection où les droites projectantes sont les génératrices de certaines surfaces hélicoïdales — vis triangulaire.

Le système de représentation a un seul plan et une épure avec module.

Les représentations des éléments géométriques fondamentaux sont étudiées et sont résolus tous des problèmes de position concernant la droite, le plan, les polyèdres et les surfaces.

Ce système axial-hélicoïdal de projection peut simplifier le résolution des problèmes concernant les surfaces hélicoïdales et les surfaces du deuxième degré.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 622.35 : 622.276.51

G. Ţiţeica

Résultats expérimentaux dans l'étude des chocs. Roches poreuses à infiltration de pétrole

A l'aide d'un appareil formé par deux pendules identiques l'on produit des chocs sur un échantillon de roche situé entre les deux pendules. On connaît l'énergie reçue par la roche du premier pendule et celle communiquée par elle au second pendule. L'énergie perdue dans la roche est ainsi déterminée. Par une méthode donnée dans des travaux antérieurs, on détermine le rayon des pores équivalents de la roche. Dans le cas présent, les pores sont remplis de pétrole. On arrive à la conclusion que la perte d'énergie dépend spécialement de la nature du liquide et de la dimension des pores de la roche et non de la nature de celle-ci.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

Zusammenfassung

D.K. 338.062.413 : 621.3

D. Rebuşapcă, R. Soare, P. Ioniţă, S. Antonescu, Gh. Maşală, M. Vasilache, M. Hagistate.

Die Arbeitsproduktivität und ihre Wachstumsfaktoren in der elektrotechnischen Industrie.

Auf Grund des Studiums eines reichen dokumentarischen Materials, analysieren die Autoren das Wachsen der Arbeitsproduktivität in der elektrotechnischen Industrie und die Hauptfaktoren welche dazu beigetragen haben, wie: der forwährende technische Fortschritt, die Organisierung der Produktion und der Arbeit, die Befähigung und materielle Interessiertheit der Arbeitenden, usw.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.K. 515

A. Tănăsescu

Ein Achsial-helikoidales Projektionssystem

In dieser Arbeit ist ein achsial-helikoidales Projektionssystem gezeigt, in welchem die Projizierenden des Projektionssystems. Erzeugende gewisser helikoidaler Oberflächen sind, dreieckige Schraube.

Das darstellende System ist von einer einzigen Ebene.

Es werden die Darstellungen der geometrischen Grundelemente untersucht und alle Lagenprobleme, betreffend die Gerade, die Ebene, die Vielflächen und Oberflächen gelöst.

Dieses helikoidale Projektionssystem vereinfacht in bedeutendem Masse die Lösung vieler Aufgaben, besonders derjenigen, die sich auf helikoidale Oberflächen und Flächen zweiter Ordnung beziehen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.K. 622.35 : 622.276.51

G. Ţiţeica

Experimentelle Ergebnisse des Studiums der Stösse (Schläge). Poröse Gesteine mit Erdölinfiltrationen

Mit Hilfe eines aus zwei identischen Pendeln bestehenden Apparates, werden Schläge auf eine sich zwischen beiden Pendeln befindliche Gesteinprobe ausgeführt. Die vom Gestein von dem einen Pendel und die von dem zweiten Pendel erhaltene Energie ist bekannt. Die im Gestein verlorene Energie wird berechnet. Durch eine in vorhergehenden Arbeiten angegebene Methode, werden die äquivalenten Halbmesser der Gesteinporen festgestellt. Im vorliegenden Falle werden die Poren mit Erdöl aufgefüllt. Man gelangt zur Schlussfolgerung, dass der Energieverlust insbesondere von der Art der Flüssigkeit im Gestein und den Dimensionen der Poren und nicht von der Art des Gesteins abhängt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 663.5

Al. Marinescu, C. Guţă

La montée en temps minimum des fusées à plusieurs marches

Dans l'ouvrage on étudie le problème de la montée en temps minimum des fusées à plusieurs marches sur une trajectoire plane. Pour le vol avec un première marche on a admis la vitesse de coulée des gaz du moteur variable avec la hauteur. On a déduit les formules (7) qui représentent les extremales du problème. Pour le vol à marches supérieures on a considéré que la fusée est en dehors des couches denses de l'atmosphére et donc on peut négliger les forces aérodynamiques. En ce cas on a tenu compte de la variation avec la hauteur de l'accélération de la gravitation alt coup de même que de la vitesse de coulée des gaz.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 547.431.4 : 547.759.32

O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu, M. Georgescu

La polymérisation de N-vinile-carbazole avec des persels hidratées

Dans cet ouvrage on a étudié la cynétique de la polymérisation du monomère à hétéro-cycle N-vinilin en milien polaire en présence de persels par exemple $(ClO_4)_2Mg$, ClO_4Li. Dans ce cas la polymérisation se déroule à grandes vitesses et permet d'obtenir des oligomères cristallins à points de fondaison êlevés 225°.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 621.1.016 : 621—58

L. Stoicescu, S. Petrescu

Des transformations thermodynamiques d'état qui se développent à vitesse finie variable

On déduit une équation de l'adyabate qui se déroule à vitesse variable dans les machines à piston, en se basant sur le premier principe pour les processus thérmodynamiques à vitesse finie. On compare cette équation à celle de l'adyabate à vitesse constante, en déterminant un coefficient de deviation, qui dépend du degré de compression ou d'expansion et de l'exponent adyabatique K. Il résulte qu'un processus adyabate de compression ou de détente à vitesse variable peut être traité comme un processus à vitesse constante égale à la vitesse moyenne amplifiée avec le coefficient de déviation. En considérant une machine à piston à course infinie (le piston sans liens externes) on arrive à l'ordre de grandeur de la vitesse maxima qui peut être atteinte par le piston par l'expansion adyabate sans coulée. L'équation de ce processus se troouve dans une forme qui par des cas particuliers mène à l'adyabate classique. On montre les cas où celle-ci peut être employée avec une approximation suffisante. On constate que dans une expansion à vitesse variable ou ne peut pas transmettre au piston toute l'énergie du gaz, même si la détente se produit jusqu'à un volume infini, ce qui équivaut à l'inaccessibilité de la température de 0°K.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

A. Marinescu, C. Guță D.K. 663.5

Aufstieg in kürzester Zeit der Raketen mit mehreren Stufen

In der Arbeit wird das Problem des Aufstiegs in kürzester Zeit der Raketen mit mehreren Stufen auf eine ebene Flugbahn studiert. Für den Flug der ertsen Stufe wurde die Ausflussgeschwindigkeit der Gase aus dem Motor veränderlich mit der Höhe, angenommen. Es wurden die Formeln (7) hergeleitet, welche die Grenzprobleme darstellen. Für den Flug oberen Stufen wurde angenommen, dass sich die Rakete ausserhalb der dichten Schichten der Atmosphäre befindet und folglich die aerodynamischen Kräfte vernachlässigt werden können. In diesem Falle wurde die Veränderung der Gravitationsbeschleunigung mit der Höhe wie auch die Ausflussgeschwindigkeit der Gase, berüchsichtigt.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.K. 547.431.4 : 547.759.32

O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu, M. Georgescu

Die Polymerisierung des N-Vynilkarbazols mit hydrierten Perchloraten

In der vorliegenden Arbeit wurde die Kinetik der Polymerisierung des Monomers mit heterozyklischem N-Vynilkarbazol, in Polarmedium in Gegenwart von Persalzen, wie z.B. $(ClO_4)_2Mg$, ClO_4Li, studiert. In diesem Fall erfolgt die Polymerisierung mit grosser Geschwindigkeit und ermöglicht kristallinische Oligomere mit hohen Schmelzpunkten 225°C zu erhalten.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.K. 621.1.016 : 621—58

L. Stoicescu, S. Petrescu

Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden

Auf Grund des neuen, für thermodynamische Prozesse gültigen Ausdruckes des ersten Grundsatzes, wenn endliche Geschwindigkeit vorhanden, wird eine Gleichung der in den Kolbenmaschinen mit variabler Geschwindigkeit verlaufenden Adiabate hergeleitet. Durch ihren Vergleich mit der Adiabatengleichung, die bei konstanter Entwicklungsgeschwindigkeit zu verwenden ist, wird ein Abweichungs-Koeffizient bestimmt, welcher vom Verdichtungs-oder Expansionsgrad, sowie vom odiabaten Exponent K abhängt. Es ergibt sich, dass eine adiabate, mit variabler Geschwindigkeit stattfindende Verdichtung oder Entspannung, als eine solche behandelt werden kann, die mit konstanter Geschwindigkeit verläuft. Der Wert dieser letzten muss aber dem Produkt der mittleren Geschwindigkeit mit dem Abweichungskoeffizienten gleich sein. Indem man eine Kolbenmaschine betrachtet, deren Kolbenhub unendlich ist (Kolben ohne äusserliche Verbindungen), kommt man zu der Grössenordnung der maximalen Geschwindigkeit die vom Kolben durch eine adiabate Ausdehnung, ohne Strömung, erreicht werden kann. Die Gleichung dieses Prozesses wird in einer Form aufgestellt, woraus die klassische Adiabate als Speziallfall erscheint. Dabei wird darauf hingewiesen, wann diese letzte, mit genügender Annäherung, benützt werden kann. Es wird der Beweis erbracht, dass es unmöglich ist, im Wege einer mit variabler Geschwindigkeit erfolgten adiabaten Entspannung, die ganze innere Energie des Gases dem Kolben zuzuführen; selbst dann nicht, wenn dabei das Volumen unendlich wird, was der Unerreichbarkeit der absoluten Nulltemperatur gleichkommt.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVII Nr. 1/965

T. Dudaş C.D. 621.434.1

Certains problèmes de dynamique des moteurs à quatre temps à deux lignes parallèles de cylindres

On étudie le priblème de l' tablissement du décalage fonctionnel entre les lignes du cylindre dans un moteur à quatre temps et deux lignes paralléles de cylindres et à allumage uniformément réparti dans chaque ligne. On considère d'abord le décalage fonctionnel qui assure la répartition uniforme de l'allumage pour l'ensemble des deux lignes et l'on précise l'équilibrage du moteur dans ce cas. Puis on établit d'autres décalages entre les lignes des cylindres pour les quelles l'équilibre du moteur est meilleur.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

C.D. 621—52

S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici

Considération sur les éléments de calcul pneumatique avec jet

Les désavantages que présentent les éléments pneumatiques construits sur le principe de la compensation des forces employés dans la construction des régulateurs pneumatiques et dans la technique du calcul analogique et numérique ont déterminé l'utilisation des nouveaux principes de fonction basés sur l'action aérodynamique des jets d'air, sur le mouvement des corps dans un jet d'air et sur l'effet Coandă.

Basé sur ces principes on a réalisé dans notre laboratoire des circuits de calcul analogique et numérique par impression et en même temps on a déterminé des relations de calcul pour les éléments à deux ou trois ajoutages basés sur l'intéraction des jets d'air.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

M. Petrescu C.D. 621.374.3

La forme, la période et le spectre des oscillations libres dans le circuit *LC* à capacité non linéaire d'un jonction *p-n* alliée

Dans le travail on analyse les oscillations libres dans le circuit *L.C.* à la capacité non-linéaire d'un jonction *p-n* aliée. La dépendance de temps de la tension aux bornes du circuit est exprimée par les fonctions elliptiques de Jacobi. On montre que la période des oscillations libres croît lorsque leur amplitude s'augmente. On présente les résultats expérimentaux qui conconcordent d'une manière satisfaisante avec les conclusions théoriques.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

A. Popa C.D. 656.222

La détermination des vitesses et des temps de marche des trains par la méthode des moules

En partant de la résolution de l'équation de mouvement du temps par la méthode des accroissements finis et en maintenant constant l'élément temps, l'auteur construit une nomogramme à l'aide de laquelle on trace graphiquement, dans très peu de temps et avec une précision assez grande, la courbe $V = f(s)$ pour un train donné rémorqué à une certaine locomotive. Une fois constituée la nomogramme ayant un caractère général, elle peut être employé pour tous les régimes de fonctionnement de la locomotive qui remorque un train donne. Elle peut être employè aussi à la détermination des temps de marche. Par l'emploi de ce procédé on réduit le volume de travail par 8—10 fois.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

T. Dudaş D.K 621.434.1

Einige Probleme der Dynamik der Viertaktmotoren mit zwei parallelen Zylinderreihen

Es wird das Problem der Feststellung der functionellen Verschiebung zwischen den Zylinderreihen eines Viertaktmotors mit zwei parallelen Zylinderreihen und gleichmässig in jeder Reihe verteilten Zündungen, untersucht. Zuerst wird die funktionelle Verschiebung, welche die gleichmässige Verteilung der Zündungen für die Gesamtheit der zwei Reihen sichert, betrachtet und der Ausgleich des Motors in diesem Falle präzisiert. Es werden nachher andere Verschiebungen zwischen den Zylinderreihen für welche der Ausgleich des Motors günstiger ist, festgestellt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

D.K. 621—52

S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici

Erwägungen über pneumatische Strahl — Berechnungs — elemente

Die Nachteile der nach dem Prinzip des Kraftausgleichs aufgebauten pneumatischen Elemente, welche sowohl im Bau der pneumatischen Regler wie auch in der Technik der analogen — und numerischen Berechnung angewendet werden, führte zur Feststellung von neuen Arbeitsprinzipien derselben, wie: aerodynamische Wirkung der Luftsträhle, Bewegung der Körper in einem Luftstrahl und die Wechselwirkung zwischen Strahl und einem Profil (Effekt von Coandă).

Auf Grund dieser Prinzipien wurden in unserem Labor, durch Drucken, Analogische- und Zahlenberechnungskreise verwirklicht. Gleichzeitig wurden die Verhältnisse der Berechnungen für Elemente mit 2 und 3 Düsen, die sich auf die Wechselwirkung der Luftstrahlen gründen, bestimmt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

M. Petrescu D.K. 621.374.3

Form, Periode und Spektrum der freien Schwingungen im *LC*-Kreislauf mit unliniärer Kapazität der *p-n* verbundenen Anschlüsse.

In der Arbeit werden die freien Schwingungen im *L.C.* Kreislauf mit unliniärer Kapazität der *p-n* verbundenen Anschlüsse analysiert. De Zeitabhängigkeit der Spannung an den Klemmen des Kreislaufs wird durch die elliptischen Funktionen von Jacobi ausgedrückt. Es wird gezeigt, dass die Periode der freien Schwingungen wächst, wenn sich deren Amplitude vergrössert. Es werden die experimentellen Ergebnisse welche in zufriedenstellender Weise den theoretischen Schlussfolgerungen entsprechen, vorgeführt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

A. Popa D.K. 656.222

Feststellung der Geschwindigkeiten und Gangzeiten der Züge durch die Schablonenmethode

Ausgehend von der Lösung der Zeitlaufsgleichung durch die Methode der unendlichen Zunahmen, unter Konstanthaltung des Elements Zeit, konstruiert der Autor ein Nomogramm mit dessen Hilfe graphisch, in sehr kurzer Zeit und mit genügend grosser Genauigkeit die Kurve $V = f(s)$ für einen gegebenen und von einer gewissen Lokomotive geschleppten Zug, gezogen wird.

Das einmal konstruierte Nomogramm, das einen allgemeinen Charakter besitzt, kann für alle Arbeitsregime der einen gegebenen Zug schleppenden Lokomotive, angewendet werden. Es kann auch zur Feststellung der Gangzeiten benützt werden.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVII Nr. 1/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

ECONOMIE POLITICĂ

C. Z.: 338.062.413 : 621.3

PRODUCTIVITATEA MUNCII ȘI FACTORII EI DE CREȘTERE IN INDUSTRIA ELECTROTEHNICĂ *)

D. REBUȘAPCĂ, R. SOARE, P. IONIȚĂ, S. ANTONESCU, GH. MAȘALĂ, M. VASILACHE, M. HAGISTATE

In procesul industrializării socialiste, al creării și dezvoltării necontenite a bazei tehnice materiale a socialismului în țara noastră, P.M.R. a acordat și acordă o atenție deosebită dezvoltării continue a industriei constructoare de mașini, din care face parte și industria electrotehnică.

Înainte de 1944 nu se putea vorbi de existența unei industrii electrotehnice propriu zise. Cele cîteva întreprinderi electrotehnice existente aveau un profil de ateliere de reparații a mașinilor importate. In aceste întreprinderi se lucra pe baza unor metode meșteșugărești, fapt care explică nivelul foarte scăzut al productivității muncii.

Instaurarea dictaturii proletariatului în țara noastră și trecerea României pe drumul construirii socialismului, a făcut necesară crearea unei industrii electrotehnice puternice, capabile să asigure procesul de electrificare a întregii țări.

Astfel în urma investițiilor făcute, au fost create și dezvoltate o serie de întreprinderi electrotehnice ca: „Electroputere", „Întreprinderea de piese de radio și semiconductori", „Electronica", „Uzinele de mașini electrice", „Electrotehnica", „Automatica" etc.

Crearea și dezvoltarea unui număr important de întreprinderi electrotehnice, înzestrate cu o tehnică modernă, a dus la creșterea volumului producției industriei electrotehnice după cum reese din tabelul de la pag. 2.

Ritmul mediu anual de creștere a producției a fost de 27,5%, față de 18,8% în industria constructoare de mașini și prelucrarea metalelor și 13,2% în întreaga industrie.

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Dinamica producţiei globale a industriei electrotehnice între anii 1950—1963 (1950=100)

Anii	%	Anii	%
1951	172,7	1958	591,8
1952	278,9	1959	727,0
1953	358,3	1960	943,2
1954	337,0	1961	13,4 ori
1955	368,5	1962	18 ori
1956	434,1	1963	23,3 ori
1957	521,2		

Creşterea într-un ritm rapid al producţiei industriei electrotehnice a determinat creşterea ponderii acesteia în producţia globală industrială a ţării.

Ponderea producţiei globale a industriei electrotehnice în cadrul producţiei globale industriale în anii 1950; 1955—1963 (2)

Anii	%	Anii	%
1950	0,9	1959	2,1
1955	1,5	1960	2,4
1956	1,6	1961	2,9
1957	1,8	1962	3,4
1958	1,8	1963	3,9

Ponderea producţiei industriei electrotehnice în totalul producţiei industriale a ţării a crescut de la an la an ajungînd în 1963 să fie de peste patru ori mai mare faţă de 1950. Cu atît mai importantă este această creştere dacă se ţine seama de faptul că producţia industrială a ţării a crescut în această perioadă într-un ritm foarte rapid.

Creşterea producţiei industriei electrotehnice a făcut posibil ca cea mai mare parte a nevoilor de maşini, aparate şi instalaţii necesare electrificării ţării cît şi a altor nevoi ale economiei naţionale şi de consum ale populaţiei să fie satisfăcute din producţia internă asigurîndu-se în acelaşi timp şi o cantitate din ce în ce mai mare pentru export.

Unul din factorii principali ai creşterii producţiei industriei electrotehnice îl constituie sporirea productivităţii muncii, problemă de care ne vom ocupa în acest studiu.

Ca urmare a măsurilor luate de către partid privind promovarea progresului tehnic în economie, productivitatea muncii în industria electrotehnică a cunoscut un ritm înalt de creştere.

Dinamica productivității muncii pe un salariat și un muncitor în industria electrotehnică în anii 1950—1963 (1) (1950=100)

Anii	Indicele de creștere a productivității muncii pe 1 salariat (%)	Indicele de creștere a productivității muncii pe 1 muncitor (%)
1951	152,5	136,0
1952	222,9	181,8
1953	272,1	229,1
1954	270,3	222,7
1955	297,1	237,3
1956	341,2	269,7
1957	401,1	373,1
1958	440,5	341,3
1959	493,5	381,0
1960	487,6	372,7
1961	531,6	417,2
1962	597,6	448,3
1963	708,0	522,6

Ritmul mediu anual de creștere a productivității muncii pe salariat a fost de 16%, iar pe un muncitor de 13% cu mult mai înalt decît cel din industria constructoare de mașini și prelucrării metalelor luată în ansamblul ei cît și al întregii industrii.

Dinamica productivității muncii pe un salariat este mai mare decît pe un muncitor, datorită faptului că în perioada respectivă numărul de muncitori a crescut mult mai repede decît cel al salariaților.

Ritmul rapid de creștere al productivității muncii în industria electrotehnică este urmarea acțiunii a numeroși factori, dintre care cei mai importanți sînt: introducerea tehnicii noi și modernizarea utilajelor și a proceselor tehnologice existente, organizarea producției și a muncii, calificarea muncitorilor și cointeresarea materială în rezultatele muncii lor etc.

Factorul cel mai important care a contribuit la creșterea productivității muncii este progresul tehnic.

Procesul de înzestrare tehnică a industriei electrotehnice este oglindit în primul rînd în dinamica fondurilor fixe așa cum rezultă din tabelul de mai jos:

Dinamica fondurilor fixe în industria electrotehnică între anii 1950—1962 (1)

(1950 = 100)

Anii	%	Anii	%
1951	240,8	1957	476,4
1952	318,1	1958	515,4
1953	353,9	1959	551,4
1954	377,5	1960	635,5
1955	407,2	1961	739,4
1956	446,2	1962	769,1

Din analiza datelor prezentate reiese că dotarea cu fonduri fixe a întreprinderilor a crescut foarte mult, ajungînd ca în anul 1962 să fie de peste şapte ori mai mare decît în 1950, ceea ce a ridicat simţitor înzestrarea tehnică a muncii.

Introducerea progresului tehnic în industria electrotehnică s-a înfăptuit prin: înlocuirea mijloacelor tehnice învechite cu altele moderne şi modernizarea celor existente, precum şi prin perfecţionarea continuă a proceselor tehnologice, etc. În ceea ce priveşte prima direcţie a progresului tehnic un rol important îl are procesul mecanizării şi automatizării producţiei. Dintre procesele automatizate menţionăm pe acelea privind producerea acumulatorilor cu ajutorul unor maşini automate, turnarea şi pastarea cablurilor în mase plastice folosind maşini cu reglaj şi comenzi electronice automate ş. a. Aceste maşini au un randament de 4—5 ori mai mare decît cele neautomatizate.

În industria electrotehnică are loc în acelaşi timp o îmbunătăţire continuă a proceselor tehnologice care se manifestă pe de o parte prin accentuarea caracterului de serie mare în fabricaţie, iar pe de altă parte prin utilizarea unor materiale noi care se pretează la prelucrare prin procedee tehnologice moderne. Aceste procedee tehnologice se referă la extinderea benzilor de lucru şi conveerelor în fabricaţia aparatelor de radio şi televiziune, a aparatajului de joasă tensiune, a motoarelor electrice etc.

Un alt factor care a contribuit la creşterea productivităţii muncii este *organizarea producţiei şi a muncii.* În etapa actuală a desăvîrşirii construirii socialismului în patria noastră şi a revoluţiei tehnico-ştiinţifice problema *organizării producţiei şi a muncii capătă o importanţă deosebită.* Progresul tehnic continuu a impus noi forme de organizare a producţiei şi a muncii. Una dintre principalele forme de organizare a producţiei este *specializarea şi cooperarea.*

Specializarea unui număr important de întreprinderi din industria electrotehnică a contribuit la îmbunătăţirea normării muncii şi a salarizării, la ridicarea calificării muncitorilor, la lichidarea unor paralelisme în activitatea întreprinderilor înrudite ca profil, la folosirea deplină a capacităţilor de producţie, la ridicarea calităţii produselor, etc.

Legat de specializarea producţiei o importanţă deosebită prezintă problema asimilării de produse noi. În industria electrotehnică în fiecare an se asimilează produse noi ceea ce a pus în faţa muncitorilor, tehnicienilor şi inginerilor sarcini foarte importante. Astfel în anul 1962 nomenclatorul de produse era schimbat în proporţie de 80% faţă de 1959. Asimilarea de noi produse duce la schimbarea sortimentelor de fabricaţie, la modificarea structurii producţiei, influenţînd creşterea productivităţii muncii. De aceea producţia trebuie să fie astfel organizată încît trecerea de la producerea unui anumit produs la altul să nu ducă la sporirea nejustificată a cheltuielilor de muncă vie şi materializată.

Specializarea este legată şi presupune cooperarea întreprinderilor în procesul de producţie. Procesul cooperării a fost extins într-o proporţie

însemnată între întreprinderile industriei electrotehnice, precum și între acestea și alte întreprinderi ale industriei constructoare de mașini. Un loc important în cadrul cooperării din industria electrotehnică îl ocupă cooperarea în producția locomotivei Diesel-electrice. În cursul anului 1962 organizarea consiliului de coordonare a cooperării care a cuprins un număr mare de întreprinderi a contribuit la creșterea productivității muncii în producția de locomotive Diesel-electrice.

Organizarea superioară a producției presupune și *organizarea judicioasă a muncii*. Un loc important în cadrul organizării muncii îl ocupă stabilirea unui raport corespunzător între muncile de bază și cele auxiliare — în sensul creșterii numărului muncilor de bază față de cele auxiliare, precum și o *justă normare a acestora*. Cu excepția unui număr restrîns de întreprinderi toate celelalte au trecut la aplicarea normelor cu motivare tehnică, atît la muncile de bază, cît și la cele auxiliare. Din studiul făcut reiese că pe Dir. G-lă a industriei electrotehnice, s-a realizat din totalul ore-normă pe anul 1962 la muncile de bază după norme tehnice 76,6%, iar la muncile auxiliare 44,6%. Cele mai bune rezultate au obținut în această privință întreprinderile: „Electronica", „Uzina de mașini electrice București", „Electroprecizia" ș. a.

Normarea muncii pe baze științifice a contribuit tot mai mult la folosirea judicioasă și mai deplină a fondului de timp disponibil.

Un rol important în creșterea productivității muncii îl are și *ridicarea calificării și cointeresarea materială a oamenilor muncii*. Creșterea calificării oamenilor muncii apare ca o necesitate, în condițiile progresului tehnic continuu, deoarece pentru a folosi cît mai bine tehnica și tehnologia modernă sînt necesari muncitori, tehnicieni și ingineri cu o înaltă calificare. Ținînd seama de aceasta în industria electrotehnică s-au luat o serie de măsuri în vederea ridicării calificării muncitorilor și încadrării în întreprinderi a unui număr tot mai mare de ingineri și tehnicieni. În acest scop s-au înființat pe lîngă întreprinderi o serie de școli de normatori, tehnologi, școli tehnice de doi ani în care s-au calificat în perioada 1960—1962, 2.240 de muncitori și s-au specializat 5.100. Paralel cu calificarea muncitorilor, în industria electrotehnică a crescut de la an la an și numărul tehnicienilor și inginerilor.

Dinamica numărului inginerilor și tehnicienilor în industria electrotehnică în perioada 1950—1963 (1).

(1950 = 100)

Anii	%	Anii	%
1951	143,2	1958	166,1
1952	161,0	1959	176,6
1953	188,5	1960	218,1
1954	167,0	1061	283,7
1955	151,1	1962	314,0
1956	158,5	1963	320,7
1957	160,8		

Specializarea şi creşterea calificării au creiat posibilităţi pentru manifestarea mai largă a iniţiativei creatoare a oamenilor muncii. O expresie a acestui fapt o constituie sporirea numărului şi calităţii inovaţiilor, raţionalizărilor şi invenţiilor. Din cele 45.000 invenţii şi inovaţii care au fost aplicate în întreaga economie naţională în anul 1962, 1850 s-au realizat în industria electrotehnică.

In obţinerea acestor rezultate importante un rol l-a avut şi cointeresarea materială a oamenilor muncii. Un factor de seamă în cointeresarea materială a colectivului de lucrători ai întreprinderilor, este beneficiul întreprinderii care se foloseşte în parte pentru formarea fondului întreprinderii. In perioada analizată beneficiile întreprinderilor au crescut simţitor depăşind pe cele planificate, ceea ce a permis sporirea fondului întreprinderii şi îmbunătăţirea condiţiilor de viaţă şi de muncă ale celor ce muncesc.

In cointeresarea materială personală a fiecărui muncitor, rolul principal îl are sistemul socialist de salarizare bazat pe folosirea legii repartiţiei după muncă. Creşterea producţiei şi a productivităţii muncii a făcut posibil ca partidul şi statul nostru să ia măsuri de ridicare continuă a salariilor muncitorilor, inginerilor, tehnicienilor şi ale altor categorii de oameni ai muncii din industria electrotehnică. Aceasta i-a stimulat în creşterea productivităţii muncii a cărei dinamică a depăşit pe aceea a salariului mediu.

Dinamica productivităţii muncii pe salariat şi a salariului mediu în industria electrotehnică în perioada 1951—1963 [1].

1951 = 100

Anii	Productivitatea muncii pe salariat (%)	Salariul mediu %
1952	146	107
1953	178	122
1954	177	128
1955	194	139
1956	223	147
1957	264	164
1958	289	196
1959	323	211
1960	319	224
1961	348	231
1962	392	261
1963	464	—

Creşterea productivităţii muncii depăşind cu mult creşterea salariului mediu a asigurat realizarea unor importante acumulări socialiste — baza dezvoltării producţiei şi a ridicării nivelului de trai material şi cultural al celor ce muncesc.

★

★ ★

Însemnatele realizări obținute în creșterea productivității muncii constituie premiza ridicării acesteia la un nivel și mai înalt, ceea ce va contribui la creșterea producției, la acoperirea într-o măsură tot mai mare a nevoilor economiei naționale cu produse electrotehnice.

Contribuind la înfăptuirea procesului de electrificare a întregii țări, la dezvoltarea tuturor ramurilor de producție materială, industria electrotehnică capătă un rol din ce în ce mai important în dezvoltarea bazei tehnice materiale a socialismului, în vederea desăvîrșirii construirii socialismului în R.P.R.

Catedra de economie politică
Institutul politehnic București

*
* *

1. Calculat după datele Dir. G-rale a industriei electrotehnice din Min. Ind. Construcțiilor de Mașini.
2. Anuarul statistic al R.P.R. 1964 pag. 166—167.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

MATEMATICĂ

C. Z.: 515

EIN ACHSIAL-HELIKOIDALES PROJEKTIONSSYSTEM *)

AURELIAN TĂNĂSESCU

I. Einleitung

Bei der Belebung der wissenschaftlichen Arbeit im Bereich der darstellenden Geometrie spielt anhaltend eine bedeutende Rolle die Notwendigkeit, die Aufgaben mittels graphischer Methoden zu lösen.

In dieser Hinsicht ist die Tatsache bekannt, daß in letzter Zeit den Darstellungen der Figuren im Raum auf einer einzigen Projektionsebene ein besonderes Interesse bei der Lösung der Aufgaben durch die graphische Methode entgegengebracht wird.

Auf diese Weise wurden viele Probleme verschiedener Gebiete wie Mechanik, Bauwesen, Chemie, Bergbautechnik usw., wo die interessantesten und bekannten neuen Methoden der Einebenendarstellung angewendet wurden, gelöst.

Selbstverständlich hängt der Wert der geometrischen Methode von der Tatsache ab, wie bequem die verschiedenen Aufgaben mit ihrer Hilfe gelöst werden.

Man kann auch feststellen, daß jede der vorhandenen Darstellungsmethoden für die Lösung einer bestimmten Aufgabengruppe bequem ist, und daß diese Methoden nicht nur direkte Ergebnisse in den oberwähnten Bereichen boten, sondern auch gleichzeitig aus neuen Methoden zur Lösung mancher geometrischer Probleme bestanden.

Dieser Linie folgend, wird in dieser Arbeit ein achsial-helikoidales Projektionssystem dargestellt, in welchem die Projizierenden des Projektionssystems die Erzeugende gewisser helikoidaler Flächen, der dreiwinkligen Schraube, sind.

Das Darstellungssystem ist von einer Ebene und es werden außer den Darstellungen der geometrischen Grundelemente auch die Lösungen aller Lagenaufgaben, betreffend die Geraden, die Ebenen, die Vielflächen und Oberflächen eingehend betrachtet.

---

*) Mitteilung, dargebracht bei der wissenschaftlichen Tagung der Lehrkräfte des Polytechnischen Instituts Bukarest, 14—15 Dezember 1963.

Dieses achsial-helikoidale Darstellungssystem trägt neben dem Interesse, welches es als neues Darstellungssystem bietet, in bedeutendem Maße zur Vereinfachung der Darstellungen und Lösungen vieler Aufgaben, bei, besonders derjenigen, welche sich auf helikoidale Oberflächen und solche zweiter Ordnung beziehen.

II. Der Punkt

Betrachten wir die darstellende Ebene π und die Achse Ω des angenommenen Projektionssystems, welches in ω die Ebene π schneidet und auf diese senkrecht ist.

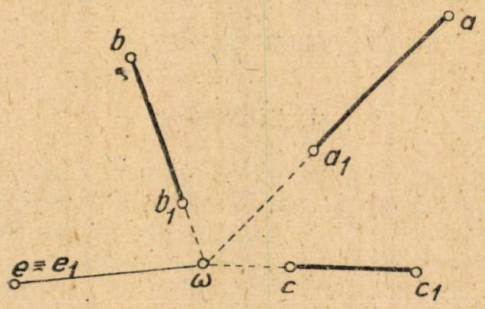


Fig. 1

Wir wählen als Projizierende in diesem darstellenden achsialen Einflächensystem mit der Achse sich schneidende Gerade, die mit ihr den konstanten Winkel θ bilden, den wir den Modul des Projektionssystems nennen.

Diese projizierenden Geraden können als Erzeugende von helikoidalen Oberflächen — Dreieckschrauben — betrachtet werden.

Ein beliebiger Punkt A im Raum kann somit durch den Doppelpunkt (a, a_1) dargestellt werden, wobei a die rechtwinklige Projektion des Punktes A auf die Ebene π und a_1 der Schnitt zwischen dem Darstellungsplan π un der projizierten Geraden ist (wir benennen a_1 die achsiale Projektion des Punktes A).

Auf diese Weise kann eine zweieindeutige Verbindung zwischen den Raumpunkten und den Punkten der Darstellungsebene π hergestellt werden.

Es sei der Punkt ω der Mittelpunkt des achsial einflächigen Darstellungssystems und beachten wir, daß auf den Riß (Fig. 1) die achsialen Projektionen der Punkte A und B, somit a_1 und b_1 zwischen dem Mittelpunkt ω und deren rechtwinklige Projektionen a und b gelegen sind, und ob die betrachteten Punkte einen positiven Abstand haben.

Wenn der Punkt einen negativen Abstand hat, z. B. C, dann wird auf dem Riß seine rechtwinklige Projektion c zwischen dem Mittelpunkt ω und der achsialen Projektion c_1 liegen.

Für die auf der Achse gelegenen Punkte folgt $a \equiv \omega$ und für die Punkte der Darstellungsebene π ergibt sich, beispielsweise, $e \equiv e_1$.

Es ergibt sicht somit, daß auf dem Riß jene drei Elemente ω, a und a_1 immer kolinear sind.

Es ist leicht zu bemerken, daß aus dem Riß sofort der Abstand des Punktes in bezug auf die Ebene π gefolgert werden kann, sobald man den Wert zwischen dem Segment $\overline{aa_1}$ und der Tangente des Moduls, *d. h.* das Verhältnis $\frac{\overline{aa_1}}{\operatorname{tg}\theta}$ in Betracht zieht.

Wir schränken in keiner Weise die Allgemeingültigkeit des Problems ein, wenn wir zwecks Erleichterung der Ausführung den Modul $\theta = 45°$ annehmen, so daß wir auf dem Riß den Abstand des Punktes durch das von jenen zwei Projektionen gegebene Segment a und a_1 des Doppelpunktes, der seinerseits den Raumpunkt A darstellt, direkt ablesen.

III. Die Gerade

Die Gerade kann entweder durch zwei Punkte (a, a_1), (b, b_1), oder durch einen dieser Punkte und seine Spur $h \equiv h_1$ (Fig. 2) dargestellt werden.

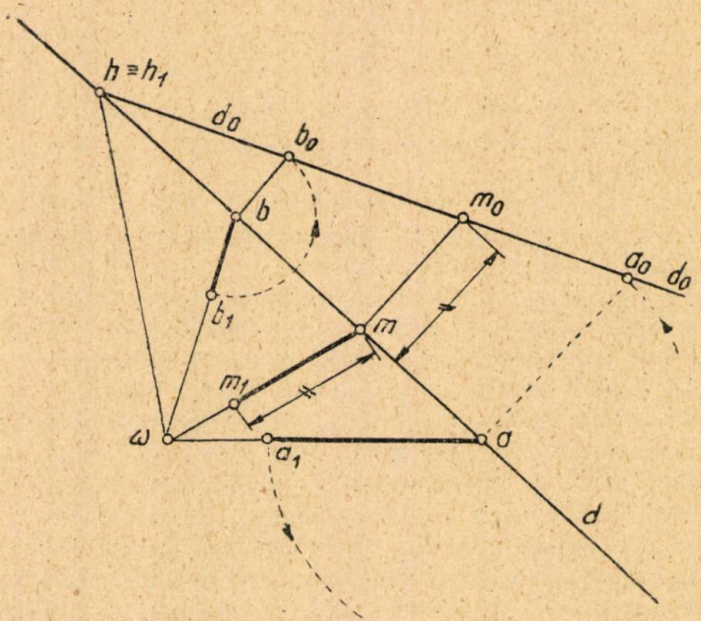


Fig. 2

Die orthogonale Projektion der Geraden ist d und wird erhalten durch Verbindung von a mit b, wobei die Umlegung der Geraden auf die Ebene d_0 ist und durch Verbindung von a_0 mit b_0 erhalten werden

kann. Auf diese Weise kann auch die Spur $h \equiv h_1$ der Geraden oder die achsiale Projektion m_1 eines auf der Gerade laufenden Punktes, von welchem wir die orthogonale Projektion $m \in d$ kennen, bestimmt werden.

Betrachten wir die durch den Punkt (a, a_1) und dessen Spur $h \equiv h_1$ (Fig. 3) bestimmte Gerade. Wir können den Punkt M (m, m_1), der auf

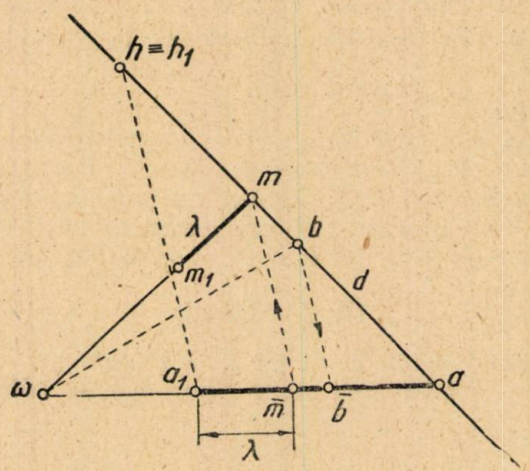


Fig. 3

der Geraden liegt, bestimmen, wenn wir seinen Abstand λ kennen. Zu diesem Zwecke betrachten wir das Segment $a_1\bar{m} = \lambda$, woraus sich m und daraufhin m_1 ergeben.

Man kann das Problem auch umgekehrt stellen. So können wir für den Punkt b seinen Abstand a_1b bestimmen, ohne die Umlegung der Geraden auf der Ebene π zu gebrauchen.

Wenn die Gerade einige Sonderlagen in bezug auf die Darstellungsebene zeigt, unterscheiden wir: eine zu dieser Ebene parallele Gerade, eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade und eine um 45° geneigte oder den Winkel θ des Moduls mit der darstellenden Ebene bildet.

Die mit der darstellenden Ebene parallele Gerade ist auf dem Riß durch die Gleichheit der Segmente $aa_0 = aa_1 = bb_1 = cc_1 = ff_1 = ee_1$ gekennzeichnet, wobei d_0 die Umlegung der Geraden ist. Es ergibt sich somit, daß alle Punkte der Geraden denselben Abstand haben.

Wenn wir in diesen Riß ein rechtwinkliges Koordinatensystem xoy einführen, in welchem ω der Mittelpunkt des achsial einflächigen Projektionssystems $(o, -k)$ der Ordinatenachse ist und den geometrischen Ort der achsialen Projektionen o_1, a_1, b_1, c_1, e_1, f_1 oder o_2, a_2, b_2, f_2 usf. berechnen, erhalten wir die Kurve

$$y^2[(k+y)^2 + x^2] = \varrho^2(k+y)^2$$

in welcher wir die Konchoide des Nikomed erkennen (Fig. 4).

Es folgt daraus, *daß der Schnitt in der projizierenden Fläche einer mit der darstellenden Ebene parallelen Geraden mit der darstellenden Ebene selbst eine Konchoide des Nikomed ist.*

Für die anderen Gerade-Typen ergaben sich folgende Darstellungen (Fig. 5):

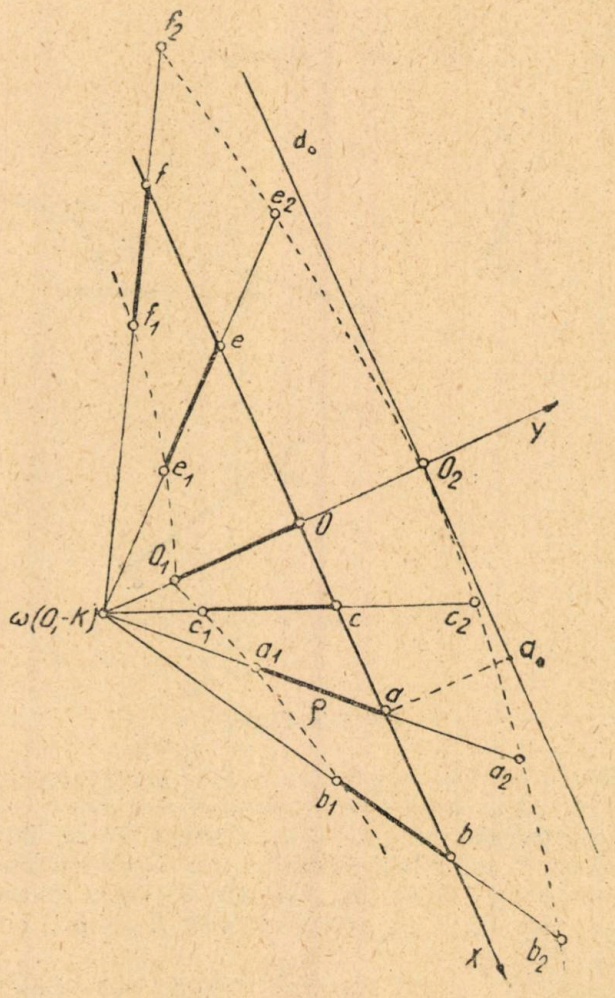


Fig. 4

Die Gerade CE (ce, $c_1 \equiv e_1$) ist um 45° (Modulwinkel) gegenüber der darstellenden Ebene geneigt und geht durch die Achse des Projektionssystems.

Die Gerade GF (g, f, g_1, f_1) ist mit der Achse des Projektionssystems zusammenlaufend, ihre Neigung gegenüber der darstellenden Ebene ist aber verschieden vom Modul $\theta = 45°$.

Die Gerade BN ist senkrecht auf der darstellenden Ebene im Punkt $h = h_1$ und kann beispielsweise durch die Punkte B, A des positiven Abstandes oder MN des negativen Abstandes im Verhältnis zur darstellenden Ebene definiert werden.

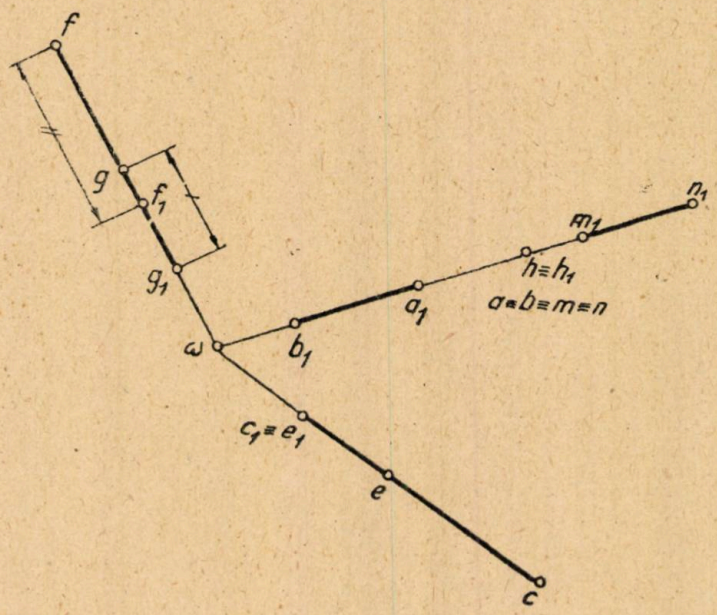


Fig. 5

IV. Die Ebene

a) *Darstellung der Ebene.* Die Darstellung der Ebene stellt in diesem Projektionssystem keine besonderen Probleme. So können wir die Ebene durch ihre Schnittgerade mit der darstellenden Ebene festlegen, somit mittels ihrer Spur P auf dieser Ebene π und eines Punktes der Ebene, der entweder ein Punkt A (a, a_1) der am stärksten geneigten Linie L der Ebene ist, so daß $l \perp P$ ist, oder ein Punkt B (b, b_1), auf einer Geraden D (d) (Fig. 6).

Selbstverständlich ist in diesem Beispiel der Zweiflächenwinkel $\varkappa < 45°$ (Modul des Projektionssystems).

Die Darstellung der Ebene kann auch durch drei Punkte gemacht werden, welche denselben Abstand in bezug auf die darstellende Ebene haben.

In den anderen möglichen Fällen erhalten wir folgende Darstellungen der Ebene (Fig. 7): Die Ebene P für $\alpha = 45°$ (somit $\alpha =$ Modul), die Ebene Q für $\alpha > 45°$ und die Ebene R, senkrecht zur darstellenden Ebene.

b) *Sich schneidende und parallele Gerade.* In diesem achsialen Projektionssystem kann eine Ebene leicht mit Hilfe von zwei sich schneidenden Geraden (Fig. 8) oder zwei parallelen Geraden (Fig. 9) definiert werden.

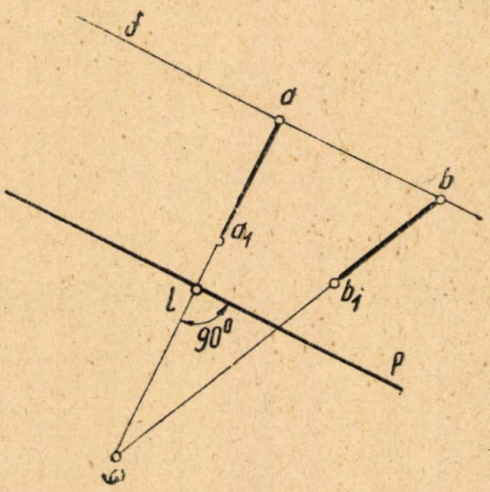


Fig. 6

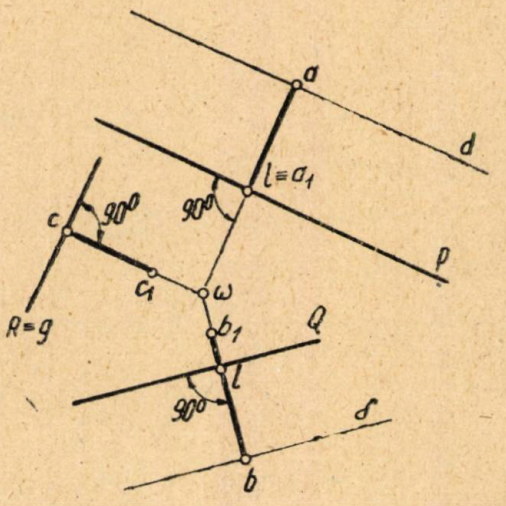


Fig. 7

Es sei in dem letzteren Riß D die erste Gerade, dargestellt durch ihre orthogonale Projektion d, den Punkt (a, a_1) und die Spur $h \equiv h_1$. Die Umlegung dieser Geraden auf die darstellende Ebene ist d_0. Die Gerade Δ, welche anfangs ungenau mit δ und dem Punkt (b, b_1) defi-

niert wurde, kann vollständig definiert werden, indem bei der Umlegung $\delta_0 \parallel d_0$ so gewählt wird, daß wir $K \equiv K_1$ erhalten. Unter diesen Bedingungen ist die Gerade Δ parallel zu D und definiert die Ebene P. Mit Hilfe einer am stärksten geneigten Linie können wir überprüfen, *ob* die Punkte A und B derselben Ebene zugehören.

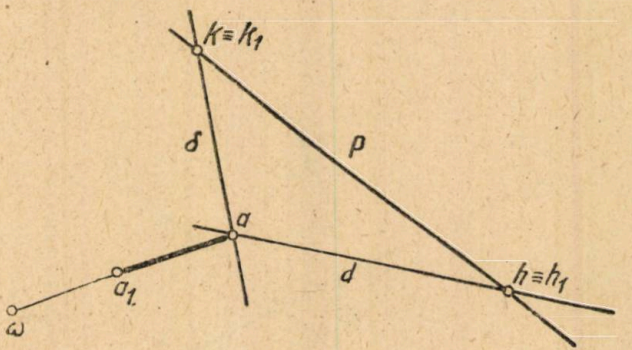


Fig. 8

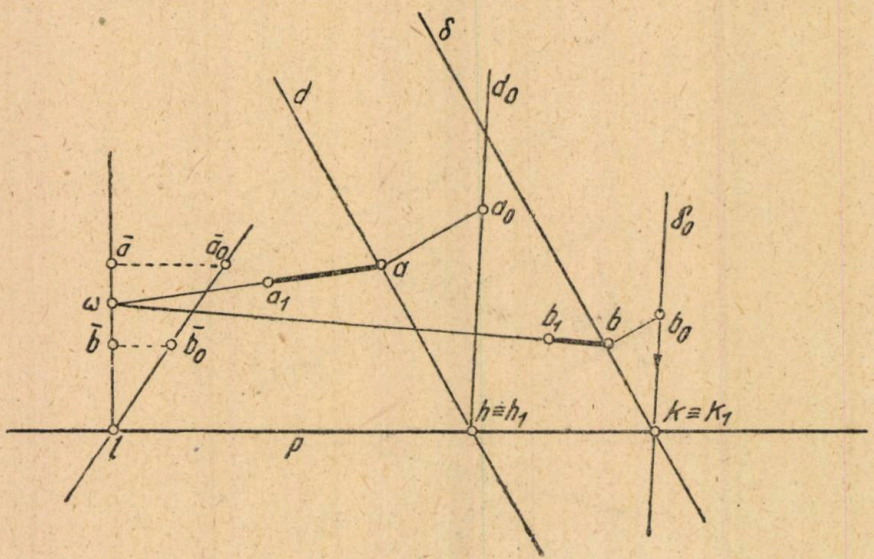


Fig. 9

c) *Probleme des Zusammentreffens.*

In Fig. 10 haben wir die Schnittgerade d, (m, m_1), $h \equiv h_1$ zwischen beliebigen Ebenen P, $(a\ a_1)$ und Q, (b, b_1) konstruiert, indem wir als Hilfsebene eine mit der darstellenden Ebene parallele Ebene verwendeten, mit dem Abstand λ.

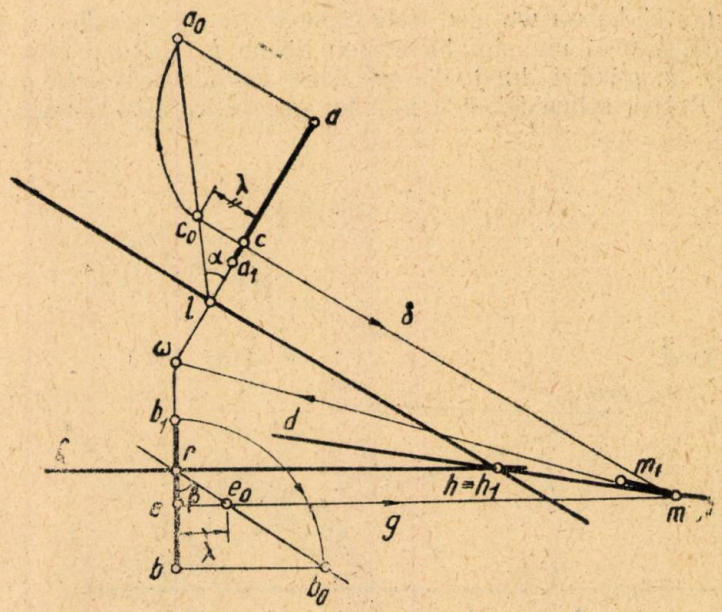

a_0
a
λ
c_0
c
α
a_1
l
δ
ω
b_1
d
f
r
m_1
$h=h_1$
e_0
β
e
g
m
λ
b
b_0

Fig. 10

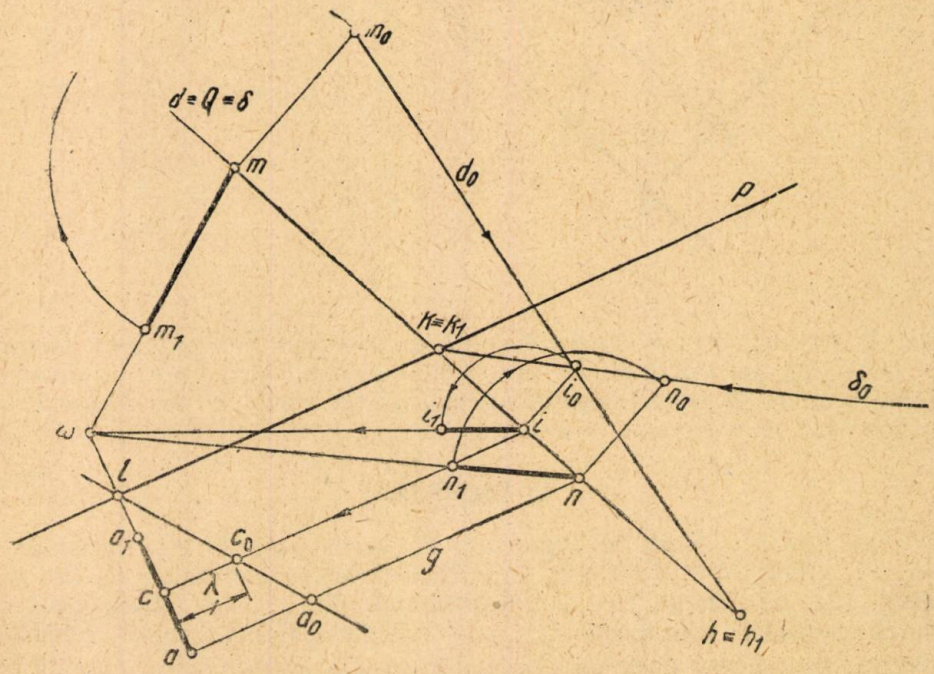

n_0
$d=q=\delta$
m
d_0
p
m_1
$k=k_1$
i_0
n_0
δ_0
i_1
i
ω
l
n_1
n
a_1
c_0
g
c
λ
a_0
$h=h_1$
a

Fig. 11

In Fig. 11 haben wir den Schnittpunkt (i, i_1) zwischen der Geraden d, (m, m_1), $h \equiv h_1$ und der beliebigen Ebene P, (a, a_1) konstruiert. Die Hilfsebene Q, geführt durch die gegebene Gerade senkrecht auf die darstellende Ebene, schneidet sich mit der gegebenen Ebene nach der Gera-

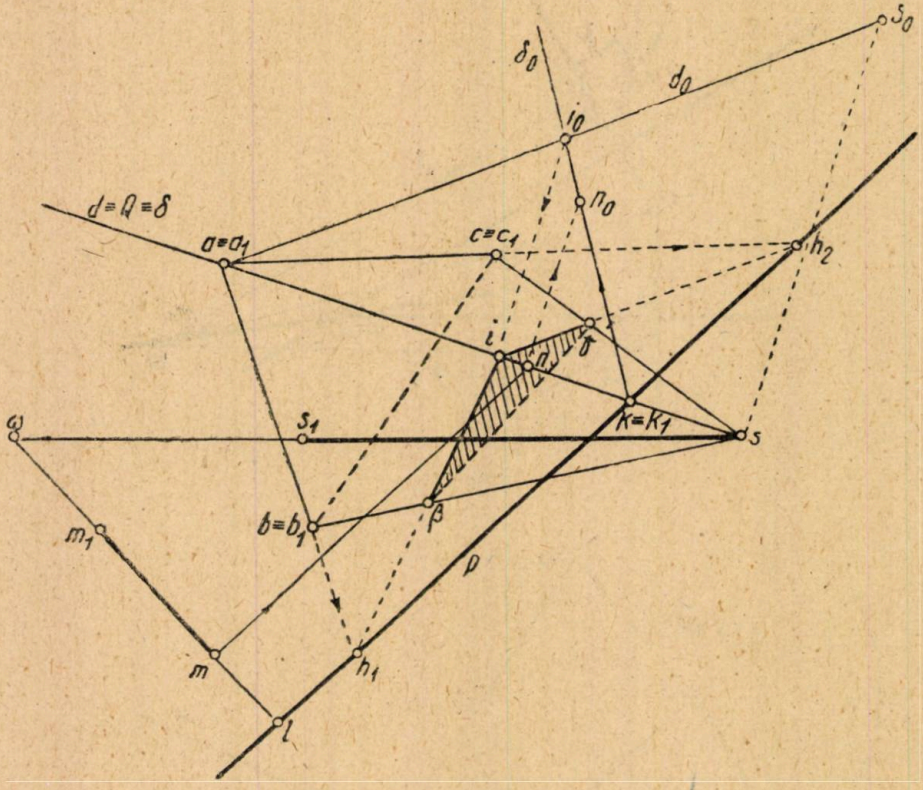


Fig. 12

den δ, (n, n_1), $k \equiv k_1$. Diese Gerade Δ schneidet die gegebene Gerade in Umlegung im Punkt i_0, der uns zum Doppelpunkt (i, i_1) des gesuchten Schnitts führt. Zwecks Überprüfung muß dieser Punkt in der Ebene P so liegen, daß $ii_0 = ii_1 = cc_0 = \lambda$ ist.

V. Vielflächen

a) *Ebener Schnitt in Pyramide.* Es seien gegeben die Pyramide S (s, s), $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, $c \equiv c_1$ und ein beliebiger Schnittplan P, (m, m_1) (Fig. 12). Es genügt, eine der Kanten z.B. Sa, mit der Schnittebene zu durchscheneiden. Die Ebene $Q \perp \pi$, durch diese Kante geführt, schneidet die gegebene Ebene nach der Geraden δ, (n, n_0), $k \equiv k_1$, wobei $nn_0 \equiv mm_1$. Wir erhalten den Schnitt $i\ \beta\ \gamma$.

b) *Schnitt zwischen einer Geraden mit einer Pyramide.* Es seien d, (m, m_1), $h \equiv h_1$ die gegebene Gerade (Fig. 13) und $SABC$ die Pyramide. Zwecks Bestimmung der Ebene P, welche durch die gegebene Gerade und durch die Pyramidenspitze geht, konstruieren wir die Pa-

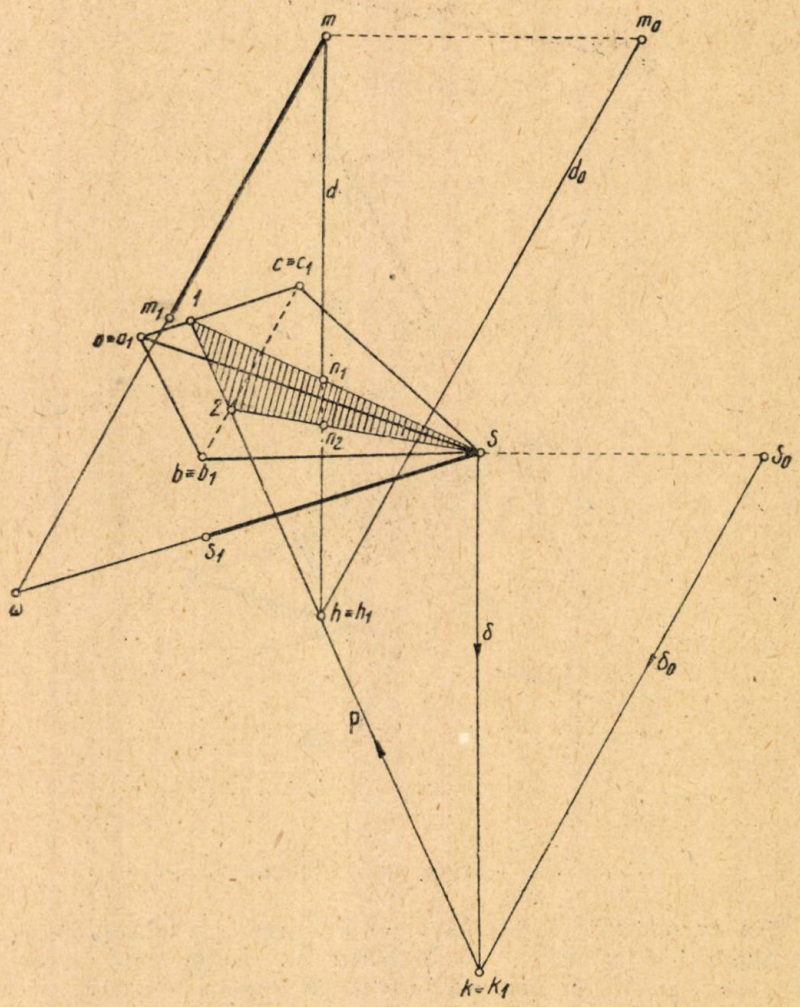


Fig. 13

rallele Δ zu der durch die Pyramidenspitze geführten Geraden. Wir erhalten mit Leichtigkeit die Schnittpunkte n_1 und n_2 in der orthogonalen Projektion auf der Ebene π.

c) *Schnitt zwischen einer Geraden und einem Prisma.* Es seien d, (m, m_1), $h \equiv h_1$ die gegebene Gerade (Fig. 14) und das Prisma ABC,

(r, r_1). Wir konstruieren durch den Punkt M die Parallele Δ zu den Kanten des Prismas. Wir erhalten die Hilfsebene P und die Schnittpunkte n_1 und n_2 in orthogonaler Projektion auf die Ebene π.

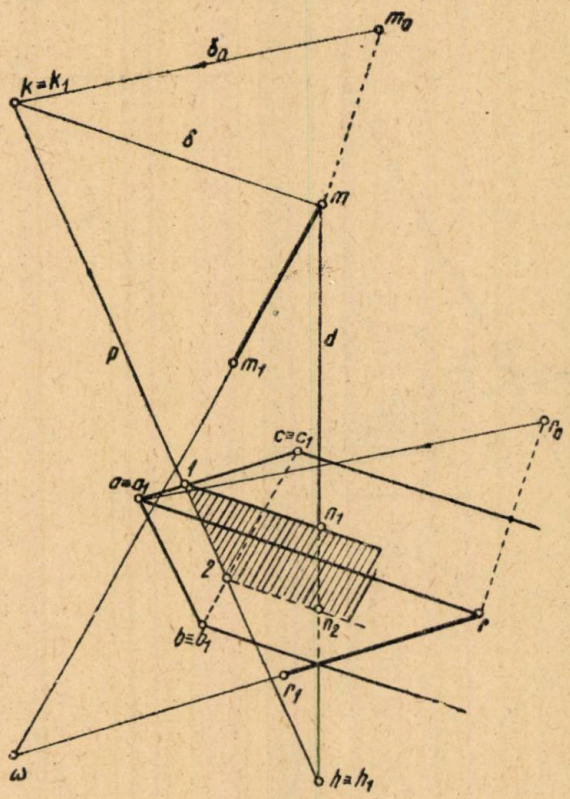


Fig. 14

VI. Kurven und Flächen

a) *Die zylindrische Schraube* kann in diesem achsialen Projektionssystem durch die achsialen Projektionen b_1, c_1, e_1 usw., oder durch b_2, c_2, e_2 usw. nach der den Projizierenden zugewiesenen Richtung. Es ergibt sicht, daß die achsiale Projektion der zylindrischen Schraube eine Spirale ist, welche den Gang in jedem Punkt auf der dargestellten Ebene definiert.

b) *Rotationshyperboloid mit einer Schale.* Wenn die Rotationsachse des Hyperboloids mit der Achse des Projektionssystems zusammenfällt, erhalten wir eine einfache Darstellung, wo (c) die orthogonale Projektion des Ringes, während (t, t_1) der Tangentenpunkt mit dem Ring der Spurerzeuger $h \equiv h_1$.

Wenn die Rotationsachse ω_1 des Hyperboloids verschieden ist von der Achse des Projektionssystems Ω (ω) erhält man die Darstellung (Fig. 15) in welcher auch die Spur T der im Punkte (m, m_1) zum Hyperboloid tangentialen Ebene bestimmt wurde. Es folgt daraus m, $m_1 = t_1\overline{m}$.

Ebenso in dieser Hypothese, betreffend die beiden Achsen konstruieren wir gemäß dem Lehrsatz Rouche's in diesem achsialhelikoidalen

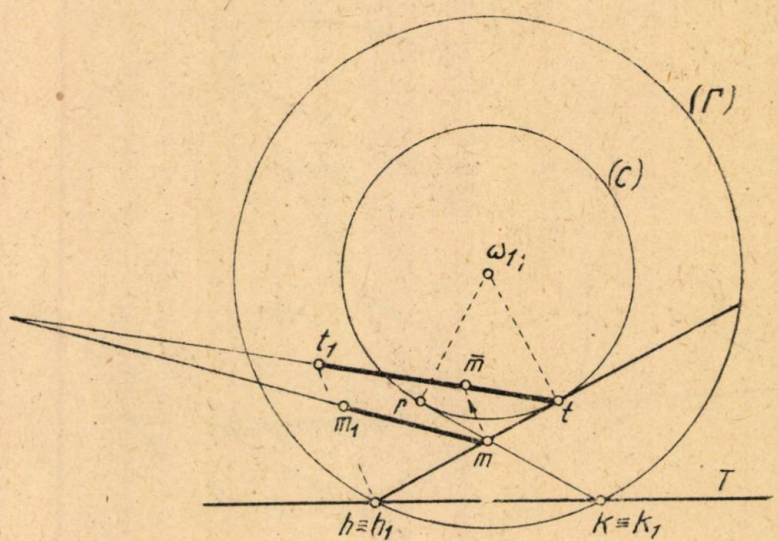


Fig. 15

Projektionssystem — den Schnitt zwischen einer Geraden d, (a, a_1), $k \equiv k_1$ und einem Rotationshyperboloid mit einer Schale (Fig. 16).

Es sei (c) der Ring und (t, t_1), $h \equiv h_1$ einer von den Erzeugern des Hyperboloids.

Stellen wir mit der gegebenen Geraden einen Rotationshyperboloid her, welcher dieselbe Symmetrieebene mit dem gegebenen ersten Hyperboloid und parallele Achsen haben soll. Der Abstand dieser Symmetrieebene ist tt_1, so daß wir $a_1\overline{b} = tt_1$ annehmen, woraus sich b ergibt. Unter diesen Bedingungen kann ω_2 willkürlich angenommen werden.
Die beiden Ringe (C) und (C') in der Symmetrieebene haben die Punkte 1 und 2 gemeinsam.

Betrachten wir einen willkürlich angenommenen Punkt m auf der Erzeugerin des gegebenen Hyperboloids und schneiden wir die zwei Oberflächen mit einer zur darstellenden Ebene parallelen Ebene geführt zum Abstand des Punktes m. Wir erhalten den Abstand $t_1\overline{m} = \overline{ca_1}$, somit den Punkt c und folglich haben die beiden Parallel (Γ) und (Γ') die Punkte 3 und 4 gemeinsam.

Der Schnittkegel zwischen den beiden Hyperboloiden wird auf die darstellende Ebene π nach dem Kreis (ε) mit dem Mittepunkt ω_3, welcher Kreis durch die Punkte 1, 2, 3 und 4 geht.

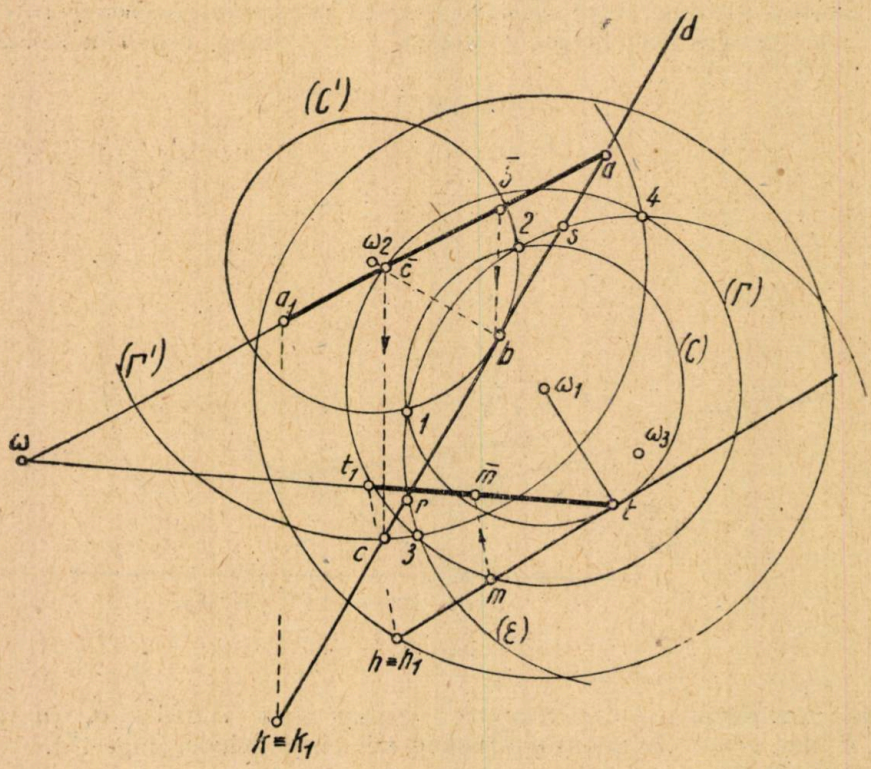


Fig. 16

Dieser Kreis schneidet die gegebene Gerade in den gesuchten Punkten r und s, deren Abstände mit Leichtigkeit bestimmt werden können.

Katheder der darstellende Geometrie
Polytechnisches Institut Bukarest

LITERATUR

1. *Botez Șt. Mihail* — Sur une simplification de l'epure Monge Bull. Inst. pol. Buc. Tom. XXI Fasc. 4, 1959.
2. *Botez Șt. Mihail* — Asupra unei epure de tip Monge cu diedru fundamental oarecare, 1963 (manuscris).
3. *Botez Șt. Mihail* — Sur une nouvelle maniére de représenter l'espace linéaire. Bull. Inst. pol. Buc. Tom. XXIII, Fasc. 3, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

MECANICĂ

C.Z : 622.35 : 622.276.51

REZULTATELE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL CIOCNIRILOR. ROCI POROASE CU ÎNFILTRARE DE PETROL.

GABRIELA ȚIȚEICA

Introducere

În anii din urmă, m-am ocupat de determinarea absorbției prin capilaritate, în materialele poroase.

Am arătat metoda, [4] bazată pe ecuația lui Kozeny, prelucrată de Porhaev [2], din care se deduce raza medie echivalentă a capilarelor materialului poros, presupus compus dintr-un fascicol de tuburi capilare. În rezumat, metoda necesită citirea ridicării frontului lichidului în materialul poros, ținut în vas închis, pentru a avea atmosfera saturată cu vaporii lichidului, materialul fiind tangent la lichid. Prin cronometrarea acestei ridicări se capătă o curbă $l = f(t)$ (*1*) unde l = înălțimea lichidului, t=timpul necesar ridicării la această înălțime. S-a arătat că [1] este de forma $l = K\sqrt{t}$, adică $l = f(\sqrt{t})$ este o dreaptă. Cunoscînd η=vîscozitatea lichidului și σ=tensiunea sa superficială, se determină r=raza capilară a unui sistem de tuburi capilare echivalent cu porii materialului dat. Această rază se determină în general prin citiri în apă.

Am arătat în lucrări precedente că rezistența materialului depinde de această rază capilară [4] [5].

Cu ajutorul unui aparat, a cărui descriere și schemă e dată mai jos, (fig. 1) s-au executat o serie de încercări asupra rocelor cu porii plini cu aer, apă sau apă sărată în diferite grade de salinitate [6]. În lucrarea de față se studiază înfiltrările de petrol.

Montaj experimental

În principiu, aparatul este format din două pendule identice suspendate astfel încît :

1. — Frecarea să fie minimă la axul de oscilație.

Pentru aceasta axul a fost făcut liber suspendat pe 2 puncte, suprafața de contact fiind în lamă tăietoare și deci redusă la o curbă de contact.

---

* Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

2. — Suspensiile pot fi deplasate astfel încît distanța dintre ele poate fi mărită sau micșorată, conform cu mărimea exemplarului de rocă studiat.

3. — Suspensiile pot fi ridicate pentru ca contactul la ciocnire să coincidă cu centrul de greutate al suprafeței secțiunii rocei.

Pendulele sînt formate dintr-o bară de oțel de $l=30$ cm lungime și $d=0{,}5$ cm diametru, avînd la capăt o sferă de oțel de rază $R=1$ cm de care e sudată o placă de 3 cm latură și 0,5 cm grosime, care lovește roca.

Ciocnirea se face astfel încît placa în momentul căderii să fie verticală și în contact cu toată suprafața secțiunii rocii, astfel încît undele de șoc produse să fie unde plane, iar nu unde sferice cu posibilități de reflectare, de pe marginile rocii cum ar fi cazul unei ciocniri punctiforme între sfera pendulului și secțiunea pătrată a rocii.

Lungimea pendulului, dimensiunile sferei și a plăcii, precum și a unui mic cilindru sudat între bară și sferă au fost calculate astfel încît lungimea pendulului matematic sincron cu acest pendul să coincidă cu distanța centrului suprafeței de ciocnire la punctul de oscilație. În acest mod nu avem percusie, cu pierdere de energie la punctul de oscilație.

Am calculat astfel notînd : M_s — masa sferei ; M_b — masa barei ; M_p — masa plăcii ; M_i — masa inelului cilindric ; L — lungimea barei ; R — raza sferei ; a — latura plăcii ; r — raza cilindrului ; h — înălțimea cilindrului ; I_A — momentul de inerție în raport cu centrul de oscilație.

$$I_{A\ sferă} = \frac{2}{5} M_s R^2 + M_s (R + l + h)^2$$

$$I_{A\ bară} = \frac{M_b l^2}{3}$$

$$I_{A\ placă} = \frac{M_p a^2}{6} + M_p (R + l)^2$$

$$I_{A\ inel} = \frac{M_i l^2}{4} + M_i l^2$$

$$I_{A\ total} = 1{,}56 \text{ gr. m. sec}^2$$

În relația lungimii l_0 a pendulului simplu sincron avem :

$$l_0 = \frac{I_A}{M_{total}\, \bar{y}}$$

$\bar{y}$ fiind centrul de greutate al pendulului fizic

$$M_{total}\, \bar{y} = M_s (R + l + h) + M_b \frac{l}{2} + M_p (R + l + h) + M_i l = 5{,}2.$$

Deci

$$l_0 = \frac{1{,}56}{5{,}2} = 0{,}3 \text{ m.}$$

Pentru a nu avea percusie în centrul de oscilație trebuie ca $l_0 = 0{,}315$ m. Aproximația este suficientă pentru impulsurile care vor interveni.

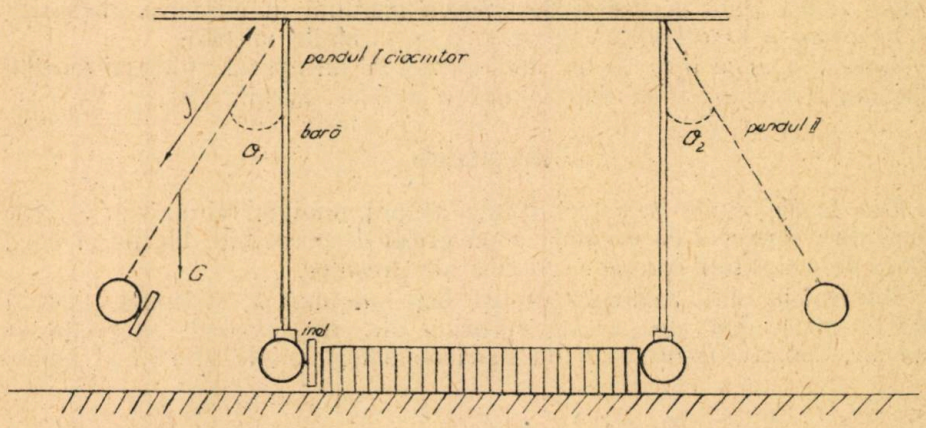


Fig. 1

Pendulul I se lansează de sub un unghi θ_1. Declanșarea se face prin arderea unui fir care suspendă pendulul I sub un θ_1 dat. Ciocnirea se face între placă și rocă, se transmit undele de impuls prin rocă la pendulul II care se va ridica sub un unghi θ_2.

Eșantionul de rocă este susținut pe un leagăn de fire între cele 2 pendule, iar θ_1 se ia $\theta_1 = 60^0$.

Pendulele fiind identice, energiile vor fi :

La pendulul I.

$$G\bar{y}(1 - \cos\theta_1) = I_A \frac{\omega_1^2}{2}.$$

Energia E_1 primită de rocă $= G\bar{y}\ (1 - \cos\theta_1) = \frac{G}{2}\bar{y}$ pentru $\theta_1 = 60^0$.

La pendulul II.

$$-G\bar{y}(1 - \cos\theta_2) = -I_A \frac{\omega_2^2}{2}.$$

Deci E_2 dat de rocă pendulului II

$$E_2 = G\bar{y}(1 - \cos\theta_2).$$

Energia pierdută în rocă este $E_1 - E_2$.

Raportul

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 - \cos \theta_1}{1 - \cos \theta_2}$$

iar energia pierdută în rocă este:

$$\Delta E = E_1 - E_1' - E_2.$$

Ar mai trebui ținut seama și de energia pierdută în mișcarea epruvetei, dar mișcarea e foarte mică comparativ cu celelalte mișcări.

Cînd voi putea trece la un studiu exact cu un aparat mult mai sensibil voi căuta și un mijloc de determinare a acestei energii.

Rezultatele

Din foarte multe încercări făcute asupra unui mare număr de roce sedimentare dau aici ca exemple două gresii de porozități diferite și două calcare de porozități apropiate cu cele ale gresiilor.

Epruvetele sînt bastoane de 24 cm lungime și secțiunea pătrată (14×14 mm). Am ales aceste epruvete din materiale cît se poate de omogene, deoarece binecunoscuta lipsă de omogeneitate în roci și anizo-

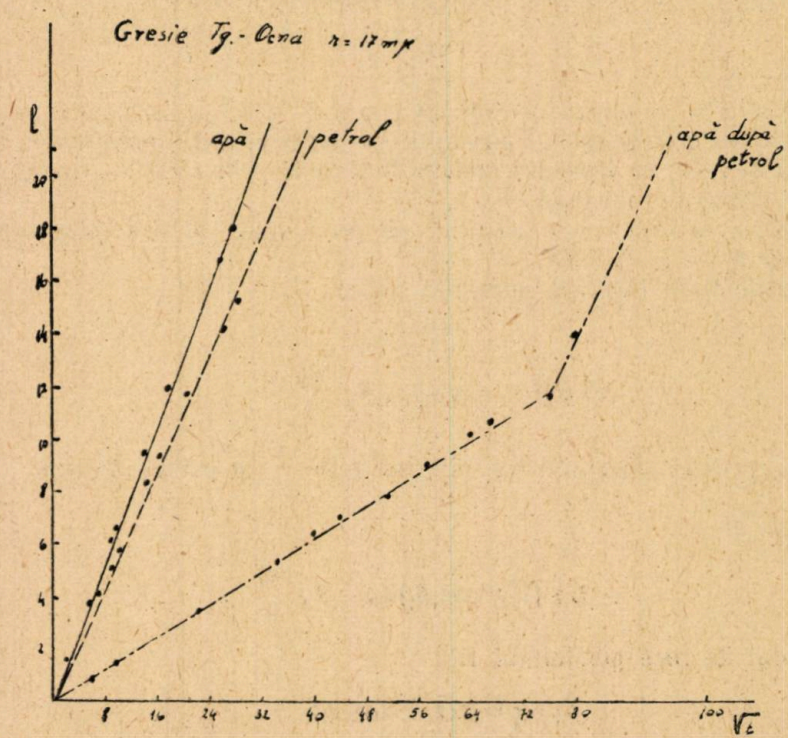


Fig. 2

tropia mineralelor sînt complicații în studiul proprietăților elastice ale lor.

Totuși o izotropie și omogeneitate statistică este atinsă în multe roci cu granule fine precum cele de mai sus. Omogeneitatea am putut-o verifica din dreapta $l=f(\sqrt{t})$. În cazul cînd diagrama acestei relații se îndepărtează de la o dreaptă în punctul în care apare îndepărtarea există o lipsă de omogeneitate.

Bastoanele a căror rezultate se dau mai jos sînt din rocile următoare :

Gresie Tg.-Ocna I $r = 17$ mμ
Gresie Tg.-Ocna II $r = 4{,}8$ mμ
Calcar Cernavoda $r = 18$ mμ
Calcar Băschioi $r = 6{,}6$ mμ

Infiltrarea petrolului

Epruvetele studiate și cărora li s-a determinat raza prin citire în apă (diagrama I și II curbele pe care se scrie *apă*) se usucă la etuvă și se introduc într-un vas cu petrol, de asemenea tangente la petrol. Pentru

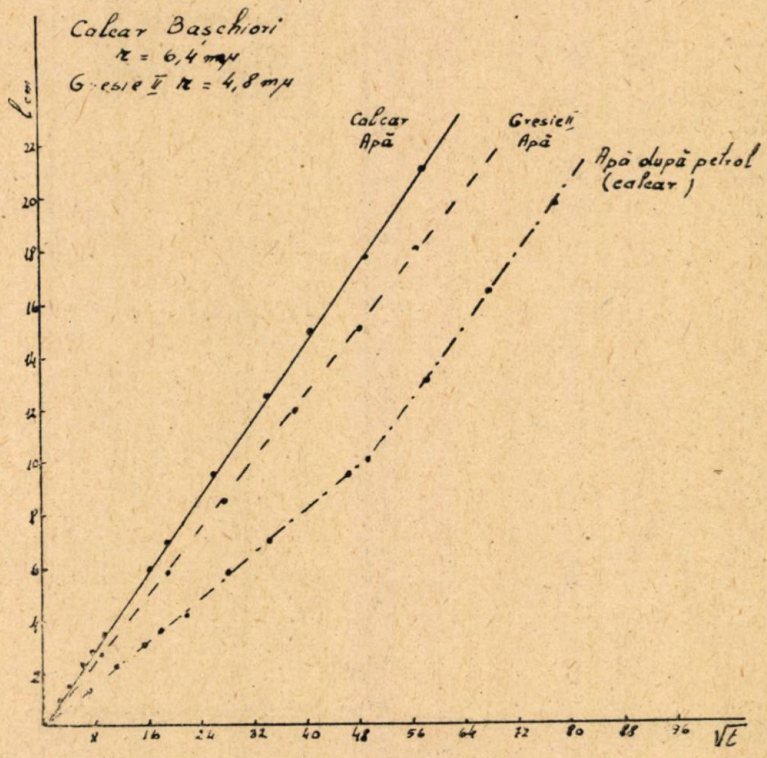


Fig. 3

primele încercări am ales petrolul rafinat din comerț, pentru a nu avea elemente cu parafină. În aceleași diagrame este trasată curba ridicării petrolului. După ce petrolul a urcat, umplînd complet epruveta, aceasta se introduce iarăși într-un vas cu apă, tangent la apă (diagrame, curbe pe care e notat *apă după petrol*) (fig. 2—3). Frontul ridicării apei e foarte vizibil peste fondul mai închis al petrolului. Se constată că apa împinge petrolul destul de încet la început, iar apoi mișcarea devine mult mai rapidă, cam de la jumătatea epruvetei, iar pe ultima treime curba e mult mai abruptă, cu o pantă între cea a apei și a petrolului.

Ciocnirile

Aceste epruvete au fost supuse la ciocniri atît cînd erau pline cu apă curată, pline de petrol, și în diferite stadii ale ridicării frontului de apă peste petrol, determinîndu-se $\frac{\Delta E}{E_1}$ (figura 3). Se constată că cu cît

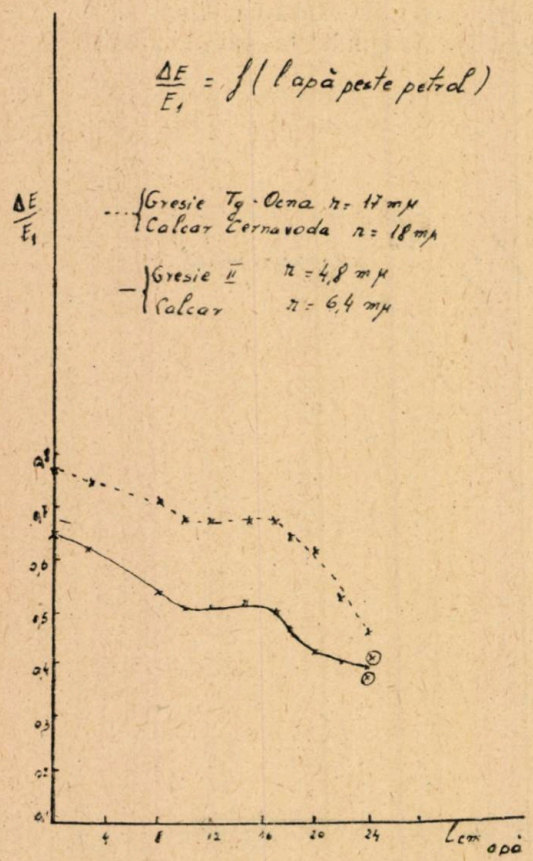


Fig. 4a

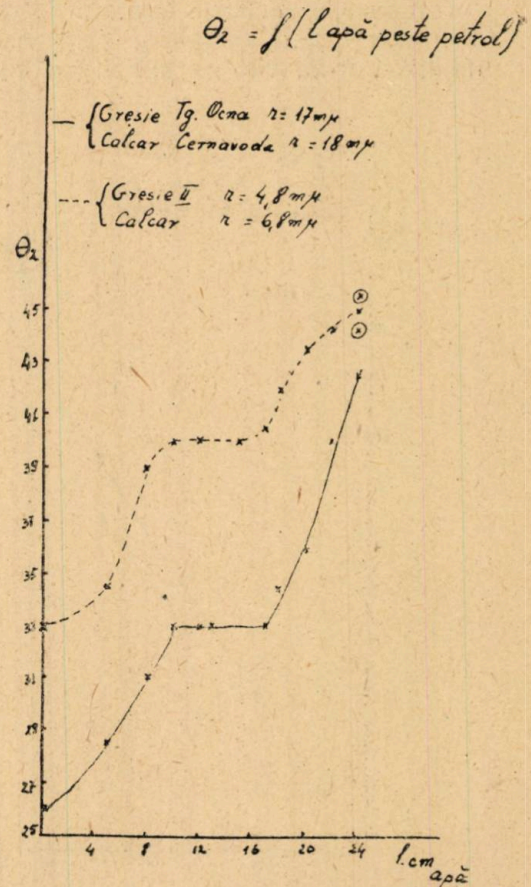


Fig. 4b

este mai multă apă $\frac{\Delta E}{E_1}$ scade. De asemenea $\frac{\Delta E}{E_1}$ este mai mic cînd porozitatea rocii e mai mică (6).

Concluzii. Pierderea de energie $\frac{\Delta E}{E_1}$ depinde în special de raza porilor și de lichidul din ele, și mai puțin de materialul rocii. Aceasta s-ar putea explica prin ipotezele lui Terzaghi [3] asupra tasării și consolidării care arată că efortul prim e luat de apa interstițială (deci depinde de natura lichidului și de cantitatea sa adică de porozitate) și numai în al doilea rînd apare efortul dat de elementul solid al rocelor. De asemenea materialul solid e mult mai elastic decît fluidul și deci pierderile de energie în el sînt mult mai mici.

În lucrările viitoare, voi căuta să arăt pierderea de energie în funcție de modulul de compresibilitate al fluidului din pori.

De asemenea din studiul curbelor $l=f(\sqrt{t})$ ale apei introduse peste petrol am constatat că concavitatea în sus care există între 10—15 cm ar coincide cu palierul de la curbele $\frac{\Delta E}{E_1}=f$ (lungime de apă). [1].

Voi căuta prin studiul ecuației diferențiale a mișcării, ținînd seama de greutatea în scădere a petrolului, să determin relațiile matematice date experimental de aceste diagrame.

Se mai constată că pierderea de energie în materialul plin cu apă curată este mai mică decît în materialul plin cu apă după ce a fost deplasat petrolul. Acest lucru ar indica o rămînere a petrolului ca o învelitoare pe granule și deci faptul că apa nu poate deplasa complet tot petrolul.

Catedra de mecanică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *V. J. Riznicenko:* Seismoakustische Metoden zur Untersuchung von Gesteinen. Freiberge Forschungsheft. C. 81. 1960.
2. *P. Szengyörgy:* Mișcarea lichidelor prin materiale poroase. Rev. Chimie nr. 11, 1955.
3. *W. Taylor:* Fundamentals of soil mechanics. Edit. Wiley, N-York 1948.
4. *G. Țițeica:* Proprietăți mecanice ale rocilor tari etc. D. S. Com. Geol. XLVII (1959—60).
5. *G. Țițeica:* Comportarea rocilor tari la infiltrarea salină. D. S. Com. Geol. XLIX (1961—62).
6. *M. R. T. Wyllie, A. R. Gregory:* Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. Geophysics XXI 1956.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

C.Z : 663.5

URCAREA ÎN TIMP MINIM A RACHETELOR CU MAI MULTE TREPTE *)

AL. MARINESCU, C. GUȚĂ

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat problema urcării în timp minim pe o traiectorie plană a unei rachete cu o singură treaptă.

In lucrarea de față vom extinde metoda din lucrarea sus menționată pentru rachete cu mai multe trepte.

Inainte de a trece la calcule este cu totul indicat să facem cîteva precizări și să arătăm ipotezele care stau la baza acestei generalizări.

Vom considera că racheta are n trepte numerotate în ordinea desprinderii lor prin $k = 1,2...n$, astfel încît racheta după desprinderea a k-1 trepte o vom numi de ordin k, avînd masa M_k definită de relația :

$$M_k = M_t - \sum_{i=0}^{k-1} M_i$$

unde M_t este masa totală (cu toate treptele)

Deasemeni porțiunea activă a traiectoriei va conține k porțiuni, astfel încît durata de mișcare pe porțiunea k va coincide cu timpul de ardere a treptei k.

Vom ține seama de efectul forțelor aerodinamice numai pentru zborul cu prima treaptă (propulsia cu motorul primei trepte) iar începînd cu treapta a doua le vom neglija, ținînd seama însă de variația cu înălțimea a accelerației gravitației.

Pentru zborul cu motorul treptei a întîia vom considera ecuațiile de mișcare în direcția tangentei la traiectorie și pe normală (fig. 1) sub forma :

$$M_1 \frac{dV_1}{dt} = T_1 \cos \alpha - R - M_1 g \sin \theta_1 \qquad (1)$$

$$M_1 V_1 \frac{d\theta_1}{dt} = P - M_1 g \cos \theta_1 + T_1 \sin \alpha .$$

*) Manuscris predat la redacție, la 20 octombrie 1964.

Introducînd variabila z și ținînd seama că:

$$\frac{dz}{dt} = w_1 = V_1 \sin \theta_1$$

$$T_1 = -C_1 \frac{dM_1}{dt} = -C_1 \frac{dM_1}{dz} w_1$$

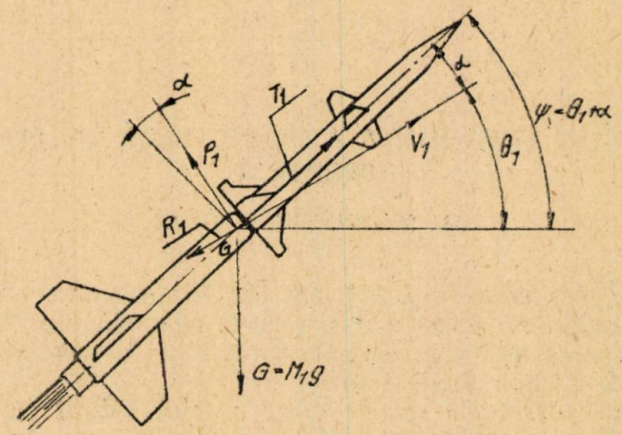


Fig. 1

cu aproximația $\cos \alpha \simeq 1$, $\sin \alpha \simeq \alpha$ ecuațiile (1) devin:

$$\Phi_{11} = M_1 \frac{dV_1}{dz} w_1 + C_1 \frac{dM_1}{dz} w_1 + R + M_1 g \sin \theta_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\Phi_{21} = M_1 V_1 \frac{d\theta_1}{dz} w_1 - P + M_1 g \cos \theta_1 + C_1 \frac{dM_1}{dz} w_1 \alpha = 0.$$

Deci notînd cu:

$$F_1 = f_1 + \lambda_{11} \Phi_{11} + \lambda_{21} \Phi_{21} \qquad (3)$$

unde $f_1 = \dfrac{1}{V_1 \sin \theta_1}$ iar λ_{11} și λ_{21} multiplicatorii lui Lagrange, problema variațională revine la a găsi minimul necondiționat al integralei:

$$I_1 = \int_{z_0}^{z_1} (f_1 + \lambda_{11} \Phi_{11} + \lambda_{21} \Phi_{21})\, dz. \qquad (4)$$

În lucrarea [2] au fost deduse în prima aproximație, expresiile extremalelor $V_1^{(1)} \dots \lambda_{21}^{(1)}$ în cazul rachetei cu o singură treaptă și în ipoteza că viteza de scurgere a gazelor din ajutaj este constantă în altitudine.

În prezenta lucrare în afară de considerarea rachetei cu mai multe trepte, vom admite și o variație lineară cu altitudinea a vitezei de

scurgere $C_k = C_{k-1} + \beta_k z$. Pentru prima treaptă, la start $k = 1$ și deci $C_{k-1} = C_0 \neq 0$. Aceasta după cum vom vedea, modifică forma extremalelor problemei (vezi referința [2]).

Ecuațiile diferențiale ale extremalelor (5), redate mai jos, au fost stabilite pornind de la ecuațiile lui Euler din calculul variațional, admițînd că rezistența la înaintare și portanța (vezi referința [1]) sînt date de relații de forma :

$$R = \varrho(z)\,\bar{R}_0 \quad ; \quad P = \varrho(z)\,\bar{P}_0$$

și

$$\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)_{V=V_0} = \varrho(z)\,\bar{R}_{V_0} \; ; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{V=V_0} = \varrho(z)\,\bar{P}_{V_0}$$

$$\frac{dV_1^{(1)}}{dz} = \alpha_1 + \alpha_2\,\varrho(z) + \frac{\alpha_3}{z} + \alpha_4\,\frac{\varrho(z)}{z}$$

$$\frac{d\theta_1^{(1)}}{dz} = \beta_1 + \beta_2\,\varrho(z) + \frac{\beta_3}{z} + \beta_4\,\frac{\varrho(z)}{z}$$

$$\frac{dM_1^{(1)}}{dz} = \frac{\gamma_3}{z} + \gamma_4\,\frac{\varrho(z)}{z} + \frac{\gamma_5}{z^2} + \gamma_6\,\frac{\varrho(z)}{z^2} \tag{5}$$

$$\frac{d\lambda_{11}^{(1)}}{dz} = \delta_1 + \delta_2\,\varrho(z) + \frac{\delta_3}{z} + \delta_4\,\frac{\varrho(z)}{z} + \delta_5\,\frac{1}{z^2} + \delta_6\,\frac{\varrho(z)}{z^2}$$

$$\frac{d\lambda_{21}^{(1)}}{dz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,\varrho(z) + \frac{\varepsilon_3}{z} + \varepsilon_4\,\frac{\varrho(z)}{z} + \frac{\varepsilon_5}{z^2} + \varepsilon_6\,\frac{\varrho(z)}{z^2}$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{L_1}{\bar{Z}_2} \; ; \quad \alpha_2 = \frac{L_2}{\bar{Z}_2} \; ; \quad \alpha_3 = \frac{L_3}{\bar{Z}_2} \; ; \quad \alpha_4 = \frac{L_4}{\bar{Z}_2}$$

$$L_1 = \frac{1}{V_{10}^2 \sin\theta_{10}} + (1-\alpha)\,\lambda_{110}\,\frac{M_{10}\,g}{V_{10}}\cos\theta_{10} + \frac{\alpha}{V_{10}^2 \sin\theta_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10} +$$

$$+ 2\,\frac{\lambda_{210}}{V_{10}}\,M_{10}\,g\operatorname{ctg}\theta_{10} + 4\,\frac{\lambda_{210}\,\alpha\,M_{10}\,g}{V_{10}}\sin\theta_{10} + \lambda_{110}\,\frac{\alpha\,M_{10}\,g}{V_{10}}\cos\theta_{10} +$$

$$+ \frac{\lambda_{210}\,\alpha\,M_{10}\,g}{V_{10}}\cos\theta_{10}\operatorname{ctg}\theta_{10} + 2\,\frac{\lambda_{210}\,\alpha^2}{V_{10}}\,M_{10}\,g\cos\theta_{10}$$

$$\bar{Z}_2 = \lambda_{110}\,\alpha\,M_{10}\sin\theta_{10} - \lambda_{110}\,\alpha\,M_{10}\cos\theta_{10}$$

$$L_2 = \frac{\lambda_{110}}{V_{10}}\,R_0 - 2\,\frac{\lambda_{210}}{V_{10}}\,\bar{P}_0 - \lambda_{110}\,\bar{R}_{V_0} + \lambda_{210}\,\bar{P}_{V_0} - \lambda_{210}\,\frac{\alpha}{V_{10}}\,\bar{R}_0 +$$

$$+ \lambda_{110}\,\frac{\alpha}{V_{10}}\,\bar{R}_0\operatorname{ctg}\theta_{10} - \lambda_{210}\,\frac{\alpha}{V_{10}}\,\bar{P}_0\operatorname{ctg}\theta_{10}$$

$$L_3 = 2\lambda_{110}\frac{M_{10}g}{\beta_k}\sin\theta_{10} - \lambda_{110}M_{10}V_{10}\sin\theta_{10} - \lambda_{210}\alpha M_{10}V_{10}\sin\theta_{10}$$

$$L_4 = -\lambda_{110}\frac{R_0}{\beta_k} + \lambda_{210}\frac{\bar{P}_0}{\beta_k}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha g}{V_{10}^2} - \frac{g}{V_{10}^2}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \frac{\alpha}{V_{10}}\alpha_1$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{P}_0}{M_{10}V_{10}^2\sin\theta_{10}} + \frac{\alpha\bar{R}_0}{M_{10}V_{10}^2\sin\theta_{10}} + \frac{\alpha}{V_{10}}\alpha_2$$

$$\beta_3 = \frac{\alpha}{V_{10}}\alpha_3 \quad ; \quad \beta_4 = \frac{\alpha}{V_{10}}\alpha_4$$

$$\gamma_1 = 0 \quad ; \quad \gamma_2 = 0 \quad ; \quad \gamma_3 = -\frac{M_{10}}{\beta_k}\alpha_1$$

$$\gamma_4 = -\frac{M_0}{\beta_k}\alpha_2 \quad ; \quad \gamma_5 = -\frac{M_{10}}{\beta_k}\alpha_3 \quad ; \quad \gamma_6 = -\frac{M_{10}}{\beta_k}\alpha_4 \tag{6}$$

$$\delta_1 = \lambda_{110}\frac{g}{V_{10}^2}\operatorname{ctg}^2\theta_{10} - \lambda_{110}\frac{\alpha g}{V_{10}^2} + \frac{\alpha}{M_{10}V_{10}^3\sin^2\theta_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \lambda_{210}\frac{\alpha g}{V_{10}^2} +$$

$$+ \lambda_{210}\frac{\alpha^2 g}{V_{10}^2}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \lambda_{210}\frac{\alpha^2 g}{V_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \lambda_{210}\frac{\alpha g}{V_{10}^2}\operatorname{ctg}^2\theta_{10} + \alpha_1 Y_2$$

$$\bar{Y}_2 = -\frac{\lambda_{110}}{V_{10}} - \lambda_{110}\frac{\alpha}{V_{10}} + \lambda_{210}\frac{\alpha}{V_{10}}$$

$$\delta_2 = -(\lambda_{110} + \alpha\lambda_{210})\frac{P_0}{M_{10}V_{10}^2\sin\theta_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \alpha_2 Y_2$$

$$\delta_3 = \lambda_{110}\frac{g}{\beta_k V_{10}} - \lambda_{110} - \lambda_{210}\alpha + \lambda_{110}\frac{\alpha}{\beta_k} + \alpha_3 Y_2$$

$$\delta_4 = \lambda_{210}\frac{\bar{P}_0}{\beta_k M_{10}V_{10}\sin\theta_{10}} + \lambda_{110}\frac{\alpha_2}{\beta_k} + \alpha_4 Y_2$$

$$\delta_5 = \lambda_{110}\frac{\alpha_3}{\beta_k} \quad ; \quad \delta_6 = \lambda_{110}\frac{\alpha_4}{\beta_k}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{M_{10}V_{10}^3\sin^2\theta_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10} + \lambda_{110}\frac{g}{V_{10}^2}\operatorname{ctg}\theta_{10} -$$

$$- \lambda_{210}\frac{\alpha}{V_{10}}\alpha_1\operatorname{ctg}\theta_{10} - \lambda_{210}\frac{g}{V_{10}^2} - 2\lambda_{210}\frac{\alpha_1}{V_{10}}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{V_{10}}(2\lambda_{110}\operatorname{ctg}\theta_{10} + 2\lambda_{210} + \lambda_{210}\alpha\operatorname{ctg}\theta_{10})\alpha_2$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\lambda_{210}}{V_{10}}(\alpha\operatorname{ctg}\theta_{10} + 2)\alpha_3 + \lambda_{210}\frac{\alpha_1}{\beta_k}$$

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{2}{V_{10}} - \frac{\alpha}{V_{10}}\operatorname{ctg}\theta_{10}\right)\lambda_{210}\alpha_4$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\lambda_{210}}{\beta_k}\alpha_3$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\lambda_{210}}{\beta_k}\alpha_4 .$$

Avînd valoarea tuturor parametrilor în momentul inițial al lansării, putem integra ecuațiile (5) și determina extremalele funcțiilor căutate pentru zboruri cu prima treaptă.

Astfel, considerînd variația densității în altitudine dată de relația:

$$\varrho(z) = \varrho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}}$$

$\left(\text{unde } z_{00} = 7170 \text{ și } \varrho_0 = 0{,}125 \text{ kg } \frac{s^2}{m^4}\right)$, obținem în primă aproximație:

$$V_1^{(1)} = V_{10} - \left(\alpha_1 z_0 - \alpha_2 z_{00}\varrho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \alpha_1 z -$$

$$- \alpha_2 z_{00}\varrho_0 e^{-\frac{z}{z_0}} + \alpha_3 \ln\frac{z}{z_0} +$$

$$+ \alpha_4\varrho_0\left[Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) - Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right)\right]$$

$$\theta_1^{(1)} = \theta_{10} - \left(\beta_1 z_0 - \beta_2 z_{00}\varrho_0 e^{-\frac{z_0}{z_0}}\right) + \beta_1 z - \beta_2 z_{00}\varrho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}} +$$

$$+ \beta_3 \ln\frac{z}{z_{00}} + \beta_4\varrho_0\left[Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) - E_i\left(-\frac{z}{z_{00}}\right)\right]$$

$$M_1^{(1)} = M_{10} + \gamma_3 \ln\frac{z}{z_0} + \gamma_5\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z}\right) - \gamma_6\varrho_0\left(\frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z} - \frac{e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}}{z_0}\right)$$

$$+ \varrho_0(\gamma_4 - \gamma_6)\left[Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) - Ei\left(-\frac{z_0}{z_{00}}\right)\right] \qquad (7)$$

$$\lambda_{11}^{(1)} = \lambda_{110} - \left(\delta_1 z_0 - \delta_2 z_{00} \varrho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \delta_1 z -$$

$$- \delta_2 z_{00} \varrho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}} + \delta_3 \ln \frac{z}{z_0} + \delta_5 \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z}\right) -$$

$$- \delta_6 \varrho_0 \left(\frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z} - \frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z_0}\right) +$$

$$+ \varrho_0 (\delta_4 - \delta_6) \left[Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) - Ei\left(-\frac{z_0}{z_{00}}\right)\right]$$

$$\lambda_{21}^{(1)} = \lambda_{210} - \left(\varepsilon_1 z_0 - \varepsilon_2 z_{00} \varrho_0 e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}\right) + \varepsilon_1 z -$$

$$- \varepsilon_2 z_{00} \varrho_0 e^{-\frac{z}{z_{00}}} + \varepsilon_3 \ln \frac{z}{z_0} + \varepsilon_5 \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z}\right) -$$

$$- \varepsilon_6 \varrho_0 \left(\frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z} - \frac{e^{-\frac{z_0}{z_{00}}}}{z_0}\right) +$$

$$+ \varrho_0 (\varepsilon_4 - \varepsilon_6) \left[Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) - Ei\left(-\frac{z_0}{z_{00}}\right)\right].$$

În expresiile (7) valoarea tuturor coeficienților și a parametrilor este cunoscută, urmînd a determina extremalele $V_1^{(1)}$, $\theta_1^{(1)}$, $M_1^{(1)}$, $\lambda_{11}^{(1)}$, $\lambda_{21}^{(1)}$ în funcție de o singură variabilă — altitudinea z.

Integrarea ecuațiilor (6) se face prin metode elementare și nu prezintă dificultăți.

În ceea ce privește funcția exponențială integrală $Ei\left(-\frac{z}{z_{00}}\right)$ ea apare integrînd funcția $\frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z}$ și se exprimă (vezi [6]) prin:

$$E_i\left(-\frac{z}{z_{00}}\right) = \int \frac{e^{-\frac{z}{z_{00}}}}{z} dz = C + \ln \frac{z}{z_{00}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \tag{8}$$

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n\right] = 0{,}5772$$

este constanta lui Euler. Menționăm că valorile funcției exponențiale integrale se găsesc în tabele.

În cazul cînd durata de zbor cu prima treaptă este mare și înălțimea atinsă în momentul desprinderii treptei este mai mare de 30 km., (la această altitudine valoarea accelerației gravitației față de cea admisă la sol, diferă cu 1%) atunci în formulele (6) se poate înlocui g prin expresia (18), fapt ce nu complică cu nimic rezolvarea problemei, apărînd însă în ecuațiile diferențiale ale extremalelor (5) încă un termen de forma $\frac{\text{const.}}{(R_0+z)^2}$ modificînd în consecință și extremalele (7).

Cu aceasta problema urcării în timp minim cu prima treaptă este soluționată.

Conform ipotezelor făcute începînd cu treapta a doua, forțele aerodinamice se neglijează, deci $P=R=0$, aproximație ce se utilizează în calcule balistice.

Neglijînd forțele aerodinamice putem adopta programul optim și anume: $\psi=\theta_1+\alpha=\text{const}$. Dar cum $P=0$ urmează că $\alpha=0$ sau $\alpha=\text{const}$ și în consecință $\theta_1=\text{const}$.

Ipoteza $P=0$ nu cere neapărat $\alpha=0$ (incidența rachetei), acest lucru fiind posibil cînd componenta normală pe traiectorie a greutății $M_k g\cos\theta_k$) este anulată de un motor auxiliar de comandă. Cînd această componentă este anulată prin înclinarea vectorului — tracțiune se înțelege că $\alpha\neq 0$, rămînînd însă în limite mici, deoarece înclinarea traiectoriei față de orizontală este mare, dar diferită de 90°. În plus, însăși tracțiunea poate fi variată ca mărime, încît realizarea traiectoriei rectilinii în urcare este perfect posibilă.

Considerînd traiectoria rectilinie, problema variațională se simplifică simțitor.

Deci pentru zborul rachetei de ordin k ($k\geqslant 2$) problema variațională constă în a găsi minimul necondiționat al integralei:

$$I_k=\int_{z_{k-1}}^{z_k} F_k\,dz=\int_{z_{k-1}}^{z_k}(f_k+\lambda_{1k}\Phi_{.k})\,dz$$

unde:

$$f_k=\frac{1}{V_k\sin\theta_k}$$

$$\Phi_{1k}=M_k\frac{dV_k}{dz}w_k+C_k\frac{dM_k}{dz}w_k+M_k g\sin\theta_k=0.$$

Ecuațiile lui Euler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_k}{\partial V_k}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_k}{\partial\left(\frac{dV_k}{dz}\right)}&=0\\ \frac{\partial F_k}{\partial M_k}-\frac{d}{dz}\frac{\partial F_k}{\partial\left(\frac{dM_k}{dz}\right)}&=0\end{aligned}\qquad(9)$$

și condiția :

$$\Phi_{1k} = 0$$

ne conduc la mărimile V_k, M_k, λ_{1k}, mărimi care caracterizează urcarea în timp minim pe porțiunea respectivă a traiectoriei.

Efectuînd calculele, ecuațiile lui Euler devin :

$$-\frac{1}{V_k^2 \sin\theta_k} + \lambda_{1k} M_k \frac{dV_k}{dz} \sin\theta_k + \lambda_{1k} C_k \frac{dM_k}{dz} \sin\theta_k$$

$$-\frac{d\lambda_{1k}}{dz} M_k V_k \sin\theta_k - \lambda_{1k} \frac{dM_k}{dz} V_k \sin\theta_k - \lambda_{1k} M_k \frac{dV_k}{dz} \sin\theta_k = 0$$

$$\lambda_{1k} \frac{dV_k}{dz} V_k \sin\theta_k + \lambda_{1k} g(z) \sin\theta_k - \frac{d\lambda_{1k}}{dz} C_k V_k \sin\theta_k -$$

$$-\lambda_{1k} \frac{dC_k}{dz} V_k \sin\theta_k - \lambda_{1k} C_k \frac{dV_k}{dz} \sin\theta_k = 0. \qquad (10)$$

Scoțînd din condiția :

$$\Phi_{1k} = 0$$

$$\frac{dM_k}{dz} = -\frac{M_k g(z)}{C_k V_k} - \frac{M_k}{C_k} \frac{dV_k}{dz} \qquad (11)$$

iar din a doua ecuație (10)

$$\frac{d\lambda_{1k}}{dz} = \frac{\lambda_{1k}}{C_k} \frac{dV_k}{dz} + \frac{\lambda_{1k}}{C_k V_k} g(z) - \frac{\lambda_{1k}}{C_k} \frac{dC_k}{dz} - \frac{\lambda_{1k}}{V_k} \frac{dV_k}{dz} \qquad (12)$$

și înlocuind expresiile (11) și (12) în prima ecuație (10) sîntem conduși la ecuația :

$$V_k^3 - \frac{\frac{C_k g}{dC_k}}{\frac{dz}{dz}} V_k - \frac{\frac{C_k}{dC_k}}{\frac{dz}{dz}} \frac{1}{\lambda_{1k} M_k \sin^2\theta_k} = 0 \qquad (13)$$

de unde neglijînd ultimul termen față de cel de al doilea obținem :

$$V_k \simeq 0 \quad \text{și} \quad V_k \simeq \pm \sqrt{\frac{\frac{C_k g}{dC_k}}{\frac{dz}{dz}}} = f(z) \qquad (14)$$

din care numai semnul plus din fața radicalului, corespunde unei situații fizic reale.

Notînd cu $V_k = f(z)$ care este funcție cunoscută, din ecuațiile (11) și (12) avem :

$$\frac{dM_k}{dz} + P(z)\, M_k = 0$$
$$\frac{d\lambda_{1k}}{dz} + Q(z)\, \lambda_{1k} = 0 \tag{15}$$

unde :

$$P(z) = \frac{g(z)}{C_k f(z)} + \frac{f'(z)}{C_k}$$
$$Q(z) = \frac{1}{C_k}\frac{dC_k}{dz} + \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(z)}{C_k} - \frac{g(z)}{C_k f(z)}. \tag{16}$$

De aici rezultă soluțiile :

$$M_k = M_{k-1}\, e^{-\int P(z)\, dz}$$
$$\lambda_{1k} = \lambda_{1(k-1)}\, e^{-\int Q(z)\, dz} \tag{17}$$

Menționăm că în cele ce urmează vom considera cîmpul gravitațional paralel, zborul efectuîndu-se la altitudini mari.

Explicitînd funcțiile $P(z)$ și $Q(z)$ din (16), unde admitem variația gravitației în altitudine dată de relația :

$$g(z) = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + z)^2} \tag{18}$$

(R_0=6370 km, fiind raza medie a Pămîntului și g_0=9,81 m/sec^2 accelerația gravitației la sol) obținem :

$$f(z) = \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}}\, \frac{R_0}{R_0 + z}\, (C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2}$$

iar :

$$f'(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}}\, R_0 \left[\frac{\beta_k R_0 - 2 C_{k-1}}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2} (R_0 + z)^2} - \frac{\beta_k z}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2} (R_0 + z)^2} \right]$$

Ca și în cazul primei trepte, vom admite și pentru treptele succesive o variație liniară a vitezei de scurgere a gazelor cu altitudinea ($C_k = C_{k-1} + \beta_k z$).

În acest caz funcțiile $P(z)$ și $Q(z)$ devin :

$$P(z) = R_0 \sqrt{g_0 \beta_k}\, \frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)} +$$
$$+ \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} \left[\frac{\beta_k R_0 - 2 C_{k-1}}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)^2} - \frac{\beta_k z}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)^2} \right] \tag{19}$$
$$Q(z) = \frac{\beta_k}{C_{k-1} + \beta_k z} + \frac{f'(z)}{f(z)} - P(z).$$

Se observă din (19) că determinarea funcțiilor $P(z)$ și $Q(z)$ nu prezintă dificultăți, integrarea fiind posibilă și ușor de efectuat (vezi [6]). Astfel :

$$I_1 = R_0 \sqrt{g_0 \beta_k} \int \frac{dz}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)} =$$

$$= -2R_0 \frac{\sqrt{g_0 \beta_k}}{\beta_k R_0 - C_{k-1}} \frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2}} - \frac{2R_0 \sqrt{g_0 \beta_k}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^{3/2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C_{k-1} + \beta_k z}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}}$$

$$I_2 = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} (\beta_k R_0 - 2C_{k-1}) \int \frac{dz}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)^2} =$$

$$= \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} (\beta_k R_0 - 2C_{k-1}) \left[\frac{1}{\beta_k R_0 - C_{k-1}} \frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2} (R_0 + z)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3\beta_k}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^2} \cdot \frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2}} - \frac{3\beta_k}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^{3/2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C_{k-1} + \beta_k z}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}} \right]$$

$$I_3 = -\frac{R_0}{2} \sqrt{g_0 \beta_k} \int \frac{z\,dz}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} (R_0 + z)^2} =$$

$$= \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} \frac{(C_{k+1} + \beta_k z)^{3/2}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})(R_0 + z)} + \frac{R_0 \sqrt{g_0 \beta_k}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^{3/2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C_{k-1} + \beta_k z}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}} +$$

$$+ R_0 \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} \frac{C_{k-1}}{\beta_k R_0 - C_{k-1}} \cdot \frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2} (R_0 + z)} +$$

$$+ \frac{3}{2} R_0 \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} \frac{C_{k-1}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^2} \cdot \frac{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2}}{R_0 + z} +$$

$$+ \frac{3}{2} R_0 \frac{\sqrt{g_0 \beta_k}\, C_{k-1}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^{5/2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C_{k-1} + \beta_k z}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}}.$$

Grupînd termenii în mod corespunzător, obținem :

$$\int P(z)\,dz = \frac{A}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2}} + \frac{B}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{1/2} (R_0 + z)} + C \frac{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2}}{R_0 + z} +$$

$$+ D \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{C_{k-1} + \beta_k z}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}}$$

$$\int Q(z)\,dz = \ln \sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}} \cdot \frac{R_0}{R_0 + z} (C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2} - \int P(z)\,dz. \qquad (20)$$

În (20), valoarea constantelor este următoarea:

$$A = -\frac{2R_0\sqrt{g_0\beta_k}}{\beta_k R_0 - C_{k-1}} - \frac{3}{2}R_0\sqrt{g_0\beta_k}\,\frac{\beta_k R_0 - 2C_{k-1}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^2}$$

$$B = \frac{R_0^2\sqrt{g_0\beta_k}}{\beta_k R_0 - C_{k-1}}$$

$$C = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{g_0}{\beta_k}}\,\frac{\beta_k R_0 + 2C_{k-1}}{(\beta_k R_0 - C_{k-1})^2}$$

$$D = \frac{R_0\sqrt{g_0\beta_k}}{2(\beta_k R_0 - C_{k-1})^{3/2}}.$$

În acest fel soluțiile ecuațiilor diferențiale ale extremalelor (17) sînt determinate, avînd forma:

$$M_k = M_{k-1}\exp\left[-\int P(z)\,dz\right]$$

$$\lambda_{1k} = \lambda_{1(k-1)}\left\{\frac{1}{(C_{k-1} + \beta_k z)^{3/2}}\sqrt{\frac{\beta_k}{g_0}}\,\frac{R_0 + z}{R_0}\exp\left[\int P(z)\,dz\right]\right\} \quad (21)$$

Avînd $M_k^{(1)}$ și $\lambda_{1k}^{(1)}$, putem calcula în a doua aproximație valoarea lui V_k din ecuația (13). Calculele de data aceasta sînt mult mai laborioase, devenind necesară folosirea mașinilor electronice de calcul.

Din prima ecuație (21) observăm că masa treptei k, este o funcție descrescătoare cu altitudinea, ceea ce era de așteptat și corespunde realității.

Analizînd prima formulă (21) se vede dependența masei treptei k de coeficientul β_k, adică de legea de variație a vitezei de scurgere a gazelor prin ajutaj, cu altitudinea.

În cazul motoarelor rachetă cu combustibili chimici, creșterea vitezei de scurgere a gazelor atrage după sine creșterea presiunii în camera de ardere și a temperaturii gazelor, ceea ce impune dimensionarea în consecință a camerei de ardere și a sistemului de răcire.

În funcție de valoarea lui β_k se stabilește programul de funcționare a motorului (sau motoarelor) treptei respective. Pentru treptele superioare ale rachetelor propulsate de motoare cu combustibil chimic de obicei $\beta_k < 1$, viteza de scurgere a gazelor (C_k) nedepășind valoarea de 4000—5000 m/sec.

Desigur, că nu este departe timpul cînd treptele rachetelor multietajate vor fi echipate cu sisteme de propulsie diferite. De exemplu primele trepte vor fi formate din motoare rachetă „clasice", după care să urmeze trepte

propulsate cu energie nucleară sau de motoare rachetă electrice. Aceasta ar duce la o variație bruscă a vitezei de scurgere în perioada intrării în funcțiune și a accelerării rachetei propulsată cu motoare atomice sau electrice, ceea ce înseamnă că mărimea pantei (φ) a dreptei $C_k = C_{k-1} + \beta_k z$ poate depăși 45°, adică $\beta_k = \operatorname{tg} \varphi > 1$.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Marinescu:* Urcarea optimă a rachetelor cu un singur etaj, SCMA, nr. 2, 1964.
2. *Al. Marinescu:* Asupra problemei urmării în timp minim a rachetelor, SCMA, nr. 6, 1963.
3. *N. Tipei:* Asupra mișcării rachetei în mediul rezistent. I. Ascensiunea rachetei, SCMA, XII, 3, 1961.
4. *N. Tipei:* Bătaia rachetelor balistice, SCMA, XIII, 3, 1962.
5. *L. Davis Tr., J. W. Follin Jr., L. Blitzer:* The Exterior Ballistics of Rockets, New-York, Londra 1958.
6. *I. M. Rijik — I. S. Gradstein:* Tabele de integrale, sume, serii și produse. Edit. Tehnică 1955, București.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

CHIMIA MACROMOLECULARĂ

C.Z.: 547.431.4 : 547.759.32

POLIMERIZAREA N-VINIL-CARBAZOLULUI CU PERCLORAȚI HIDRATAȚI *

O. F. SOLOMON, I. Z. CIUTĂ, N. COBIANU, M. GEORGESCU

Interesul manifestat pentru polimerizarea N-vinil carbazolului se datorește pe deoparte faptului că este solid la temperatura ordinară, are o moleculă mare cu un heteroatom, iar pe de altă parte este puțin cunoscut mecanismul polimerizării sale ionice.

Polimerizarea N-vinil carbazolului cu perclorați a mai fost obiectul și a altor lucrări. Hodgon (1) în cercetările sale de polimerizare cu perclorați anhidri de tipul $LiClO_4$; $Mg(ClO_4^-)_2$; NH_4ClO_4 într-un sistem heterogen nu reușește să obțină polivinil carbazol.

Solomon și Dimonie, lucrînd în sistem omogen de solvenți polari ca acetat de etil, acetat de amil, acetonă sau nitrobenzen reușesc să polimerizeze N-vinil carbazolul cu percloratul de Ba și percloratul de Mg. anhidri (2).

În acest caz, se pare că inițiatorul procesului de polimerizare este cationul format prin legătura metal carbon, datorită transferului sarcinei cationului la grupa metilen a monomerului.

Breitenbach și Srna, studiind inițierea electro-chimică a polimerizării vinilice (3) propun un mecanism cationic pentru polimerizare, inițierea avînd loc la anod unde anionul ClO_4 pierde un electron trecînd în radicalul ClO_4, care la rîndul său extrage un electron moleculei de monomer ce devine astfel un cation radical.

$$ClO_4^- \rightarrow (ClO_4)\cdot + e^- \text{ la anod}$$

$$ClO_4\cdot + M \rightarrow ClO_4^- + M^+.$$

Lucrînd cu perclorat de Li mono hidrat am constatat, contrar celor afirmate de Hodgon, că N-vinil carbazolul poate polimeriza în mediu omogen de solvenți polari.

De asemeni, polimerizarea are loc și în cazul folosirii percloraților de Ba și Mg. hidratați.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Partea experimentală

Studierea cineticii de reacție s-a făcut dilatometric, folosind metoda de adăugare a reactanților în vase deschise în loc de manipularea sub vacuum înaintat cum se obișnuiește în cazul polimerizării ionice.

S-a folosit N-vinil carbazolul de proveniență Fluka, având o puritate de 99,99% și un punct de topire de 64,5°C.

Percloratul de Li preparat de noi (4) și percloratii de Mg. și Ba de proveniență Merck au fost folosiți în soluție de acetat de etil sau metil etil cetonă.

Solvenții utilizați, produși Fluka, au fost mai întîi spălați cu o soluție 10% de Na_2CO_3, uscați pe $CaCl_2$ sau CaH_2 24—48 ore și apoi distilați pe o coloană Bruun de 40 de talere.

Fracțiunea de acetat de etil cu care s-a lucrat a fost colectată la 77—77,2°C. și 760 col. Hg.

Soluția de monomer s-a amestecat în prealabil cu soluția de catalizator și apoi s-a introdus fără precauții speciale în dilatometru.

Experiențele de polimerizare au fost conduse la 25 și 35°C.$\pm$0,01.

Concentrațiile monomerului au fost de 1,25 moli/l iar cele ale catalizatorului între 0,8 și $5{,}0.10^{-3}$ moli/l.

Soluțiile monomerului și catalizatorului incolore deveneau prin amestecare slab gălbui.

Apariția acestei colorații a fost constatată de noi și în cazul folosirii nitro-metanului sau nitro-etanului drept catalizator ca și în cazul acidului percloric diluat (5), (6).

Reacția de polimerizare are loc în mediu omogen pînă la o conversie de 30—40% după care apare o opalescență a mediului de reacție, datorită precipitării polivinil carbazolului în acești solvenți.

După terminarea polimerizării, masa de reacție s-a dizolvat în toluen și apoi s-a precipitat cu metanol.

Pentru îndepărtarea monomerului nereacționat înglobat în polimer la precipitare, polimerul a fost supus extracției la cald cu metanol pînă la greutate constantă.

Rezultatele experimentale

A. *Rapiditatea reacției*

Reacția de polimerizare în bloc a N-vinil carbazolului la 70°C. cu $Mg(ClO_4)_2$ este violentă și explozivă, chiar pentru cantități foarte mici de catalizator. În cazul percloratului de bariu sau al percloratului de Litiu monohidrat, reacția este mai puțin violentă, având loc după un scurt interval de timp (1—2 minute) de la adăugarea catalizatorului. În toate cazurile, reacția are loc cu o degajare mare de căldură și cu apariția unei colorații roșu-maron.

Dacă se efectuează reacția în soluție de acetat de etil, polimerizarea are loc mult mai temperat și se poate urmări cu ușurință într-un dilatometru.

La concentrații de catalizator și monomer nu prea mari, este asigurată reproductibilitatea reacției, apărînd și în acest caz coloratia semnalată anterior.

B. *Polimerizarea N-vinil carbazolului cu perclorat de Li monohidratat și perclorat de Mg monohidrat în acetat de etil*

Lucrînd cu perclorat de litiu monohidrat (pt. 149°C.) în acetat de etil s-au obținut date reproductibile de polimerizare.

Pentru diferite concentrații de catalizator (Co) la temperatura de 35°C și pentru concentrația monomerului (M_0) de 1,25 moli/l, conversiile în funcție de timp sînt arătate în Fig. 1.

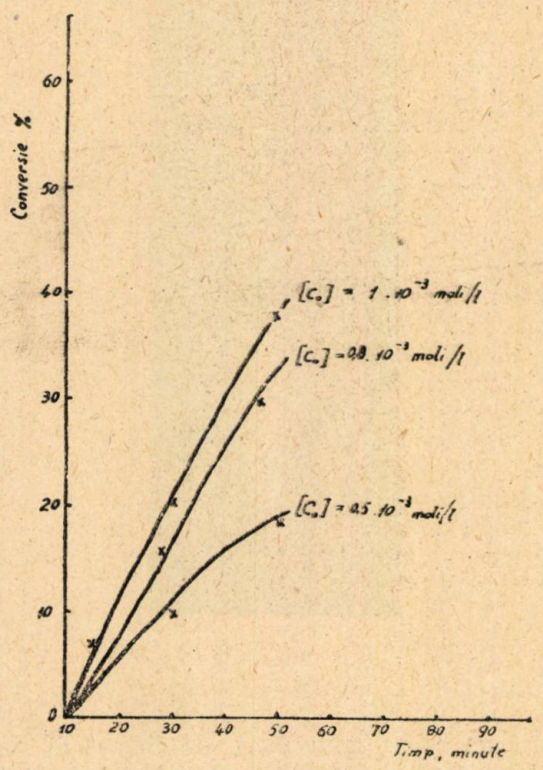


Fig. 1

După cum rezultă din Fig. 1, conversia crește cu concentrația catalizatorului, prezentînd proporționalitate în funcție de timp.

Pentru începutul reacției dependența este liniară. Polimerizarea decurge similar și în cazul folosirii percloratului de Mg. monohidrat.

Produșii obținuți după extracția polimerului cu metanol au un interval de topire de 220—225°C.

Greutatea moleculară determinată crioscopic este între 900—2000. Spectrul de absorbţie în infraroşu corespunde datelor de literatură pentru polivinil carbazol.

C. *Obţinerea produsului cristalin*

S-au separat prin cristalizare din metanolul cu care s-a făcut extracţia la cald a polimerului obţinut în diferitele experienţe, produşi cristalini cu puncte de topire de 170, 185, 190°C. Fig. (2).

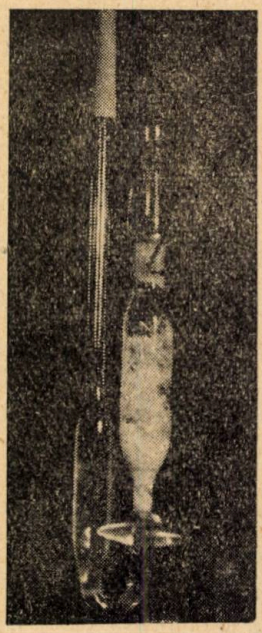


Fig. 2

Aceşti produşi au mase moleculare de 372—600, determinate crioscopic. Analiza elementară a produşilor cristalini indică un conţinut:

în dimer	C = 86,6%	H = 6,66%	N = 7,52%
în monomer	87%,	5,7%,	7,25%

care concordă cu valorile teoretice pentru vinilcarbazol.

Faptul că spectrul de infraroşu al acestor produşi (Fig 3) este diferit de cel al vinil carbazolului Fig. 4 ca şi diferenţa sensibilă în valoarea greutăţii moleculare şi a punctelor de topire ne-au dus la concluzia că

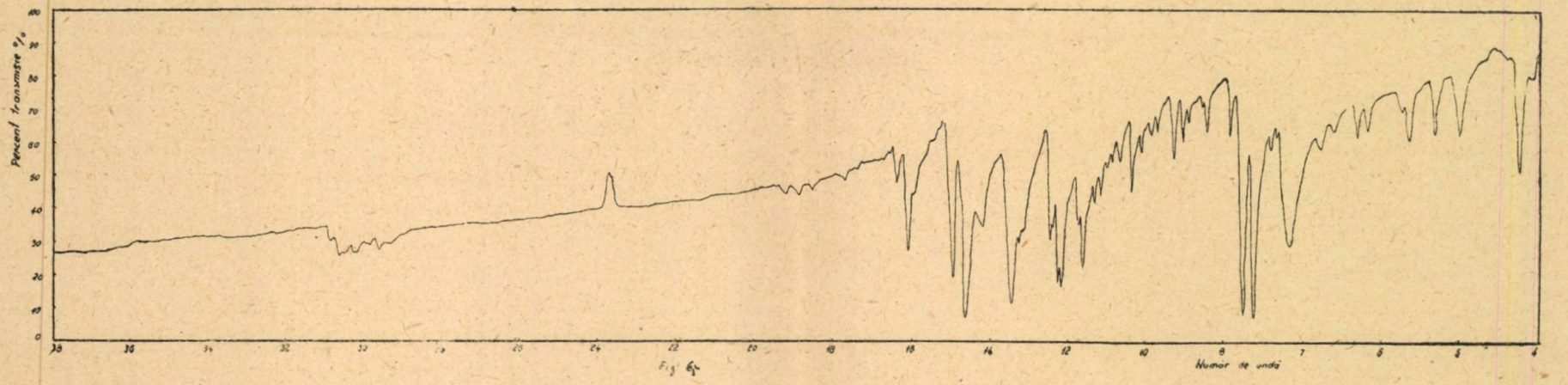

Procent transmis %
Numar de unda

Fig. 3

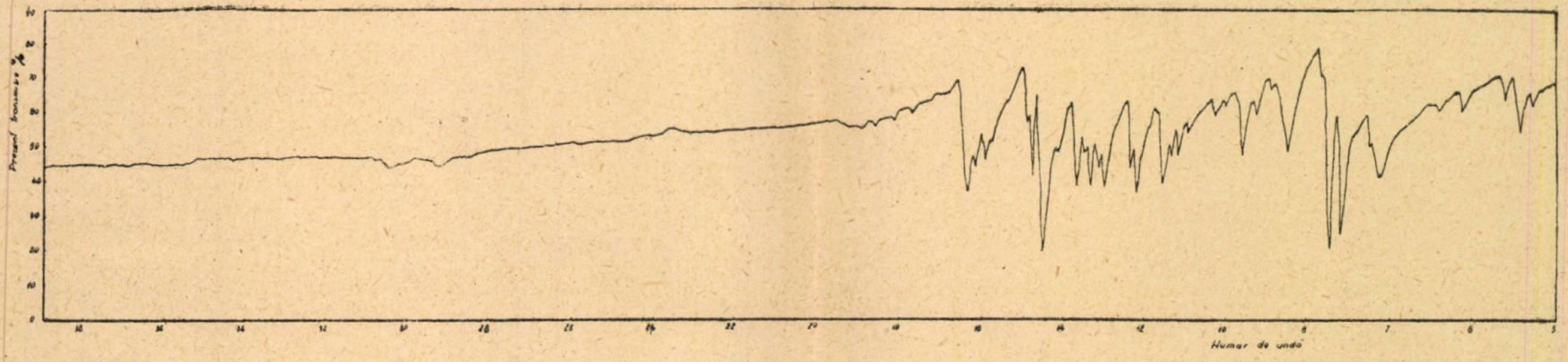
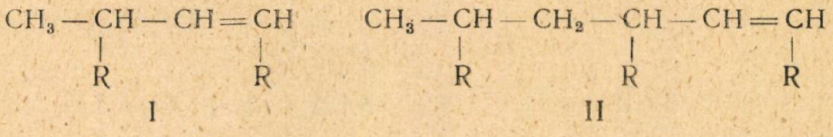

Procent transmis %
Numar de unda

Fig. 4

produșii cristalini sînt oligomeri ai vinil-carbazolului de tipul dimerilor (I) sau trimerilor (II) obținuți alături de polimer și care pot avea următoarea structură :



I II

Discuții

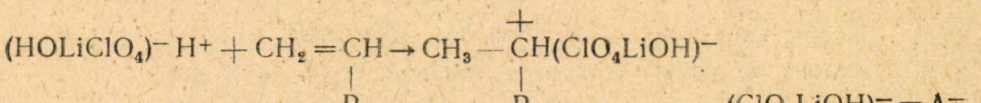
Din datele experimentale obținute, se poate afirma că perclorații hidratați sînt catalizatori eficace pentru polimerizarea monomerilor vinilici ce au o densitate mare de electroni la dubla legătură.

Reacția de polimerizare în fază omogenă, decurge după un mecanism cationic, bazat pe atacul protonului eliberat de complexul $(HOLiClO_4)^-H^+$ asupra dublei legături.

Această disociere este favorizată de solventul polar care asigură totodată și libertatea cinetică a carbocationului format.

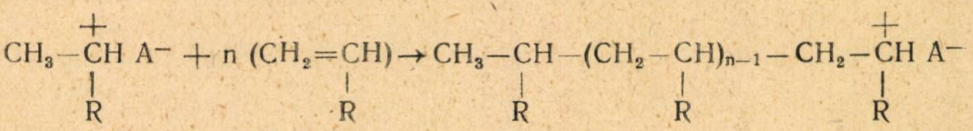
Mecanismul reacției de polimerizare cationică cu perclorați hidratați se poate reprezenta astfel :

Inițierea :

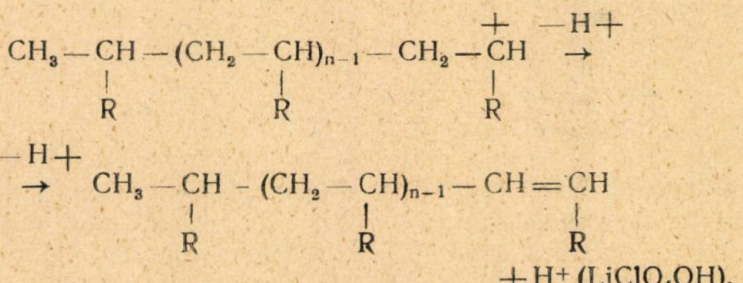


$(ClO_4LiOH)^- = A^-$

Propagarea :

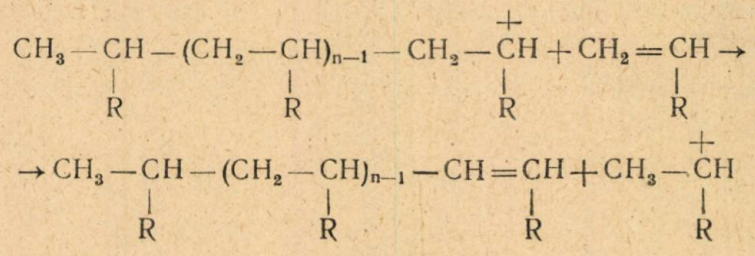


Reacția de încetare a creșterii lanțului poate avea loc prin transferul spontan al protonului :



$+H^+ (LiClO_4OH).$

Sau printr-o reacție de transfer cu monomerul



în care caz se poate iniția un nou lanț de reacție.

Laboratorul de chimia compușilor macromoleculari
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *R. B. Hodgon, J. Polym* Sci., 33, 259, 1960.
2. *O. F. Solomon* și *M. Dimonie.* Simpozionul internațional de chimie macromoleculară. Paris — Julie 1963.
3. *J. W. Breitenbach* și *Ch. Srna.* Pure and Applied Chemistry vol. 4, Nr. 2—4, 245 — 1962.
4. *J. P. Simmons, C. L. Kopp,* J. Am. Chem. Soc., 1950 (1928).
5. *O. F. Solomon, M. Dimonie, M. Tomescu,* Makromol. Chem., 58, 1, 1962.
6. *O. F. Solomon, I. Z. Ciută,* and *N. Cobianu,* J. Polim. Sci., B. 2.311 (1964).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

TERMOTEHNICĂ

FORSCHUNGSMITTEILUNGEN DES LEHRSTUHLES
„TERMOTEHNICA ȘI MAȘINI TERMICE"

C.Z : 621.1.016 : 621 — 58

III

THERMODYNAMISCHE ZUSTANDSÄNDERUNGEN DIE MIT ENDLICHER VERÄNDERLICHER GESCHWINDIGKEIT DURCHLAUFEN WERDEN*

L. STOICESCU, S. PETRESCU

1. Thermische Kolbenmaschinen

Die Kolbengeschwindigkeit ist nie konstant. Sie ändert sich mit der Kolbenstellung nach gewissen Gesetzen, die vom Mechanismus Kurbel-Pleuelstange bestimmt werden. In den Totpunkten wird sie zu Null und in der Nähe der Hubmitte erreicht sie einen Höchstwert. Selbstverständlich, in der Nähe der Totpunkte ist auch ihr Einfluss, auf die Entwicklung des Vorgangs und auf die Gleichung die diesen beschreibt, sehr gering. Dagegen, um die Hubmitte herum, ereicht dieser Einfluss ein Maximum.

Diese Tatsache führt zu entsprechenden Abänderungen in den Gleichungen der thermodynamischen Vorgänge [1] da, in dem von uns aufgestellten Ausdruck des ersten Grundsatzes, woraus wir die genannten Gleichungen herleiteten, die K-Geschwindigkeit (w) konstant angenommen wurde. Um diesen Abänderungen Ausdruck zu verleihen, müssen wir, in erster Linie, (w) als eine Funktion von der K-Stellung, also eine Funktion vom Volumen [d.h. $w(V)$], in die Gleichung des ersten Grundsatzes einsetzen :

$$dQ = dU + Ap\left[1 \pm \frac{aw(V)}{c}\right] dV \,, \quad [2] \tag{1}$$

wo

$$dU = Gc_v\, dT$$

*) Vorhandene Arbeit lief bei der Redaktion am 17-ten Oktober 1964.

[1] Siehe : L. Stoicescu, S. Petrescu — Thermodynamische Zustandsänderungen .... — Buletinul Institutului politehnic București, Nr. 6 — 1964.

[2] Siehe : L. Stoicescu, S. Petrescu — Der erste Grundsatz der Thermodynamiy für technische Prozesse... Gleichung (46) — Buletinul Institutului politehnic București, Nr. 5 — 1964.

ist. [Genau so wie in unserer Arbeit [1] (siehe unten Seite 1), schreiben wir T, p, c und verstehen dabei mittlere Temperatur, mittleren Druck, mittlere Molekelngeschwindigkeit].

Von (1) ausgehend wo wir $w(V)$ explizit einsetzen wollen, ergibt sich die entspechende Adiabaten — und Polytropengleichung mit Rück-

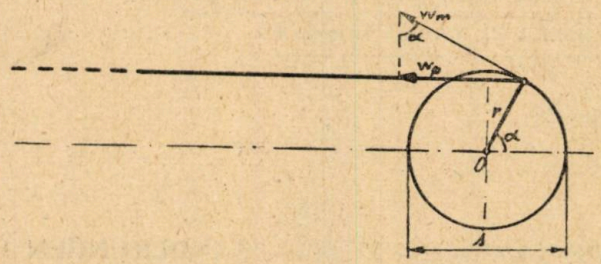


Fig. 1

sicht auf die veränderliche endliche Geschwindigkeit dieser Vorgänge.

In vorliegender Arbeit werden wir eine Verdichtunsadiabate untersuchen, die mit variabler endlicher Geschwindigkeit in einer thermischen Maschine stattfindet deren Pleuelstange unendlich lang ist.

An Hand der Abb. 1 wollen wir die Funktion $w(V)$ auffinden, wobei wir bemerken, dass die unendlich lange Pleuelstange ständig parallel zur Zylinderaschse bleibt.

Der Mittelpunkt des Kurbelzapfens dreht sich mit der Umfangsgeschwindigkeit (w_m), deren Projektion auf der Zylinderachse der K-Geschwindigkeit (w_p) gleich ist:

$$w_p = w_m \sin \alpha \tag{2}$$

wo

$$w_m = \omega r = \frac{\pi n r}{30} . \tag{3}$$

Bei konstanter Tourenzahl (n), sind sowohl die Umfangsgeschwindigkeit des Mittelpunktes des Kurbelzapfens als auch die *mittelere* K-Geschwin-

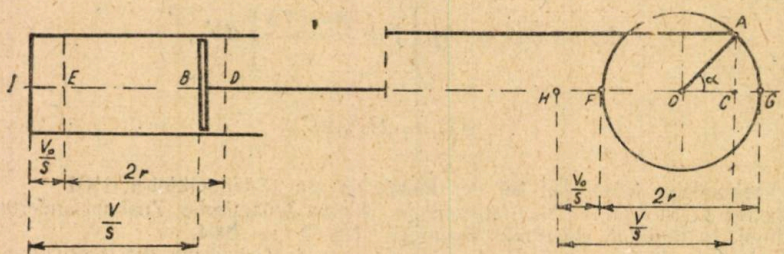


Fig. 2

digkeit gleichbleibend. Mit Rücksicht auf (3), sowie auf $s = 2r$, besteht zwischen diesen Geschwindigkeiten die Beziehung:

$$w_{med} = \frac{2sn}{60} = \frac{\pi nr}{30} \cdot \frac{2}{\pi} = w_m \frac{2}{\pi}, \tag{4}$$

woraus

$$w_m = \frac{\pi}{2} w_{med}; \tag{5}$$

somit, ergibt sich aus (2) und (5)

$$w_p = \frac{\pi}{2} w_{med} \cdot \sin \alpha. \tag{6}$$

Nun wollen wir eine Beziehung zwischen $\sin\alpha$ und V finden. In Abb. 2, führt der Punkt B genau dieselbe Bewegung aus wie die Projektion des Punktes A, auf der Zylinderachse. Infolgedessen

$$CG = BD \text{ oder } FC = EB.$$

Indem wir die Querschnittsfläche des Zylinders mit S_p bezeichnen, erhalten wir:

$$CH = BI = \frac{V}{S_p}. \tag{7}$$

Aus geometrischen Betrachtungen, ergibt sich

$$\frac{V}{S_p} = \frac{V_0}{S_p} + FO + OC, \tag{8}$$

wo

$$FO = r$$
$$OC = r \cos \alpha,$$

also

$$\frac{V}{S_p} = \frac{V_0}{S_p} + r(1 + \cos \alpha). \tag{9}$$

So ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\cos \alpha = \frac{V - V_0}{S_p r} - 1 \tag{10}$$

und

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{V - V_0}{S_p r} - 1\right)^2}. \tag{11}$$

Setzen wir (11) in (6) ein, so erhalten wir

$$w_p = w_{med} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{V - V_0}{S_p r} - 1\right)^2}. \tag{12}$$

Dies ist die gesuchte explizite Funktion $w(V)$, welche in (1) eingesetzet, und mit Rücksicht auf $dU = Gc_v dT$, sowie auf $dQ = 0$ und $p = GRT/V$, uns zur folgenden Differentialgleichung der mit variabler endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Adiabate führt:

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\left[1 \pm \frac{aw_{med} \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{\sqrt{\frac{3KT}{m}}}\right]\frac{dV}{V}. \quad (13)$$

Die alleinigen variablen Grössen sind hier T und V. Man kann Gleichung 13 zwischen zwei gegebenen Gaszuständen integrieren. Da aber die Veränderlichen untrennbar sind, kann dies nicht nach elementaren Regeln geschehen. Wir bemerken, dass sie sich von der Gleichung der mit endlicher konstanter Geschwindigkeit w_{med} durchlaufenen Adiabate nur durch die Funktion von V unterscheidet, die das Verhältnis aw_{med}/c multipliziert. *Wir werden den Einfluss dieser Funktion auf die Gleichung der Verdichtungsadiabate (+ in der grossen Klammer, 13) hervorheben, und zwar im Vergleich zu der in der Voraussetzung $w = \text{const} = w_{med}$ erhaltenen Gleichung.* (die Entspannung wird identisch untersucht, idem man in der quadratischen Klammer nur das Zeichen minus beibehält).

Nach geringer Umformung von (13) erhalten wir

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{dV}{V} - \frac{aw_{med} \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{\sqrt{\frac{3KT}{m}}}(k-1)\frac{dV}{V}. \quad (14)$$

Mit befriedigender Annäherung wird T, im Nenner der Gleichung (14), mit seinem sich aus der klassischen Adiabatengleichung ergebendem Wert ersetzt:

$$T = T_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{k-1} \quad (15)$$

und so erhalten wir:

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{dV}{V} - \frac{\pi}{2}(k-1)\frac{aw_{med}\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}\cdot\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{k-1}{2}}}\cdot\frac{dV}{V}. \quad (16)$$

Wir bezeichnen:

$$E(V) = \frac{\pi}{2}(k-1)\frac{aw_{med}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}\cdot\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\frac{k-1}{2}}\cdot V}; \quad (17)$$

somit, Gleichung (16) wird:

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{dV}{V} - E(V)\,dV. \tag{18}$$

Durch Integration erhält man:

$$\left|\ln T\right|_1^2 = \left|-\ln V^{k-1}\right|_1^2 - \int_1^2 E(V)\cdot dV. \tag{19}$$

Da man auch

$$\int_1^2 E(V)\,dV = \ln e^{\int_1^2 E(V)\,dV} \tag{20}$$

schreiben kann, so erhält (19) die Formen:

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} - \ln e^{\int_1^2 E(V)\,dV} \tag{21}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}\cdot e^{-\int_1^2 E(V)\,dV.} \tag{22}$$

Mit Hilfe von (17), kommt man auf den Ausdruck $E(V)$ zurück:

$$\int_1^2 E(V)\,dV = \frac{\pi}{2}(k-1)\frac{a w_{med}}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}\cdot V_1^{\frac{k-1}{2}}}\cdot\int_1^2 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{V^{\frac{3-k}{2}}}\cdot dV. \tag{23}$$

Wir integrieren diese Gleichung indem wir zur Veränderlichen α übergehen. Mit Hilfe der Beziehungen (9) und (11):

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2};\quad V = V_0 + S_p r(1+\cos\alpha);\quad dV = -S_p r\sin\alpha\cdot d\alpha,$$

ergibt sich:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{V-V_0}{S_p r}-1\right)^2}}{V^{\frac{3-k}{2}}}\cdot dV = -(S_p r)^{\frac{k-1}{2}}\int_1^2 \frac{\sin^2\alpha\cdot d\alpha}{\left(\frac{V_0}{S_p r}+1+\cos\alpha\right)^{\frac{3-k}{2}}},$$

worin wir

$$I_\alpha = \int_1^2 \frac{\sin^2\alpha \cdot d\alpha}{\left(\frac{V_0}{S_p r} + 1 + \cos\alpha\right)^{\frac{3-k}{2}}} \tag{24}$$

bezeichnen wollen.
Somit nimmt Gleichung 23 folgende Form an:

$$\int_1^2 E(V)\,dV = -\frac{\pi}{2}(k-1)\frac{a w_{med}}{c_1} \cdot \frac{(S_p r)^{\frac{k-1}{2}}}{V_1^{\frac{k-1}{2}}} \cdot I_\alpha, \tag{25}$$

worin

$$c_1 = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}};\quad S_p r = \frac{\varepsilon - 1}{2} \cdot V_0;\quad \frac{V_1}{V_0} = \varepsilon$$

$$\left(\frac{S_p r}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{(\varepsilon-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\frac{k-1}{2}}} \cdot \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{(\varepsilon-1)^{\frac{k-1}{2}}}{(2\varepsilon)^{\frac{k-1}{2}}}, \tag{26}$$

also

$$\int_1^2 E(V)\,dV = -\frac{\pi}{2}(k-1)\frac{a w_{med}}{c_1} \cdot \frac{(\varepsilon-1)^{\frac{k-1}{2}}}{(2\varepsilon)^{\frac{k-1}{2}}} \cdot I_\alpha = -F \cdot I_\alpha. \tag{27}$$

Indem wir (27) in (22) einsetzen (in den von uns gemachten Voraussetzungen), erhalten wir die Gleichung der Verdichtungsadiabate die mit endlicher verändlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird, wenn die Pleuelstange unendlich lang ist, und zwar:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \cdot e^{FI_\alpha}. \tag{28}$$

In Betracht ziehend, dass

$$e^{FI_\alpha} = 1 + FI_\alpha + \ldots,$$

erhält man eine andere Form der Gleichung (28):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} + \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \cdot FI_\alpha. \tag{29}$$

Daraus kann die Temperatur T_2 im Endzustand 2 einer Verdichtungsadiabate, die der endlichen variablen Geschwindigkeit des Vorgangs Rechnung trägt, ermittelt werden:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} + T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \cdot FI_\alpha. \tag{30}$$

Es muss bemerkt werden, dass Gleichung 30, ohne den letzten Faktor der rechten Seite, das heisst ohne

$$T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = T_{2_t}\,, \tag{31}$$

die Temperatur T_{2_t} angibt, die dem Endzustand 2 der reversiblen adiabaten Verdichtung ($w = 0$) entspricht, die vom selben Anfangszustand wie die irreversible ausgehend, darunter zu liegen kommt, da nach (30)

$$T_2 = T_{2_t} + T_{2_t} \cdot FI_\alpha\,, \quad \text{also} \quad T_2 > T_{2_t}\,. \tag{32}$$

Es ergibt sich auch die Temperaturdifferenz

$$T_2 - T_{2_t} = T_{2_t} \cdot FI_\alpha\,, \tag{33}$$

das heisst, der Fehler den man begeht wenn man den Prozess reversibel betrachtet, anstatt irreversibel, wie uns die Wirklichkeit der thermischen Maschinen belehrt (siehe die rechte Seite der Gleichung 33).

Nun bleibt es uns noch übrig zu untersuchen ob wir einen quantitativen Fehler begehen, wenn wir die Geschwindigkeit der irreversiblen Verdichtungsadiabate konstant, und der mittleren K-Geschwindigkeit gleich annehmen, anstatt veränderlich, wie es in den thermischen Maschinen immer vorkommt. Demgemäss, anstatt Gleichung (30) benützen wir die folgende:

$$\frac{T_1}{T_2'}\left(\frac{1+\dfrac{aw_{med}}{c_1}}{1+\dfrac{aw_{med}}{c_2}}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}, \quad {}^{*1} \tag{34}$$

worin

$$\delta_c = \left(\frac{1+\dfrac{aw_{med}}{c_1}}{1+\dfrac{aw_{med}}{c_2}}\right)^2 \approx 1 + 2\frac{aw_{med}}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right), \quad {}^{*2}$$

und dementsprechend

$$T_2' = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \cdot \delta_c = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} + 2T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \cdot \frac{aw_{med}}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \tag{35}$$

---

* 1 Siehe: L. Stoicescu und S. Petrescu: Thermodonamische Zustandsänderungen ... Gleichung 22. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti Nr. 6 — 1964.

* 2 Siehe: dieselben, dieselbe Arbeit wie unter 1, Paragrapht 1.5.

Mit Bezug auf (31), gewinnen wir aus (35) die Temperatur T'_2 des Endzustandes der Verdichtungsadiabate, die mit einer konstanten endlichen Geschwindigkeit durchlaufen wird, welche der mittleren K-Geschwindigkeit w_{med} gleich ist, und zwar

$$T'_2 = T_{2_t} + T_{2_t} \frac{2 a w_{med}}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right). \tag{36}$$

Daraus ergibt sich:

$$T'_2 - T_{2_t} = T_{2_t} \cdot \frac{2 a w_{med}}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right), \tag{37}$$

worin, wie wir wissen, T_{2_t} die Temperatur des Endzustandes einer reversiblen Verdichtungsadiabate ($w=0$) ist, die denselben Ausgangspunkt (1) hat wie die irreversible mit endlicher konstanter Geschwindigkeit. (Punkt 1' ist derselbe in allen Voraussetzungen: w — veränderlich; w — konstant $= w_{med}$; $w = 0$). Da wir diese letze mit einer V-Adiabate vergleichen wollen, derer Geschwindigkeit endlich aber nicht konstant sondern veräanderlich ist, so bilden wir das Verhältnis von $(T_2 - T_{2_t})$ und $(T'_2 - T_{2_t})$, mit Hilfe von (33), (37) und (27). Also:

$$\frac{T_2 - T_{2_t}}{T'_2 - T_{2_t}} = \frac{T_{2_t} \cdot \frac{\pi}{2}(k-1) \cdot \frac{a w_{med}}{c_1} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^{\frac{k-1}{2}}}{(2\varepsilon)^{\frac{k-1}{2}}} \cdot I_\alpha}{T_{2_t} \cdot 2 \cdot \frac{a w_{med}}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)}.$$

Bezeichnen wir dieses Verhältnis mit a_1, also

$$a_1 = \frac{T_2 - T_{2_t}}{T'_2 - T_{2_t}} = \frac{\pi}{4}(k-1) \frac{(\varepsilon - 1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1\right)} \cdot I_\alpha, \tag{38}$$

so ergibt sich

$$T_2 - T_{2_t} = a_1 (T'_2 - T_{2_t}) \tag{39}$$

Lezte Gleichng besagt: anstatt Gleichung (30), kann man Gleichung (34) benützen, wenn a_1 bestimmt wird. *Wir wollen (a_1) Abweichungszahl benennen, da es die Abweichung der mit endlicher veränderlicher Geschwindigkeit verlaufende Verdichtungsadiabate (T_2), von der jenigen mit endlicher konstanter Geschwindigkeit angibt.*

Bestimmung der Abweichungszahl.

Als Beispiel, wollen wir (a_1), für Gase derer Molekeln einatomig sind, bestimmen. Für alle übrigen Gase ist der Berechnungslauf identisch.

Als Erstes bestimmen wir I_α. Aus 24,

$$I_\alpha = \int_1^2 \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{\left[\left(\frac{V_0}{S_p r}+1\right)+\cos\alpha\right]^{\frac{3-k}{2}}}. \tag{39 a}$$

Mit Bezug auf:

$$k = 5/3;\ \frac{V_0}{S_p r} = \frac{2V_0}{2S_p r} = \frac{2V_0}{V_1 - V_0} = \frac{2}{\varepsilon - 1};\ \frac{V_1}{V_0} = \varepsilon,$$

$$b = \frac{V_0}{S_p r} + 1 = \frac{2}{\varepsilon - 1} + 1 = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} > 1,$$

kann (39 a) wie folgt geschrieben werden:

$$I_\alpha = \int_1^2 \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{(b+\cos\alpha)^{2/3}}. \tag{40}$$

Teilweise Integration anwendend, erhält man

$$\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{(b+\cos\alpha)^{2/3}} = du;\quad \sin\alpha = v$$

$$u = \int du = -3(b+\cos\alpha)^{1/3};\quad dv = \cos\alpha\, d\alpha.$$

Somit,

$$I_\alpha\Big|_0^\pi = \int_0^\pi du \cdot v = \Big| vu\Big|_0^\pi - \int_0^\pi u\, dv = -\Big| 3(b+\cos\alpha)^{1/3}\sin\alpha\Big|_0^\pi +$$

$$+\int_0^\pi 3(b+\cos\alpha)^{1/3}\cos\alpha\, d\alpha = 0 + 3\int_0^\pi (b+\cos\alpha)^{1/3}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$I_\alpha\Big|_0^\pi = 3b^{1/3}\int_0^\pi \left(1+\frac{\cos\alpha}{b}\right)^{1/3}\cos\alpha\, d\alpha. \tag{41}$$

Wir bezeichnen:

$$\left(1+\frac{\cos\alpha}{b}\right) = 1+x,\quad \text{wo}\quad x = \frac{\cos\alpha}{b} < 1.$$

Der auf diese Weise enstandene Faktor $(1+x)^{1/3}$, wird in folgende Reihe zerlegt:

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\frac{22}{729}x^5\ldots$$

Auf cos α zurückkommend, indem wir I_α (41) geringfügig umformen, erhalten wir, durch Integration:

$$I_\alpha\Big|_0^\pi=3b^{1/3}\left[\int_0^\pi\cos\alpha\,d\alpha+\frac{1}{3b}\int_0^\pi\cos^2\alpha\,d\alpha-\frac{1}{9b^2}\int_0^\pi\cos^3\alpha\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{81b^3}\int_0^\pi\cos^4\alpha\,d\alpha-\frac{10}{243b^4}\int_0^\pi\cos^5\alpha\,d\alpha+\frac{22}{729b^5}\int_0^\pi\cos^6\alpha\,d\alpha\ldots\right] \quad (42)$$

Sei ein beliebiger Faktor dieser Reihe

$$I_n=\int_0^\pi\cos^n\alpha\cdot d\alpha\,,$$

und berechnen wir die zwei ersten Faktoren:

$$I_1=\int_0^\pi\cos\alpha\cdot d\alpha=\Big|\sin\alpha\Big|_0^\pi=0\,,$$

$$I_2=\int_0^\pi\cos^2\alpha\cdot d\alpha=\int_0^\pi\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot d\alpha=\left|\frac{\alpha}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2}\,.$$

Wenn $n>2$, wird die entsprechende Integrale mittels folgender Rekurrenzformel berechnet:

$$I_{m,n}=\int\sin^m\alpha\cdot\cos^n\alpha\,d\alpha=\frac{\sin^{m+1}\alpha\cos^{n-1}\alpha}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\cdot I_{m,n-2}\,.$$

Für $n=3$ und $m=0$, erhalten wir:

$$I_3=\int_0^\pi\cos^3\alpha\,d\alpha=\left|\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{3}\right|_0^\pi+\frac{2}{3}\int_0^\pi\cos\alpha\cdot d\alpha=0+\left|\frac{2}{3}\sin\alpha\right|_0^\pi=0\,.$$

Für $n=5$ und $m=0$:

$$I_5=\int_0^\pi\cos^5\alpha\cdot d\alpha=\left|\frac{\sin\alpha\cdot\cos^4\alpha}{5}\right|_0^\pi+\frac{4}{5}\int_0^\pi\cos^3\alpha\cdot d\alpha=0+\frac{4}{5}I_3=0\,.$$

Für $n=4$ und $m=0$:

$$I_4=\int_0^{\pi}\cos^4\alpha\cdot d\alpha=\left|\frac{\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha}{4}\right|_0^{\pi}+\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\cos^2\alpha\cdot d\alpha=0+\frac{3}{4}I_2=\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi.$$

Für $n=6$ und $m=0$, ergibt sich:

$$I_6=\int_0^{\pi}\cos^6\alpha\cdot d\alpha=\left|\frac{\sin\alpha\cdot\cos^5\alpha}{6}\right|_0^{\pi}+\frac{5}{6}\int_0^{\pi}\cos^4\alpha\cdot d\alpha=0+\frac{5}{6}I_4=0+$$

$$+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{8}\pi=\frac{5}{16}\pi.$$

Indem wir die Werte von I_n in I_α (42) einsetzen, erhalten wir Folgendes:

$$I_\alpha\Big|_0^{\pi}=3b^{1/3}\left[\frac{1}{3b}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{5}{81b^3}\cdot\frac{3}{8}\pi+\frac{22}{729b^5}\cdot\frac{5}{16}\pi\right], \tag{43}$$

$$I_\alpha\Big|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{b^{2/3}}\left[0{,}167+\frac{0{,}0231}{b^2}+\frac{0{,}00945}{b^4}\right]. \tag{44}$$

Nun wollen wir I_α für einige Werte von ε (Kompressionsgrad) berechnen:

Für $\varepsilon=1{,}1$

$$b=\frac{2{,}1}{0{,}1}=21;\quad b^2=441;\quad b^4=194000;\quad b^{2/3}=7{,}62,$$

$$I_\alpha=\frac{3\pi}{7{,}62}\cdot 0{,}167=1{,}238\cdot 0{,}167=0{,}207.$$

Für $\varepsilon=10$

$$b=\frac{11}{9}=1{,}225;\quad b^2=1{,}5;\quad b^4=2{,}25;\quad b^{2/3}=1{,}145,$$

$$I_\alpha=\frac{3\pi}{1{,}145}\left(0{,}167+\frac{0{,}0231}{1{,}5}+\frac{0{,}00945}{2{,}25}\right),$$

$$I_\alpha=8{,}2\,(0{,}167+0{,}0154+0{,}0042)=1{,}53.$$

Für $\varepsilon=20$

$$b=\frac{21}{19}=1{,}105;\quad b^2=1{,}22;\quad b^4=1{,}5;\quad b^{2/3}=1{,}07,$$

$$I_\alpha=\frac{3}{1{,}07}\left(0{,}167+\frac{0{,}0231}{1{,}22}+\frac{0{,}00945}{1{,}5}\right),$$

$$I_\alpha=8{,}8\,(0{,}167+0{,}019+0{,}0063)=1{,}69.$$

Somit stellen wir fest, dass die angenommene Faktorenzahl der I_α — Reihe befriedigend ist, da schon der dritte, den vorangehenden gegenüber, vernachlässigt werden kann.

Wir wollen nun die Werte der den einatomigen Gasen entsprechenden Abweichungszahl (a_1), für dieselben obigen Verdichtungsgrade berechnen.

In Gleichnug (38) sahen wir, dass

$$a_1 = \pi(k-1)\frac{(\varepsilon-1)^{\frac{k-1}{2}}}{4\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\cdot\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}-1\right)}\cdot I_\alpha . \tag{45}$$

Für $k=5/3$, ergibt sich

$$a_1 = 0{,}416\cdot I_\alpha \frac{(\varepsilon-1)^{1/3}}{\varepsilon^{1/3}-1} . \tag{46}$$

Mit den weiter oben berechneten I_α — Werten, erhalten wir:

Für $\varepsilon=1{,}1$	und $I_\alpha = 0{,}207$	$a_1=1{,}175$,
Für $\varepsilon=10$	und $I_\alpha = 1{,}53$	$a_1=1{,}14$,
Für $\varepsilon=20$	und $I_\alpha = 1{,}69$	$a_1=1{,}1$.

Es geht daraus hervor, *dass* (a_1), *mit der Zunahme von* ε, *kleiner wird. Also je grösser der Kompressionsgrad desto kleiner wird die Abweichungszahl, d.h., die irreversible Verdichtungsadiabate für endliche variable Geschwindigkeit strebt der irreversieblen für endliche konstante Geschwindigkeit zu.*

Die einem gegebenen Kompressionsgrad (ε) *entsprechende Abweichungszahl* (a_1), *kann dem Diagramm Abb, 3 entnommen werden. Diesem Diagramm liegen obige Berechnungen zu grunde.*

Die a_1*-Werte gelten auch für die Entspannung.*

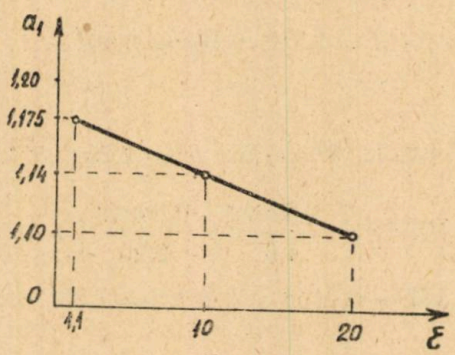


Fig. 3.

Der Berechnung eines mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen adiabaten Vorgangs, kann also die Gleichung der Adiabate für endliche konstante Geshwindigkeit zugrunde gelegt werden, indem man darin statt w,

$$w = a_1 w_{med} ,$$

einsetzt.

Obige Beweisführung kann auch für die Untersuchung der übrigen in den thermischen Maschinen vorkommenden Zustandsänderungen (Polytrope, Isotherme, Isobare) angewendet werden.

2. Zustandsänderungen mit endlicher variabler Geschwindigkeit in den Kolbenmaschinen mit unendlich langem Hub

2. 1. *Die mit veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufene Adiabate bei unendlich grossem Hub. Die maximale Geschwindigkeit dieses Prozesses (in der Voraussetzung $\delta_m \neq 1$).*

Bei adiabater Entspannung in einer Kolbenmaschine, erreicht die Geschwindigkeit des Kolbens, um die Mitte seines Hubes herum, ihren höchsten Wert. Wird der Hub grösser, so nimmt auch die maximale Geschwindigkeit zu, da die vom Gas an den Kolben abgegebene Energie grösser wird. Infolgedessen, die grösstmögliche K-Geschwindigkeit, bei einer ohne Strömung verlaufenden Adiabate, nur dann erreicht wird, wenn der Hub unendlich gross wird. Das bedeutet, dass sich der Kolben, in diesem Fall, frei bewegt, er also in keine Verbindung mit anderen Maschinenteilen steht und von keinen Aussenkräften beansprucht wird.

Die für Prozesse mit enlicher Geschwindigkeit gültige Gleichung (1) des ersten Grundsatzes führt uns zu Beziehungen, die uns die Möglichkeit bieten die Maximalgeschwindigkeit zu bestimmen, die unter der Wirkung einer adiabaten Gasausdehnung, einem in einem unendlich langen Zylinder sich reibungslos bewegenden Kolben erteilt werden kann.

Diese Geschwindigkeit liefert uns eine allgemeine Grössenordnung der Maximalgeschwindigkeit, mit der offene thermische Vorgänge ohne Strömung durchlaufen werden.

In der Folge wollen wir uns zuerst die Gleichung der mit veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Adiabate und dann die Maximalgeschwindigkeit zum Gegenstand einer näheren Untersuchung machen. Um eine Parallele mit der klassischen Gleichung der Adiabate ziehen zu können, führen wir die Herleitung der Adiabate als Funktion von deren Verlaufsgeschwindigkeit derart durch, dass die Faktoren der klassischen Gleichung getrennt erscheinen. Dabei wird man feststellen können, dass, wenn stark veränderliche Geschwindigkeit vorhanden, die Inbezugnahme der Kolbendruck-Abhängigkeit d.h.

$$p_p = p\,(1 - aw/c) = p\,\delta_m \quad * \qquad (46\,a)$$

(worin p_p = Kolbendruck, p = Mitteldruck des Gases, δ_m = momentaner Irreversibilität anregender Faktor) von seiner augenblicklichen Geschwindigkeit unerlässlich ist. Es ergibt sich also, in diesem Falle, dass die klassische Annäherung $p_p = p$, $(d \cdot h \cdot \delta_m \cong 1)$, nicht mehr befriedigend angewendet werden kann.

* Siehe: L. Stoicescu, S. Petrescu — Erster Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse... Buletinul Institutului politehnic Bucureşti — Nr. 5 — 1964.

Betrachten wir, in Abb. 4, einen unendlich langen Zylinder vom Querschnitt S_p, worin sich ein G_p kg schwerer Kolben mit der augenblicklichen Geschwindigkeit w bewegt. Das auf der Kolbenstirnfläche

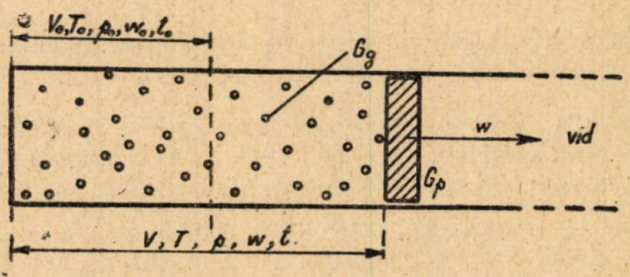


Fig. 4

wirkende Gasgewicht G_g entspannt sich adiabat $\cdot p_0, T_0, V_0$ kennzeichnen den Anfangszutsand des Gases für die Zeit $t = 0$.

2. 1. a. *Das den Prozess beschreibende Gleichungensystem.*

Folgende Gleichungen beschreiben vollkommen den untersuchten Prozess:

— Gleichung des ersten Grundsatzes (1) für Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit, für adiabate Entspannung:

$$G_g c_v dT + Ap\left(1 - \frac{aw}{c}\right) dV = 0\,; \tag{47}$$

— das Zustandsgesetz:

$$pV = G_g RT \tag{48}$$

— zeitliche Änderung des Gasvolumens als Funktion von w:

$$dV = S_p w dt \tag{49}$$

— das *K-Bewegungs-Gesetz*:

$$F_p = m a_p\,,$$

worin $a_p = dw/dt$ = Kolbenbeschleunigung

$$m = G_p/g = \text{Kolbenmasse}$$

und F_p = die in die K-Achse wirkende Kraft, die dem K-Druck $p\,(1\text{-}aw/c)$* und seiner Geschwindigkeit entspricht.

Also

$$F_p = S_p p\,(1 - aw/c)\,,$$

* Siehe: L. Stoicescu und S. Petrescu — Erster Grundsatz... Nr. 5 — 1964 — Buletinul Institutului politehnic București.

sowie

$$S_p p (1 - aw/c) = \frac{dw}{dt} \frac{G_p}{g}. \tag{50}$$

— Die Beziehung zwischen Molekelngeschwindigkeit und augenblicklicher Gastemperatur,

$$c = \sqrt{3 g R T}. \tag{51}$$

Wir betonen nochmals, dass wir, im Sinne unserer Arbeit *, unter P, T Mittelwerte des augenblicklichen Kolbendruckes und der augenblicklichen Gastemperatur verstehen.

2. 1. b. *Die Differentialgleichung der Adiabate mit Rücksicht auf den momentanen Irreversibilität anregenden Faktor* $\delta_m \neq 1$.

Mit Rücksicht auf (48) und (47) sowie $AR/c_v = k-1$, ergibt sich die Differentialgleichung der irreversiblen adiabaten Entspannung, wenn sie mit der Geschwindigkeit w stattfindet:

$$\frac{dT}{T} + (k-1)\left(1 - \frac{aw}{c}\right)\frac{dV}{V} = 0. \tag{52}$$

Wenn wir $w = f(T)$ oder $T = f(w)$ explizit ausdrücken, erhalten wir, aus (52), durch Substitution, eine Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen, die wir integrieren werden.

2. 1. c. *Die integrierte Energiegleichung in dem abgegrenzten System Gas-Kolben.* Die Beziehung zwischen T, und w.

Wenn wir (50) in (47) einsetzen, erhalten wir

$$G_g c_v dT + \frac{A}{S_p} \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \frac{G_p}{g} dV = 0. \tag{53}$$

Setzen wir darin (49) ein, so ergibt sich

$$G_g c_v dT + \frac{A}{S_p} \cdot \frac{dw}{dt} \cdot \frac{G_p}{g} \cdot w dt \cdot S_p = 0, \tag{54}$$

oder

$$G_g c_v dT + A d\left(\frac{w^2}{2g}\right) G_p = 0. \tag{55}$$

Nach Integration, wird diese letzte Gleichung

$$G_g c_v (T - T_0) + A\left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) G_p = 0; \tag{56}$$

* Siehe: L. Stoicescu und S. Petrescu — Erster Grundsatz... Nr. 5 — 1964 — Buletinul Institutului politehnic București.

sie stellt die integrierte Energiegleichung des abgegrenzten Systems Gas-Kolben und kann auch

$$\Delta U_g + \Delta E_{cp} = 0 \tag{57}$$

geschrieben werden. Unter dieser Form zeigt sie, wie es auch zu erwarten war, dass die Änderung der inneren Gasenergie (ΔU_g) der Änderung der kinetischen Energie des Kolbens (ΔE_{cp}) gleich ist, ganz abgesehen, ob reversibler oder irreversibler Vorgang vorhanden.

Gleichung (56) kann für keinen der zwei Fälle (reversibel und irreversibel) die Stelle angeben, wo eine bestimmte Temperatur oder K-Geschwindigkeit (also auch Entwicklungs-Geschwindigkeit des Prozesses) erzielt werden. Sie gibt nur an, welche Temperatur einer gewissen K-Geschwindigkeit oder umgekehrt, entspricht. Als solche wollen wir sie in der Folge benützen; sie führt uns also zur gesuchten Beziehung zwischen T und w:

$$T = T_0 - \frac{A}{2g c_v}(w^2 - w_0^2)\frac{G_p}{G_g}, \tag{58}$$

oder

$$T = \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2g c_v}\left[\left(T_0 \frac{G_g}{G_p}\ \frac{2g c_v}{A} + w_0^2\right) - w^2\right]. \tag{59}$$

Besserer Anschaulichkeit wegen, bezeichnen wir

$$C = \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2g c_v}, \tag{60}$$

$$D^2 = T_0 \frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2g c_v}{A} + w_0^2. \tag{61}$$

Somit, (59) wird:

$$T = C(D^2 - w^2). \tag{62}$$

2. 1. d. *Die integrierte Gleichung der Adiabate in V, w und T, V—Koordinaten.*

Aus (62), durch Differentiation, erhalten wir:

$$dT = -2Cw\,dw. \tag{63}$$

Tragen wir T aus (62) in (51) ein, so wird die Molekelngeschiwindigkeit c:

$$c = \sqrt{3gRT} = \sqrt{3gRC(D^2 - w^2)}. \tag{64}$$

Wenn wir nun (62), (63), (64) in (52) einsetzen, erhalten wir:

$$-\frac{2Cw\,dw}{C(D^2 - w^2)} + (k-1)\left[1 - \frac{aw}{\sqrt{3gRC(D^2 - w^2)}}\right]\frac{dV}{V} = 0, \tag{65}$$

oder

$$(k-1)\frac{dV}{V}=\frac{2w\,dw}{(D^2-w^2)\left[1-\dfrac{aw}{\sqrt{3gRC(D^2-w^2)}}\right]}. \tag{66}$$

Durch Integration ergibt sich

$$\left|\ln V^{k-1}\right|_{V_0}^{V}=2\int_{w_0}^{w}\frac{w\,dw}{(D^2-w^2)\left[1-\dfrac{aw}{\sqrt{3gRC(D^2-w^2)}}\right]}. \tag{67}$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung zu integrieren, wenden wir die Substitution.

$$u=\frac{w}{\sqrt{(D^2-w^2)}} \tag{68}$$

an, wodurch (67) folgende Form annimmt:

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}=2b_1\int\frac{u\,du}{(u^2+1)\,(b_1-u)}. \tag{69}$$

worin wir

$$b_1=\frac{1}{a}\sqrt{3gRC} \tag{70}$$

bezeichneten. Zwecks Integration von (69), zerlegen wir die rechte Seite in einfache Brüche, wonach wir Folgendes erhalten (für $w_0=0$):

$$\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}=\frac{2b_1^2}{b_1^2+1}\left[\ln\frac{D\cdot b_1}{b_1\sqrt{D^2-w^2}-w}-\frac{1}{b_1}\operatorname{arc\,tg}\frac{w}{\sqrt{D^2-w^2}}\right], \tag{71}$$

oder

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}=\left[\frac{D^2\cdot b_1^2\cdot e^{\frac{2}{b_1}\cdot\operatorname{arc.tg}\frac{w}{\sqrt{D^2-w^2}}}}{(b_1\sqrt{D^2-w^2}-w)^2}\right]^{\frac{b_1^2}{b_1^2+1}} \tag{72}$$

oder auch

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}=\left[\frac{D^2}{D^2-w^2}\cdot\frac{\operatorname{Exp.}\left(-\dfrac{2}{b_1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{D^2}{w^2}-1}}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{b_1\sqrt{\dfrac{D^2}{w^2}-1}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{1+\frac{1}{b_1^2}}} \tag{73}$$

Mit Bezug auf C [nach (60)], und auf $c_v = AR/k\text{-}1$, ergibt sich für b_1, aus (70):

$$b_1 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{G_p}{G_g}\cdot\frac{3}{2}\,(k-1)} \tag{74}$$

und

$$\frac{1}{b_1^2} = a^2\cdot\frac{G_g}{G_p}\cdot\frac{2}{3(k-1)}. \tag{75}$$

Unter Benützung von (74), (75), (61), ergibt sich für (73)

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1} = \left[\frac{1}{1-\dfrac{w^2}{T_0\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}+w_0^2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\operatorname{Exp}\left(-2a\sqrt{\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{k-1}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{T_0\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}+w_0^2}{w^2}-1}}\right)}{\left(1-\dfrac{a\sqrt{\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{k-1}}}{\sqrt{\dfrac{T_0\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}+w_0^2}{w^2}-1}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{1+a^2\frac{G_g}{G_p}\cdot\frac{2}{3(k-1)}}} \tag{76}$$

Dies ist die Gleichung der irreversiblen Adiabate ($\delta_m \neq 1$) im $w - V$ Koordinatensystem. Für einatomige Gasmolekeln ist $k = \frac{5}{3}$, und, in der Voraussetzung $w_0 = 0$, erhalten wir, aus (76):

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1} = \left[\frac{1}{1-\dfrac{w^2}{T_0\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}}}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{Exp.}\left(-2a\sqrt{\dfrac{G_g}{G_p}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{T_0}{w^2}\cdot\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}-1}}\right)}{\left(1-\dfrac{a\sqrt{\dfrac{G_g}{G_p}}}{\sqrt{\dfrac{T_0}{w^2}\cdot\dfrac{G_g}{G_p}\cdot\dfrac{2g\,c_v}{A}-1}}\right)^2}\right]^{\frac{1}{1+a^2\frac{G_g}{G_p}}} \tag{77}$$

Die von (76) beschriebene Adiabate (w = veränderlich, $w_0 \neq 0$) im V, T — Koordinatensystem, erhält man aus (73), indem man darin w als Funktion von T [nach (62)] einträgt, und zwar:

$$w^2 = D^2 - \frac{T}{C}. \tag{78}$$

Diese Beziehung zu Hilfe nehmend, drücken wir alle Glieder der Gleichung (73), die die Geschwindigkeit w enthalten, als Funktion von T, folgendermassen aus:

$$\frac{D^2}{w^2} - 1 = \frac{T}{CD^2 - T}, \tag{79}$$

$$\frac{D^2}{D^2 - w^2} = \frac{CD^2}{T}. \tag{80}$$

Das Produkt CD^2 ergibt sich aus (60) und (61):

$$CD^2 = T_0 + w_0^2 \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}. \tag{81}$$

Somit, (79) und (80) werden allmählich:

$$\frac{D^2}{w^2} - 1 = \frac{T}{T_0 - T + w_0^2 \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}} \tag{82}$$

$$\frac{D^2}{D^2 - w^2} = \frac{T_0 + w_0^2 \cdot \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}}{T}. \tag{83}$$

Indem wir (82), (83), (74) und (75) in (73) eintragen, erhalten wir die Gleichung der irreversiblen Adiabate ($\delta_m \neq 1$) im T, V, — Koordinatensystem:

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1} = \left[\frac{T_0 + w_0^2 \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}}{T} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{\text{Exp.}\left(-2a \sqrt{\frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{T_0 - T + w_0^2 \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}}{T}} \right)}{\left(1 - a \sqrt{\frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt{\frac{T_0 - T + w_0^2 \frac{G_p}{G_g} \cdot \frac{A}{2 g c_v}}{T}} \right)^2} \right]^{\frac{1}{1 + a^2 \frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2}{3(k-1)}}} \tag{84}$$

Für Gase mit einatomigen Molekeln und für $w_0 = 0$, letzte Gleichung wird:

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1} = \left[\frac{T_0}{T} \cdot \frac{\text{Exp.}\left(-2a\sqrt{\frac{G_g}{G_p}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{T_0}{T}-1}\right)}{\left(1-a\sqrt{\frac{G_g}{G_p}}\cdot\sqrt{\frac{T_0}{T}-1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{1+a^2\frac{G_g}{G_p}}} \tag{85}$$

oder auch

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1} = \frac{T_0}{T}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a^2\frac{G_g}{G_p}} \cdot \frac{\text{Exp.}\left(-2a\sqrt{\frac{G_g}{G_p}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{T_0}{T}-1}\right)}{\left(1-a\sqrt{\frac{G_g}{G_p}}\sqrt{\frac{T_0}{T}-1}\right)^2}\right]^{\frac{1}{1+a^2\frac{G_g}{G_p}}} \tag{86}$$

In dieser letzten Form, die dem momentanen Irreversibilität anregenden Faktor $\delta_m \neq 1$ entspricht, erscheint die reversible Adiabate als Grenzfall der irreversiblen. Wenn $G_g/G_p \to 0$ die grosse Klammer der Gl. (86) strebt der Einheit und die irreversible Adiabate der reversiblen zu. Es ergibt sich, dass man nur im Falle $G_g/G_p \to 0$ die klassische Gleichung der Adiabate mit befriedigender Annäherung für die Beschreibung unseres Prozesses (adiabate Entspannung in unendlich langem Zylinder) benützen kann.

2. 1. e. *Maximalgeschwindigkeit des Prozesses, w_{max}*

Die maximale Verlaufsgeschwindigkeit der obigen Adiabate stimmt mit der grössten Kolbengeschwindigkeit überein (w_{max}). Um diese zu bestimmen, müssen wir zuerst w als Funktion von t ermitteln $[w=f(t)]$ und dann die Zeit t unendlich werden lassen.

Gleichung (48) liefert uns p das wir in 50 einsetzen, wobei diese

$$\frac{dw}{dt} \cdot \frac{G_p}{g} = S_p\left(1-\frac{aw}{c}\right)\frac{G_g \cdot RT}{V} \tag{86 a}$$

wird. Darin tragen wir $c = f(w)$ aus (64), $V = f(w)$ aus (76) und $T = f(w)$ aus 62, ein. Auf diese Weise erhalten wir eine Differentialgleichung in w, t-Koordinatensystem, welche durch Integration die Funktion $w = f(t)$ liefert; in dieser wollen wir t unendlich werden lassen, wobei sich w_{max} ergibt. Gleichung (76) bietet auch die Möglichkeit w_{max} zu ermitteln, und zwar auf einem kürzeren Weg, indem wir darin die Bedingung $V \to \infty$ stellen. Wenn wir diese Gleichung näher betrachten, bemerken wir, daß $V = \infty$ wenn

$$\frac{T_0\frac{G_g}{G_p}\cdot\frac{2gc_v}{A}+w_0^2}{w_{max}^2} - 1 = a^2 \cdot \frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1}. \tag{87}$$

Daraus enhalten wir:

$$w_{max} = \sqrt{\frac{T_0 \frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2 g c_v}{A} + w_0^2}{a^2 \frac{G_g}{g_p} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k-1} + 1}}. \tag{88}$$

Für Gase mit einatomigen Molekeln ($k = 5/3$) und Anfangsgeschwindigkeit des Kolbens $w_0 = 0$, ergibt sich:

$$w_{max} = \sqrt{\frac{T_0 \frac{G_g}{G_p} \cdot 2 g \frac{R}{\frac{5}{3} - 1}}{a^2 \frac{G_g}{G_p} + 1}} = \sqrt{3 g R T_0 \frac{G_g}{G_p + a^2 G_g}}. \tag{89}$$

2. 1. f. *Maximalgeschwindigkeit des Prozesses auf molekular-kinetischer Grundlage*

Bei der Entspannung nimmt die Molekelngeschwindigkeit (c) ab, und die Kolbengeschwindigkeit (w) zu. In dem Augenblick, wo $aw = c$, hört die Interaktion Gas-Kolben auf, da, wie aus (86 a) zu ersehen ist, $dw/dt = 0$, also der Kolben wird nicht mehr beschleunigt. Mit anderen Worten, wenn $aw = c$, hört die Energiezufuhr auf, der Kolben hat also seine größte Geschwindigkeit erreicht (w_{max}). Diesem Gedankengang entsprechend, kann diese aus der Gleichung der Energieerhaltung des Systems Gas-Kolben ermittelt werden, und zwar nach (56):

$$G_g c_v (T_0 - T) = A \left(\frac{w^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g} \right) G_p. \tag{90}$$

Aus (51)

$$T = \frac{c^2}{3 g R}. \tag{91}$$

Wenn wir (91) sowie $c = aw$ in (90) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{G_g}{G_p} 2 g \frac{R}{k-1} \left(T_0 - \frac{a^2 w^2}{3 g R} \right) = w^2 - w_0^2, \tag{92}$$

woraus sich, für $w_0 = 0$ und $k = 5/3$,

$$w_{max} = \sqrt{3 g R T_0 \frac{G_g}{G_p + a^2 G_g}} \tag{93}$$

ergibt, also identisch mit (89).

2.2. *Die mit veränderlicher Geschwindigkeit durchlaufene Adiabate, bei unendlichem Hub, in der klassischen Annäherung* ($\delta_m = 1$)

Wir sehen, daß, wenn Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit vorhanden, Kolbendruck und Gasdruck verschieden sind, und durch Vermittlung des momentanen Irreversibilität anregenden Faktors δ_m von der Entwicklungsgeschwindigkeit w des Prozesses abhängen, und zwar:

$$p_p = p\,(1 - aw/c) = p\,\delta_m\,, \tag{94}$$

(siehe Gl. 46 a).

Unter (2.1.) untersuchten wir die adiabate Entspannung beim unendlich langen Hub, indem wir die Tatsache, des K — und Gasdruck-Unterschiedes ($p_p \neq p$, oder $\delta_m \neq 1$) in Betracht zogen.

In der Folge wollen wir dieselbe Frage mit Hilfe der *klassischen Thermodynamik lösen, die von der Annahme ausgeht, daß* $p = p_p$ (d.h. $\delta_m = 1$), *obwohl die Entwicklungsdeschwindigkeit des Prozesses* $w \neq 0$. *Das werden wir „klassiche Annäherung" nennen.* Es ist nur gewiß, daß genannte Annäherung zu annähernden Beziehungen und Schlüssen führen wird.

Indem man diese mit den unter Inbezugnahme der Tatsache, daß $p_p \neq p$ (d. h. $\delta_m \neq 1$), im Einklang mit $w \neq 0$, erhaltenen Beziehungen und Schlüssen vergleicht, wird man feststellen können, daß in dem von uns hier untersuchten Problem, die klassische Annäherung ($p = p_p$ oder $\delta_m = 1$) zu nicht befriedigenden Ergebnissen führt.

2. 2. a. *Das den klassisch betrachteten Prozeß beschreibende Gleichungensystem*

In der Voraussetzung $\delta_m \approx 1$, ändern sich alle Gleichungen (im Paragraph 2.1.a), die diese Größe enthalten. Also:

Statt (47) und (50), benützen wir

$$G_g\, c_v\, dT + Ap\, dV = 0 \tag{95}$$

und

$$S_p\, p = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{G_p}{g}\,. \tag{96}$$

Die Zustandsgleichung (48) sowie der Ausdruck der Molekelngeschwindigkeit (51) (der eine Beziehung zwischen c und T darstellt) behalten auch hier ihre Form, mit dem Unterschied, daß darin R, T, c Gleichgewichts-Parameter sind (also nicht Mittelwerte):

$$pV = G_g RT \tag{97}$$

$$c = \sqrt{3\,g\,RT} \tag{98}$$

Der Ausdruck der Zeit-Volumenänderung (49) bleibt unverändert:

$$dV = S_p \cdot w dt\,. \tag{99}$$

2. 2. b. *Die Gleichung der Adiabate in klassischer Annäherung in T, V- und V, w — Koordinatensystem.*

Wie allgemein bekannt, sind die Gleichungen der klassischen Adiabate:

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\frac{dV}{V} \tag{100}$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}. \tag{101}$$

Man kann auch in diesem Fall die Gleichung der Adiabate im V, w-Koordinatensystem ausdrücken, indem man T als Funktion von (w) einsetzt. Dazu brauchen wir eine Beziehung zwischen T und w, die wir durch Einsetzung von p aus (96) in (95) erhhalten:

$$G_g c_v\, dT + \frac{A}{g} \cdot \frac{G_p}{S_p} \cdot \frac{dw}{dt} \cdot dV = 0; \tag{102}$$

darin tragen wir dV aus (99) ein, und so ergibt sich

$$G_g c_v\, dT + A G_p d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = 0, \tag{103}$$

also identisch mit (55).

Infolgedessen, Gleichung (62),

$$T = C(D^2 - w^2), \tag{104}$$

ist auch hier gültig. C ergibt sich aus (60), und D^2 aus (61). Indem wir T aus (104) in (101) eintragen, ergibt sich die Gleichung des adiabaten Prozesses in der klassischen Annäherung, im V, w-Koordinatensystem:

$$\frac{T_0}{C(D^2 - w^2)} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{k-1}. \tag{105}$$

Wie wir am Ende des Paragraphen 2.1.d. erwähnten, Gleichung 105 kann nur dann befriedigend benützt werden, wenn $G_g/G_p \to 0$.

2. 2. c. *Die Maximalgeschwindigkeit w_{max} des untersuchten Prozesses* in klassischer Annäherung $(\delta_m \approx 1)$.

Die Vorgangsweise ist dieselbe wie unter 2.1. e. vorgeschlagen, d.h. wir drücken w als Funktion von t aus $[w = f(t)]$, und lassen darin t unendlich werden $(t \to \infty)$.

Wir tragen p aus (97) in (96) ein:

$$S_p \cdot \frac{G_g RT}{V} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{G_p}{g}. \tag{106}$$

Nach (105),

$$V = V_0 \left[\frac{T_0}{C\,(D^2 - w^2)} \right]^{\frac{1}{k-1}} . \tag{107}$$

Wir setzen V aus (107) und T aus (104) in (106) ein, und so ergibt sich eine Differentialgleichung in t, w-Koordinaten:

$$S_p \frac{G_g}{G_p} g R \cdot \frac{C\,(D^2 - w^2)}{V_0 \left[\frac{T_0}{C\,(D^2 - w^2)} \right]^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{dw}{dt} . \tag{108}$$

Mit Bezug auf (60) und (61):

$$\frac{T_0}{C} = D^2 - w_0^2 \tag{109}$$

und

$$S_p \cdot \frac{G_g}{G_p} g R C = \frac{S_p A R}{2 c_v} = S_p \cdot \frac{k-1}{2} . \tag{110}$$

Indem wir in (108) die Veränderlichen ersetzen und trennen, ergibt sich Gleichung

$$dt = \frac{V_0}{S_p} \cdot \frac{2}{k-1} \cdot \frac{\left(\frac{D^2 - w_0^2}{D^2 - w^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}}{D^2 - w^2} \cdot dw , \tag{111}$$

die, durch Integration, für Gase mit einatomigen Molekeln ($k = 5/3$), zu

$$t = \frac{3\,V_0}{S_p D} \left[\frac{1}{\left(\frac{D}{w^2} - 1 \right)^{1/2}} + \frac{1}{3 \left(\frac{D^2}{w^2} - 1 \right)^{3/2}} \right] \tag{112}$$

führt. Dies ist die Gleichung der Adiabate in der klassischen Annäherung, im t, w-Koordinatensystem. Daraus könnte man w explizit als Funktion von t, ausdrücken. Unserem Ziel gemäß, bei der Ermittlung von w_{max} können wir auch (112) benützen, indem wir darin t unendlich werden lassen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$w_{max} = D . \tag{113}$$

Nach (61), ergibt sich

$$w_{max} = \sqrt{T_0 \frac{G_g}{G_p} \cdot \frac{2 g c_v}{A} + w_0^2}. \tag{114}$$

Für Gase mit einatomigen Molekeln und bei $w_0 = 0$, aus (114) erhalten wir:

$$w_{max} = \sqrt{T_0 \frac{G_g}{G_p} \cdot 2 g \frac{R}{k-1}} = \sqrt{3 g R T_0 \frac{G_g}{G_p}}. \tag{115}$$

Man kann auf einfachere Weise zum selben Ergebnis kommen, indem man in Gl (105) die Bedingung $V \to \infty$ (die mit $t \to \infty$ übereinstimmt) stellt und dabei $w_{max} = D$ erhält.

2. 3. *Die Änderung der Kolbengeschwindigkeit mit der Zeit und dem Gewichtsverhältnis Gas-Kolben* (G_g/G_p).

Wir fanden bisher die den Prozeß beschreibenden Gleichungen sowohl im Falle der klassischen Annäherung, als auch im Falle des wirklichen Geschehens, d.h. der Irreversibilität.

In der Folge nehmen wir uns vor, die zwei Methoden aus dem Standpunkt der Richtigkeit ihrer Ergebnisse sowie der Reichweite der Anwendung der klassischen Annäherung.

Zu diesem Zweck wollen wir die Änderung der Kolbengeschwindigkeit als Funktion von Zeit und vom Verhältnis G_g/G_p verwenden. Anfangsgeschwindigkeit des Kolbens gleich Null wird angenommen. Somit nimmt diese, von Null anfangend, und asymptotisch einer Maximalgeschwindigkeit zustrebend, zu, wie von Gl (112) und (77) angedeutet.

a. *Die Lösung in der klassischen Annäherung* $(\delta_m \approx 1)$.

Nach (115) ist die Maximalgeschwindigkeit des Kolbens in der klassischen Annäherung:

$$w_{max} = \sqrt{3 g R T_0 \cdot \frac{G_g}{G_p}}.$$

Diese wollen wir mit der mittleren Molekelngeschwindigkeit des Gases im Anfangszustand vergleichen. Da diese letzte

$$c_0 = \sqrt{3 g R T_0}$$

ist, es ergibt sich

$$w_{max} = c_0 \sqrt{\frac{G_g}{G_p}},$$

als Funktion von c_0 und G_g/G_p.

Für einen gegebenen Anfangszustand des Gases kann der Kolben, wie in der Folge, verschiedene Maximalgeschwindigkeiten entwickeln, die dem Gewichtenverhältnis Gaskolben (G_g/G_p) entsprechen, und zwar:

Für

$$G_g/G_p = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_{max} = c_0$$
$$G_g/G_p > 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_{max} > c_0$$
$$G_g/G_p < 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_{max} < c_0$$
$$G_g/G_p \to \infty \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_{max} \to \infty$$

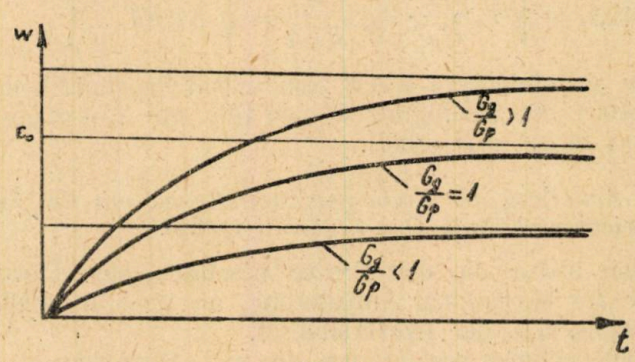


Fig. 5

Aus Abb. 5, für $1 < \frac{G_g}{G_p} < \infty$, ergibt sich $c_0 < w_{max} < \infty$. Dies ist offenbar, aus molekularkinetischem Standpunkt unmöglich, da es zu dem Schluß führt, daß, wenn die Molekeln mit einer abnehmenden Anfangsgeschwindigkeit c_0 auf den Kolben stoßen, diesen zu einer Bewegung zwingen, deren Geschwindigkeit größer wie die Anfangsgeschwindigkeit der Molekeln wird.

Das bedeutet, daß, in ähnlichen Problemen, wo große Geschwindigkeiten vorkommen, der Einfluß der endlichen Geschwindigkeit des Prozesses auf den Kolbendruck nicht mehr ignoriert werden kann, infolge dessen die von der klassischen Annäherung gelieferten Beziehungen nicht mehr befriedigend angewendet werden können.

b. *Lösung im Falle* $\delta_m \neq 1$.

In diesem Fall befinden wir uns im Bereich der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in den thermischen Maschinen.

In (93) erhielten wir:

$$w_{max} = \sqrt{3\,g\,R\,T_0\,\frac{G_g}{G_p + a^2 G_g}} = \frac{c_0}{\sqrt{a^2 + \frac{G_p}{G_g}}}.$$

Wenn der Irreversibilität deutende a^2-Wert dem Verhältnis G_p/G_g gegenüber sehr klein ist, die Beziehung von w_{max} führt zu denselben

Schlüssen, wie in der klassischen Annäherung. In allen übrigen Fällen gelangt man zu folgenden Schlüssen:

$$\text{Für} \quad G_g/G_p = 1 \quad \ldots \quad w_{max} = \frac{c_0}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$G_g/G_p > 1 \quad \text{oder} \quad G_p/G_g < 1 \quad \ldots \quad w_{max} > \frac{c_0}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$G_g/G_p \to \infty \quad \text{oder} \quad G_p/G_g \to 0 \quad \ldots \quad w_{max} \to \frac{c_0}{a}$$

$$G_g/G_p < 1 \quad \text{oder} \quad G_p/G_g > 1 \quad \ldots \quad w_{max} < \frac{c_0}{\sqrt{a^2+1}}$$

Aus Abb. 6 geht hervor, daß man, unabhängig vom Gewichtsverhältnis Gas-Kolben, die Maximal-Geschwindigkeit des Kolbens (damit auch des Prozesses) den Wert c_0/a, welcher von der mittleren Anfangsgeschwindigkeit der Gasmolekeln und von der Irreversibilität deutenden Größe „a" bestimmt wird, nicht überschreiten kann.

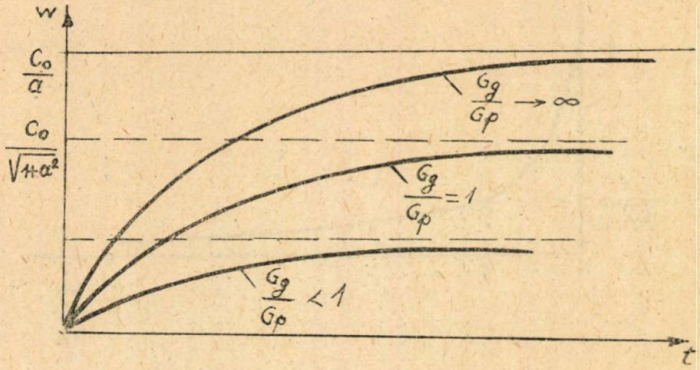


Fig. 6

2. 4. *Vergleich zwischen den Maximalgeschwindigkeiten bei klassischer Annäherung* ($\delta_m \approx 1$) *und bei Irreversibilität* ($\delta_m \neq 1$), *wenn freie Kolbenbewegung im unendlich langen Zylinder vorhanden.*

In den vorangehenden Paragraphen fanden wir die Ausdrücke der vom Titel gemeinten Maximalgeschwindigkeiten $w_{max\ kl}$ und $w_{max\ ir}$. Zu deren Vergleich betrachten wir ihr Verhältnis

$$\mu = \frac{w_{max\ ir}}{w_{max\ kl}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{G_p}{G_g}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{G_g}{G_p}}},$$

woraus

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{a^2 \frac{G_g}{G_p} + 1}} .$$

Wir stellen fest, daß:

$$\text{Für } \frac{G_g}{G_p} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; \mu = 1$$

$$\text{Für } \frac{G_g}{G_p} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; \mu = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\text{Für } \frac{G_g}{G_p} = \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; \mu = 0 .$$

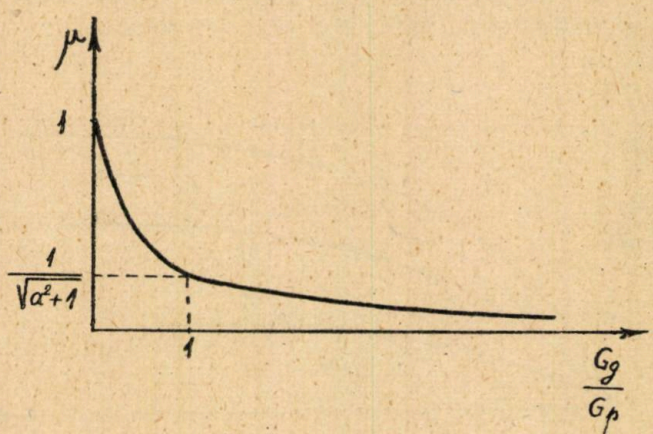


Fig. 6 a

Auf Grund dieser Werte, die Abb. (6 a) veranschaulicht uns die Abhängigkeit von μ vom Gewichtsverhältnis Gas-Kolben. Danach ist die klassische Annäherung nur dann annehmbar, wenn $\frac{G_g}{G_p}$ in der Nähe von Null liegt. Widrigenfalls die dieser Annäherung anhaftenden Fehler zu grob werden, da $\mu \to 0$. In solchen Fällen, wenn die Maximalgeschwindigkeit w_{max} mit Hilfe der Formel der klassischen Annäherung berechnet wird, muß sie mit dem der Abbildung (6 a) entnommenen Wert von μ multipliziert, oder am besten mit Hilfe der Irreversibilitätsformel berechnet werden.

2. 5. *Energiegleichnng und Energieumwandlung. Die adiabate Unerreichbarkeit der Temperatur 0°K im Wege der endlichen Entspannungs-Geschwindigkeit.*

Das unter 2 bis 2.4. angenommene mechanische Modell bestand aus zwei Körpern: Gas und Kolben. Im Anfangszustand besitzt der erste die größte und der letzte die kleinste Energie. Indem wir den zwei Körpern die Möglichkeit einer Interaktion verschaffen, ändert sich, nach einer gewissen Zeit, der energetische Zustand der einzelnen Körper: die Energie des Kolbens nimmt zu, während die des Gases abnimmt. Es muß die Frage beantwortet werden: welche ist die Grenze der Energiezunahme des einen und die der Energieabnahme des anderen?

a. *Die klassische Annäherung* ($\delta \approx 1$)

Aus 56 ergibt sich die innere Gasenergie nach der Erreichung der Maximalgeschwindigkeit des Kolbens w_{max}, wenn sein Anfangsgeschwindigkeit $w_0 = o$, wie folgt:

$$\Delta U_g + \Delta E_{cp} = 0 .$$

Darin ΔU_g = innere Gasenergie und E_{cp} = kinetische Energie des Kolbens. Diese Gleichung kann man nach (56) schreiben:

$$G_g c_v (T - T_0) + A\left(\frac{w_{max}^2}{2g} - \frac{w_0^2}{2g}\right) G_p = 0 .$$

Mit

$$w_{max} = \sqrt{3 g R T_0 \frac{G_g}{G_p}} \; ; \quad w_0 = 0 \; ; \quad k = \frac{5}{3} \text{ (einatomige Gasmolekeln)},$$

ergibt sich $T = 0°K$, also $U_g \underset{t \to \infty}{=} 0$.

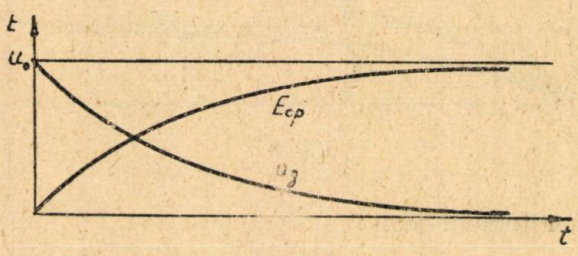


Fig. 7

Der Abbildung 7 entnimmt man, daß, in dem Maße wie die kinetische Energie des Kolbens dem Maximalwert $A G_p w_{max}^2 \, 2g$ zustrebt, die innere Gasenergie Null wird.

Zum selben Schluß kommt man, auch wenn man die Endtemperatur T aus der Gleichung der reversiblen Adiabate ermittelt, und zwar für $V \to \infty$.

b. — *Die Lösung wenn* $\delta_m \neq 1$.

Wir bezeichnen U_{gf} = innere Energie dess Gases im End- und U_{g_0} im Anfangszustand. Die Energiegleichung (56) kann also, wenn Maximalgeschwindigkeit (w_{max}) auftritt ($w_0 = 0$ vorausgesetzt), geschrieben werden:

$$U_{gf} - U_{g_0} + \frac{A w_{max}^2}{2g} G_p = 0.$$

Da nach (93)

$$w_{max}^2 = 3g RT_0 \frac{G_g}{G_p + a^2 \cdot G_g},$$

ergibt sich, wenn man $G_g T_0 = \frac{U_{g_0}}{c_v}$ und $AR/c_v = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ einsetzt,

$$U_{gf} = U_{g_0} \left(\frac{a^2 G_g}{a^2 G_g + G_p} \right) \neq 0.$$

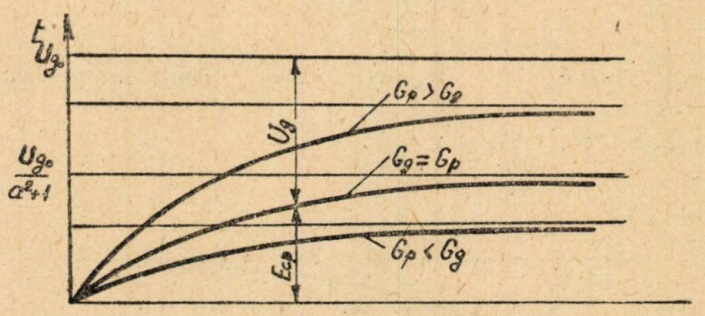


Fig. 8

Der Abb. 8 entnimmt man:

Die innere Energie des Gases kann nicht bis Null abnehmen, wenn auch $t \to \infty$; *man kann also mittels adiabater Entspannung, mit endlicher Geschwindigkeit, die absolute Nulltemperatur nicht erreichen. Je größer das Verhältnis der interaktiven Körpergewichte (Gas — Kolben), desto größer die innere Energie des Gases im Endzustand und umgekehrt.*

2. 6. *Die Darstellung der adiabaten Entspannung im unendlich langen Zylinder mit frei bewegendem Kolben, in P, V-und T, S-Koordinaten.*

Die reversible Adiabate (Abb. 9) schneidet die S-Achse. Die vom selben Anfangszustand ausgehende irreversible Adiabate (dick gezogen) strebt asymptotisch einer Isotherme $T_{min} > 0$ zu. Die Isotherme entspricht

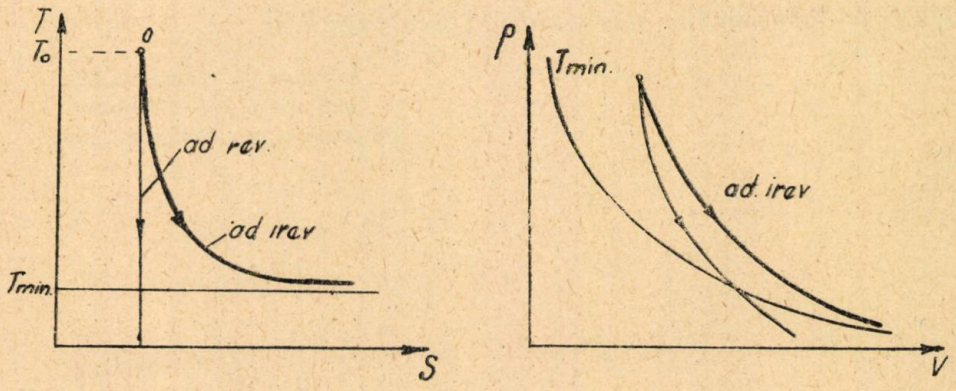


Fig. 9

der kleinsten erzielbaren absoluten Temperatur, die nicht Null sein kann, und dem Verhältnis der interaktiven Körpergewichte Genüge leistet (wenn $V \to \infty$ und $T_{min} \neq 0$, weil $U_{gf} \neq 0$).

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Wie es sich aus den ersten Kapitel ergab, können adiabate Vorgänge, die mit variabler Kolbengeschwindigkeit und endlichem Hub stattfinden, auf Grund von solchen Gleichungen untersucht werden die für Adiabaten mit konstanter Geschwindigkeit gelten, wenn diese letzte der mittleren mit dem Abweichungskoeffizienten „a_1" multiplizierten Entwicklungs-Geschwindigkeit gleich ist. Der fragliche Koeffizient ergibt sich aus Gleichung (45) und dem Diagramm (3).

Was die adiabaten Vorgänge mit variabler Geschwindigkeit und unendlich langem Hub betreffen (siehe Kap 2), gelangt man zu folgenden Schlüssen:

Zur Untersuchung solcher Prozesse, benützt man die klassische Annäherung ($\delta_m = 1$) nur wenn das Verhältnis G_g/G_p in der Nähe von Null

liegt. In den übrigen Fällen muss man unbedingt an die Formel appellieren, die sich unter Inbezugnahme der Irreversibilität ergaben (Paragraph 2.4).

— *Unabhängig vom Verhältnis G_g/G_p kann die maximale K—Geschwindigkeit den Wert c_0/a (Paragraph 2.3) nicht überschreiten. Es gibt also eine grösstmögliche Geschwindigkeit der thermodynamischen Vorgänge, die vom Anfangszustand des System (c_0) abhängt.*

— *Die absolute Nulltemperatur 0°K ist, im Wege einer irreversiblen adiabaten Entspannung, unerreichbar (Paragraph 2,5).*

Lehrstuhl für Thermotechnik
und thermische Maschinen.
Polytechnisches Institut Bukarest

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

MAŞINI TERMICE

C.Z : 621.434.1

UNELE PROBLEME DE DINAMICĂ ALE MOTOARELOR IN PATRU TIMPI CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI *)

TRAIAN DUDAŞ

1. Din punct de vedere dinamic, motoarele cu două linii paralele de cilindri ridică unele probleme specifice, de pildă stabilirea cuplajului optim al aprinderilor între liniile de cilindri şi determinarea decalajului funcţional între liniile de cilindri.

Cuplajul optim al aprinderilor corespunde în general valorii minime a momentului forţelor normale aplicate lagărelor arborilor cotiţi [2].

Decalajul funcţional dintre liniile de cilindri se stabileşte din condiţia repartiţiei uniforme a aprinderilor, sau în legătură cu echilibrajul forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie. Dacă arborii cotiţi se rotesc în sensuri contrare, se preferă uneori decalajul funcţional dintre liniile de cilindri care asigură echilibrarea momentului de basculare produs de forţele normale care acţionează asupra cilindrilor motorului.

În cele ce urmează se studiază problema decalajului funcţional dintre liniile de cilindri la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri. Cei doi arbori cotiţi sînt presupuşi identici, în fiecare linie aprinderile fiind uniform repartizate. În aceste condiţii, echilibrarea momentului de basculare produs de forţele normale ce acţionează asupra cilindrilor se obţin prin rotirea arborilor cotiţi în sensuri contrare şi prin cuplarea aprinderilor din cele două linii de cilindri astfel ca în momentul declanşării unei aprinderi într-o linie, să aibă loc o aprindere şi în cealaltă linie; în consecinţă, la determinarea decalajului funcţional dintre liniile de cilindri, se va avea în vedere numai condiţia repartiţiei uniforme a aprinderilor, şi condiţia realizării unui cît mai bun echilibraj al forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie.

2. Se consideră un motor în patru timpi, cu i cilindri dispuşi în două linii paralele. Fie γ decalajul funcţional dintre liniile de cilindri, exprimat prin unghiul care separă o aprindere oarecare dintr-o linie, de aprinderea imediat următoare din cealaltă linie.

Dacă aprinderile sînt uniform repartizate pentru ansamblul celor două linii, decalajul funcţional dintre linii trebuie să fie egal cu decalajul

*) Manuscris predat la redacţie la 29 decembrie 1964.

dintre două aprinderi consecutive, adică $\gamma = \frac{4\pi}{i}$. Se cercetează echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație pentru acest decalaj funcțional.

Deoarece în fiecare linie de cilindri aprinderile sînt uniform repartizate, vor subsista în fiecare linie armonicile forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație al căror ordin ϱ este un multiplu al jumătății numărului de cilindri din linia respectivă.

$$\varrho = \mu \frac{i}{4} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

Ținînd seama de faptul că ordinul unei armonici este prin definiție un număr întreg, și că la mecanismul bielă-manivelă normal și axat lipsesc armonicile impare începînd cu armonica 3-a, formula generală (1) este valabilă ca atare cînd $\frac{i}{4}$ este un număr par (oricare ar fi tipul de mecanism bielă-manivelă), și cînd $\frac{i}{4}$ este un număr impar, motorul fiind echipat cu mecanisme bielă-manivelă dezaxate. Pentru $\frac{i}{4}$ impar, multipli μ impari duc la ordinul ϱ impare, care nu există, dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate: în acest caz trebuie considerați numai multipli pari ai lui $\frac{i}{4}$, adică

$$\varrho = \mu \frac{i}{2} \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1'}$$

Dacă $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg, ceea ce se întîmplă cînd numărul de cilindri dintr-o linie este impar, formula (1) duce pentru μ impar la ordine care nu există (ordine neîntregi), pentru μ par la ordine pare sau impare, și pentru μ multiplu de patru la ordine pare. Ca urmare, cînd $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg, în locul formulei generale (1) trebuie considerată varianta (1') dacă mecanismele bielă-manivelă sînt dezaxate, și varianta

$$\varrho = \mu \cdot i \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1''}$$

dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate.

Fiecare armonică ce subsistă, dă într-o linie de cilindri o rezultantă de $\frac{i}{2}$ ori mai mare decît armonica de același ordin pentru un cilindru, rezultantă care produce trepidații în planul cilindrilor liniei respective.

Deoarece între liniile de cilindri există decalajul funcțional γ, decalajul ζ dintre rezultantele armonicilor de ordinul ϱ ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație va fi $\zeta = \varrho\gamma$.

La decalajul funcțional $\gamma = \frac{4\pi}{i}$ dintre liniile de cilindri, se obține pentru cazurile în care este direct valabilă formula (1) unghiul $\zeta = \mu\pi$. Dacă $\mu = 2K-1$ ($K = 1, 2, 3, \ldots$), se deduce $\zeta = (2k-1)\pi$, ceea ce înseamnă că rezultantele din fiecare linie ale armonicilor de ordin

$$\varrho = (2k-1)\frac{i}{4}, \tag{2}$$

se echilibrează reciproc; ele produc însă un moment de basculare în jurul unei axe paralelă cu axele de rotație ale arborilor cotiți, deoarece acționează în plane diferite. Dacă $\mu = 2k$, se obține $\zeta = 2k\pi$; rezultantele din fiecare linie ale armonicilor de ordin

$$\varrho = \frac{2ki}{4} = K\frac{i}{2}, \tag{3}$$

se adună, și nu produce moment de basculare.

Pentru cazurile în care este valabilă formula (1') se obține $\zeta = \mu 2\pi$. Rezultantele armonicilor care subsistă în fiecare linie, adică rezultantele armonicilor de ordin $\varrho = \frac{ki}{2}$, sînt în fază, deci se adună, și nu se produce moment de basculare.

Pentru cazurile în care este valabilă formula (1'') se obține $\zeta = \mu 4\pi$, ceea ce înseamnă că rezultantele armonicilor care subsistă în fiecare linie, și care în cazurile considerate au ordinele

$$\varrho = ki, \tag{4}$$

sînt în fază; ele se adună și nu produc moment de basculare.

Conform celor de mai sus, se constată că alegerea decalajului funcțional dintre liniile de cilindri care asigură repartiția uniformă a aprinderilor, conduce la următorul echilibraj al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație: pentru întregul motor subsistă numai armonicile ale căror ordine sînt date de formula (3), respectiv de formula (4), dacă $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg și mecanismele bielă-manivelă sînt axate; cînd $\frac{i}{4}$ este un număr par, sau cînd $\frac{i}{4}$ este un număr impar și mecanismele bielă-manivelă sînt dezaxate, armonicile ale căror ordine sînt date de formula (2) produc un moment de basculare în jurul unei axe paralelă la axele de rotație ale arborilor cotiți.

În comparație cu motorul în patru timpi cu i cilindri în linie și aprinderi uniform repartizate, motorul în patru timpi cu i cilindri în două

linii paralele și aprinderi uniform repartizate are același echilibraj al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, sau un echilibraj mai bun, dacă $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg, și mecanismele bielă-manivelă sînt axate; la motorul cu două linii paralele, pot exista dezechilibre suplimentare, corespunzătoare unor momente de basculare.

Dacă ordinea de aprindere în fiecare linie este stabilită, există $\frac{i}{2}$ posibilități de cuplare a aprinderilor între cele două linii de cilindri, deoarece după aprinderea unui cilindru dintr-o linie, poate urma aprinderea oricăruia din cei $\frac{i}{2}$ cilindri ai celeilalte linii. Cînd numărul cilindrilor din fiecare linie este par, arborii cotiți pot fi realizați cu plan central de simetrie, soluție care echilibrează momentele externe ale tuturor forțelor de inerție; în acest caz, cuplajul optim al aprinderilor între cele două linii de cilindri corespunde valorii minime a momentului forțelor normale aplicate arborilor cotiți. Cînd numărul cilindrilor din fiecare linie este impar, momentele externe ale forțelor de inerție nu mai sînt echilibrate și ca urmare poate deveni mai avantajos cuplajul aprinderilor între cele două linii de cilindri care conduce la valori minime ale momentelor externe.

3. Dacă $\frac{i}{4}$ este un număr impar și mecanismele bielă-manivelă sînt axate, sau dacă $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg și mecanismele bielă-manivelă sînt dezaxate, se poate îmbunătăți echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație pentru ansamblul celor două linii, alegînd decalajul funcțional $\gamma = \frac{2\pi}{i}$ dintre liniile de cilindri.

În adevăr, în cazurile considerate, subsista în fiecare linie armonicile ale căror ordine sînt date de formula (1'). Avem deci $\zeta = \mu \frac{i}{2} \cdot \frac{2\pi}{i} = \mu\pi$. Pentru multiplii μ impari, adică pentru armonicile ale căror ordine sînt

$$\varrho = (2k-1)\frac{i}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

rezultatele din cele două linii sînt permanent în opoziție, deci se echilibrează; ele produc însă un moment de basculare. Pentru multipli μ pari, deci pentru armonicile ale căror ordine sînt

$$\varrho = 2k\frac{i}{2} = ki,$$

rezultantele din cele două linii se adună, deoarece sînt în fază; ele nu produc momente de basculare.

În cazurile considerate, folosirea decalajului funcțional $\gamma = \frac{2\pi}{i}$ dintre liniile de cilindri, în locul decalajului funcțional $\gamma = \frac{4\pi}{i}$, asigură pentru ansamblul celor două linii echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt date de formula (5). Aceste armonici produc însă un moment de basculare.

La decalajul funcțional $\gamma = \frac{2\pi}{i}$ dintre liniile de cilindri nu se mai obțin aprinderi uniform repartizate pentru ansamblul celor două linii, fapt care mărește variațiile momentului motor rezultant. Se știe că la motoarele cu cilindri identici și cu aprinderi uniform repartizate momentul motor rezultant comportă numai armonicile ale căror ordine sînt un multiplu al numărului de cilindri. În cazul cercetat, momentul motor rezultant al fiecărei linii va avea deci numai armonicile ale căror ordine q sînt multipli de $\frac{i}{2}$

$$q = m \cdot \frac{i}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

Deoarece motorul este în patru timpi, pulsația armonicii de ordinul q a momentului motor pentru un cilindru este $q\frac{\omega}{2}$, unde ω este viteza unghiulară de rotație a arborelui cotit. Decalajul θ dintre armonica q a momentului motor rezultant dintr-o linie și armonica de același ordin a momentului motor rezultant din cealaltă linie va fi $\theta = q\frac{\gamma}{2}$; avînd în vedere formula (6) se obține

$$\theta = m\frac{i}{2} \cdot \frac{2\pi}{2i} = m \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $m = 2k\text{-}1$, adică pentru armonicile al căror ordin este un multiplu impar al numărului de cilindri dintr-o linie, decalajul θ este un multiplu impar de $\frac{\pi}{2}$, deci aceste armonici vor da o rezultantă pentru ansamblul celor două linii, fapt care nu s-ar fi produs dacă aprinderile ar fi fost uniform repartizate. Momentul motor rezultant mai are armonicile care corespund la $m = 4K$, adică armonicile $q = 2ki$; armonicile care corespund valorii $m = 2(2k\text{-}1)$ se echilibrează reciproc, deoarece decalajul θ este în acest caz un multiplu impar de π.

Repartiția neuniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii, antrenează armonici mai mari și mai numeroase pentru momentul motor

rezultant. De exemplu, pentru un motor cu 12 cilindri în două linii paralele, la decalajul funcțional dintre liniile de cilindri care asigură repartiția uniformă a aprinderilor, momentul motor rezultant păstrează numai armonicile 12, 24, 26, 48... în timp ce la decalajul $\gamma = \frac{2\pi}{i}$ momentul motor rezultant va avea armonicile 6, 18, 24, 30, 42, 48, 54...

4. Dacă $\frac{i}{4}$ nu este un număr întreg și mecanismele bielă-manivelă sînt axate, se poate îmbunătăți echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, folosind decalajul funcțional $\gamma = \frac{\pi}{i}$.

Această particularitate rezultă din faptul că, în cazul considerat, subsistă în fiecare linie armonicile ale căror ordine sînt date de formula (1″); avem deci $\zeta = \mu i \frac{\pi}{i} = \mu\pi$. Pentru μ impar, adică pentru armonicile ale căror ordine sînt multipli impari ai numărului de cilindri, rezultantele din cele două linii sînt în opoziție, deci se echilibrează; ele produc însă un moment de basculare. Pentru μ par, adică pentru armonicile ale căror ordine sînt $\varrho = 2ki$, rezultantele din cele două linii sînt în fază, deci se adună; ele nu produc momente de basculare.

Pentru cazul considerat se constată că folosirea decalajului $\gamma = \frac{\pi}{i}$, în locul decalajelor $\gamma = \frac{4\pi}{i}$ sau $\gamma = \frac{2\pi}{i}$, conduce la echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt $\varrho = (2k\text{-}1)i$. Aceste armonici produc însă un moment de basculare. Totodată, decalajul funcțional dintre liniile de cilindri fiind mai depărtat de decalajul funcțional care asigură repartiția uniformă a aprinderilor pentru întregul motor, momentul motor rezultant va avea variații mai însemnate. În adevăr prin repetarea raționamentului din cazul precedent, se deduce $\theta = m\frac{\pi}{4}$, relație care arată că dintre armonicile momentelor motoare ale celor două linii, se echilibrează numai armonicile care corespund multiplului $m = 4(2k-1)$, adică armonicile al căror ordin este $q = 4(2k-1)\frac{i}{2} = 2(2k-1)i$. Celelalte armonici, precizate de formula (6), subsistă și la momentul motor al ansamblului celor două linii; de exemplu, la motorul cu $i = 2 \times 6$ cilindri, momentul motor va avea în cazul $\gamma = \frac{\pi}{i}$ armonicile $q = 6, 12, 18, 30, 36...$

O privire generală asupra influenței decalajului funcțional dintre liniile de cilindri rezultă din tabela 1, în care au fost concentrate cele deduse mai sus.

Tabela 1

Influența decalajului funcțional dintre liniile de cilindri la motoarele în patru timpi cu două linii paralele

$\frac{i}{4}$	Timpul mecanismului bielă-manivelă	ϱ ($\mu=1,2,3...$)	ζ ($\mu=1,2,3...$)			Ordinile armonicilor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație care subsistă pentru ansamblul celor două luni ($k=1,2,3...$)			Ordinile armonicilor forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație care produc momente de basculare ($k=1,2,3...$)			Ordinile armonicilor momentului motor rezultant ($k=1,2,3...$)		
			$\gamma=\frac{4\pi}{i}$	$\gamma=\frac{2\pi}{i}$	$\gamma=\frac{\pi}{i}$	$\gamma=\frac{4\pi}{i}$	$\gamma=\frac{2\pi}{i}$	$\gamma=\frac{\pi}{i}$	$\gamma=\frac{4\pi}{i}$	$\gamma=\frac{2\pi}{i}$	$\gamma=\frac{\pi}{i}$	$\gamma=\frac{4\pi}{i}$	$\gamma=\frac{2\pi}{i}$	$\gamma=\frac{\pi}{i}$
par	dezaxat	$\mu\frac{i}{4}$	$\mu\pi$	$\mu\frac{\pi}{2}$	$\mu\frac{\pi}{4}$	$k\frac{i}{2}$	$(2k-1)\frac{i}{4}$ ki	$(2k-1)\frac{i}{4}$ $(2k-1)\frac{i}{2}$ $2ki$	$(2k-1)\frac{i}{4}$	$(2k-1)\frac{i}{2}$	$(2k-1)i$	ki	$(2k-1)\frac{i}{2}$ $2ki$	$(2k-1)\frac{i}{2}$ $(2k-1)i$ $4ki$
	axat													
impar	dezaxat	$\mu\frac{i}{2}$	$\mu.2\pi$	$\mu\pi$	$\mu\frac{\pi}{2}$	ki		$(2k-1)\frac{i}{2}$ $2ki$	—					
	axat													
neîntreg	dezaxat													
	axat	μi	$\mu 4\pi$	$\mu 2\pi$	$\mu\pi$	ki		$2ki$	—	—				

Concluzii

Din studiul efectuat se constată că decalajul funcțional dintre liniile de cilindri la motoarele cu două linii paralele influențează echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație și variațiile momentului motor rezultant. În afară de decalajul funcțional care asigură repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii de cilindri, există și alte decalaje, care conduc la îmbunătățirea echilibrajului forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Armonicile acestor forțe de inerție care dau o rezultantă în fiecare linie, dar care se echilibrează pentru ansamblul celor două linii, produc bascularea motorului în jurul unei axe paralelă la axele de rotație ale arborilor cotiți. Totodată, cu cît decalajele funcționale dintre liniile de cilindri sînt mai depărtate de decalajul funcțional care asigură repartiția uniformă a aprinderilor, variațiilor momentului motor rezultant sînt mai mari.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE:

1. * * * Motorul 12 — LDA — 28 pentru locomotiva Diesel-electrică. Uzinele metalurgice Reșița.

2. *G. Bărănescu*: Stabilirea ordinii de aprinderi optime la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri. Studii și cercetări de mecanică aplicată 4/1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

AUTOMATICĂ

C.Z : 621—52

CONSIDERAȚII ASUPRA ELEMENTELOR DE CALCUL PNEUMATICE, CU JET *)

S. FLOREA, I. DUMITRACHE, V. GĂBURICI

1. Introducere

Paralel cu dezvoltarea dispozitivelor de automatizare hidraulice, electrice utilizate în automatizarea și telemecanizarea proceselor de producție, dispozitivele pneumatice cunosc o evoluție însemnată, care permite folosirea acestora pe scară largă la automatizarea proceselor industriale. Ca urmare a avantajelor pe care le prezintă din punct de vedere al siguranței și al preciziei transmiterii comenzilor, dispozitivele pneumatice sînt de neînlocuit în automatizarea multor procese industriale.

În construcția regulatoarelor actuale la care se folosesc semnale de presiune unificate de 0,2 ÷ 1 kgf/cm^2, realizate pe principiul compensării forțelor sînt folosite elemente tipizate ca : membrane elastice, ajutaje, drosele, camere de acumulare, clapete. Pe baza acestora s-au realizat regulatoarele unificate PI sau PID cu gabarite mici și performanțe superioare comparabile cu ale celor electronice. Asemenea regulatoare au fost construite în multe țări, dintre care se menționează : regulatorul Honeywell-Tell-0-Set din S.U.A., Z.P.A. din R.S.C., AUS din U.R.S.S., Metrimpex în R.P.U. etc.

Perfecționarea elementelor și dispozitivelor de automatizare pneumatice a condus la crearea unor instalații de calcul analogic și numeric, folosind ca elemente de bază elementele utilizate în construcția regulatoarelor.

Dispozitivele pneumatice de calcul analogic și numeric realizate cu elemente tipizate nu permit obținerea unor performanțe satisfăcătoare, datorită inconvenientelor prezentate de aceste elemente. De asemenea, constructiv sînt greoaie prezentînd un proces tehnologic de fabricație dificil, membranele avînd o durată de viață scurtă. Frecvența de lucru a acestor dispozitive este relativ mică și ele nu pot lucra la o frecvență mai mare de 10 Hz.

Toate aceste inconveniente au făcut necesară orientarea cercetărilor științifice spre realizarea unor elemente care permit obținerea unor performanțe superioare.

*) Manuscris predat la redacție, la 1 decembrie 1964.

S-au realizat astfel elemente pneumatice a căror principii de funcționare sînt bazate pe interacțiunea aerodinamică a jeturilor de aer, pe mișcarea corpurilor suspendate într-un jet de aer și pe interacțiunea dintre un jet de aer și perete (efectul Coandă).

Aceste elemente pot lucra cu presiuni mult reduse (0—500 mm col.apă) și au o frecvență de lucru de sute de Hz și chiar kHz. Ele sînt miniaturizate, putînd fi realizate pe principiul schemelor imprimate. Varietatea acestor elemente este limitată, obținerea diverselor operații analogice sau numerice putîndu-se face prin mărirea sau micșorarea numărului de elemente tip din schemele de calcul.

2. Calculul elementelor cu două și trei diuze

Principiul de lucru al unui element cu trei diuze bazat pe interacțiunea aerodinamică a jeturilor de aer se poate urmări în figura 1.

Interacțiunea jetului de forță la presiune constantă p_0 din diuza A cu jetul de comandă de presiune variabilă p_c din diuza C va permite recepționarea unui semnal de presiune variabilă p_e în diuza B. Valoarea semnalului recepționat în diuza B pentru un element cu trei diuze este funcție de valoarea semnalului de comandă p_c, aceasta fiind maximă pentru $p_c = 0$.

Studiul analitic pentru elemnte de tipul celui prezentat în figura 1 s-a făcut considerînd orificiile diuzelor circulare. S-au făcut considerații

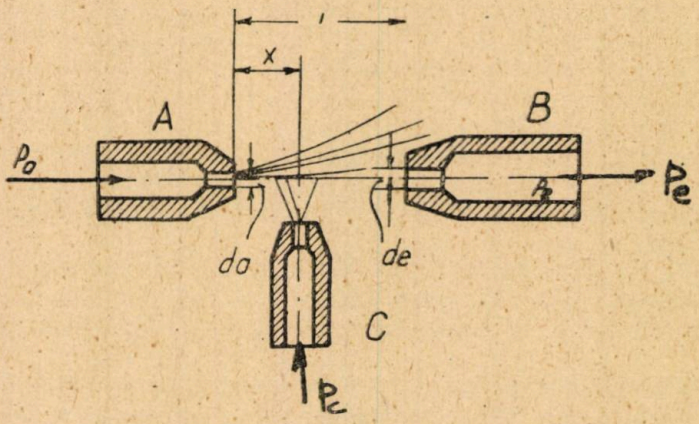


Fig. 1. Schema simplificată a elementului cu trei diuze

asupra caracteristicii statice a elementului cu două diuze A și B adică pentru cazul în care semnalul de comandă $p_c = 0$.

In figura 2 este prezentată schema simplificată a elementului cu două diuze, una de alimentare A și una de recepție B.

Debitul de aer recepționat de diuza B poate fi calculat cu relația [4]:

$$Q = \frac{f \cdot \Delta p}{\zeta^*} \qquad (1)$$

unde : f — secțiunea diuzei receptoare
Δp — căderea de presiune în diuză
ζ^* — coeficient a cărui valoare depinde de : d_a, d_e, 1, p_a.

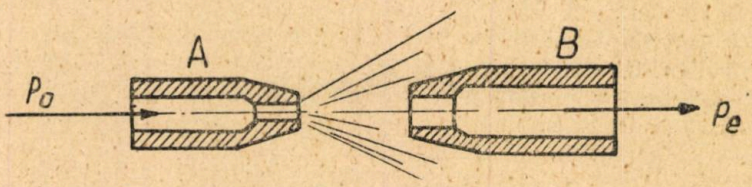


Fig. 2. Schema simplificată a elementului cu două diuze

Pentru cazul $\frac{1}{d_a} > 5$, coeficientul ζ^* poate fi determinat cu relația

$$\zeta^* = 0{,}85 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2\,p_a}{2\left(0{,}3 + 0{,}14\,\frac{1}{d_a}\right)^2 + p_a}} \tag{2}$$

Δp — este o mărime variabilă și depinde de diferența $p_s - p_e$ unde p_s este presiunea aerului în diverse puncte ale jetului captat de diuza receptoare. După cum se poate constata debitul de aer recepționat este funcție de distribuția presiunilor în jetul de aer de alimentare, această distribuție depinzînd de diametrul diuzei A și de distanța 1.

Presupunînd că diuza receptoare ar fi formată din n drosele cu secțiuni elementare debitul total recepționat de diuza B este dat de relația

$$Q = \int_f \frac{p_s - p_e}{\zeta^*}\, df \tag{3}$$

sau scriind sub o altă formă ecuația 3 se obține :

$$\frac{1}{f}\int_f p_s\, df = p_e + \zeta^* \frac{Q}{f}. \tag{4}$$

În cazul cînd $Q = 0$ presiune p_{eo} obținută la ieșirea diuzei B este maximă și egală cu $\frac{1}{f}\int_f p_s\, df$.

Pentru diverse valori ale debitului $Q \neq 0$ presiunea la ieșirea din diuza B va fi :

$$p_e = p_{eo} - \zeta^* \frac{Q}{f}. \tag{5}$$

Pentru o anumită distribuție a jetului de aer și pentru o secțiune f determinată a diuzei B valoarea presiunii p_{eo} este constantă, de unde rezultă liniaritatea caracteristicei statice a elementului cu două diuze.

Ecuația de distribuție a vitezelor într-un jet turbulent [2] este:

$$\frac{W}{W_{max}} = e^{-0,7\left(\frac{y}{y'}\right)^2} \tag{6}$$

Transformările energetice ce au loc în jetul de forță permit a scrie relația de legătură între viteza și presiunea lui la intrările droselelor elementare considerate (diuza B) conform relației de mai jos:

$$\frac{p_s}{p_{s\,max}} = \frac{W^2}{W^2_{max}}. \tag{7}$$

Din relația 6 și 7 rezultă:

$$p_s = p_{s\,max}\, e^{-1,4\left(\frac{y}{y'}\right)^2} \tag{8}$$

Presiunea maximă în diuza B va fi:

$$p_{eo} = \frac{1}{f}\int_f p_s\, df = \frac{4}{d_e^2}\int_0^{\frac{d_e}{2}} p_{s\,max}\, e^{-1,4\left(\frac{y}{y'}\right)^2}\, 2y\,dy. \tag{9}$$

După integrare, pentru presiunea p_{eo} în diuza B se obține expresia:

$$p_{eo} = 2,855\, p_{s\,max}\left(\frac{y'}{d_e}\right)^2\left(1 - e^{-0,35\left(\frac{d_e}{y'}\right)^2}\right). \tag{10}$$

Distribuția vitezelor în axul unui jet turbulent poate fi calculată [6] cu relația:

$$\frac{W_{max}}{W_0} = 0,96\,\frac{R_0}{a}\cdot\frac{1}{x} \tag{11}$$

unde:

W_0 — viteza gazului la ieșirea din diuza A

a — $0,066 \div 0,077$

x — distanța de la diuza A la punctul considerat

R_0 — $\frac{d_a}{2}$

Din relațiile (7) și (11) rezultă presiunea maximă în ax.

$$P_{s\,max} = p_o \cdot K\left(\frac{d_o}{x}\right)^2 \tag{12}$$

în care:

p_0 este presiunea gazului la ieșire din diuza A

$$K = \left(\frac{0,96}{2a}\right)^2.$$

Presiunea maximă în diuza B funcție de distanța x rezultă din relațiile (9) și (12) și este:

$$p_{e0} = K p_0 \left(\frac{d_a}{x}\right)^2 \left(\frac{y'}{d_e}\right)^2 \left(1 - e^{-0{,}35\left(\frac{d_e}{y'}\right)^2}\right). \tag{13}$$

Pentru elementul cu trei diuze, în prezența semnalului de comandă $p_c \neq 0$, (p_0 =const.) distribuția presiunilor în jetul de forță se modifică și semnalul recepționat în diuza B va avea valori diferite, determinate de intensitatea și poziția semnalului de comandă.

În acest caz relațiile de calcul a presiunii în diuza B stabilite pentru cazul $p_c=0$ nu mai pot fi aplicate și este necesar a se lua în considerație impulsul (cantitatea de mișcare) creat de jetul de comandă.

În [2] s-a determinat relația aproximativă de calcul a presiunii în diuza B funcție de p_c pentru o anumită poziție a semnalului de comandă față de diuza A, care este:

$$p_s = p_{s\,max}\, e^{-\frac{1,4}{y'^2}\left(x\frac{S_2 p_2}{S_1 p_1}\right)^2}. \tag{14}$$

Dacă punctul de aplicație a impulsului (cantitatea de mișcare) a semnalului de comandă ocupă diferite poziții, la distanța x de diuza A, presiunea în diuza B poate fi calculată cu relația 9 în care funcția ce se integrează este dată de relația 14.

$$p_{e0} = p_{s\,max} \cdot \frac{8}{d_e^2} \int_0^{\frac{d_e}{2}} e^{-\frac{1,4}{y'^2}\left(x\frac{S_2 p_2}{S_1 p_1}\right)^2} \cdot y\,dy. \tag{15}$$

În relația 15 dacă se înlocuiește $p_{s\,max}$ din 12 se obține:

$$p_{e0} = p_0 K \left(\frac{d_0}{x}\right)^2 \frac{8}{d_e^2} \int_0^{\frac{d_e}{2}} e^{-\frac{1,4}{y'^2}\left(x\frac{S_2 p_2}{S_1 p_1}\right)^2} \cdot y\,dy. \tag{16}$$

După integrarea relației 16 se obține:

$$p_e = K p_0 \left(\frac{d_0}{x}\right)^2 e^{-\frac{1,4}{y'^2}\left(x\frac{S_2 p_2}{S_1 p_1}\right)^2}. \tag{17}$$

Expresiile obținute analitic pentru determinarea presiunii în diuza B, atît pentru elementul cu două diuze cît și pentru elementul cu trei diuze cu secțiune rotundă au fost verificate experimental în laborator. De asemenea s-au realizat elemente similare și prin imprimare cu secțiunea diu-

zelor diferită de cea rotundă și pentru toate cazurile s-au obținut rezultate care confirmă valabilitatea relațiilor stabilite.

Pentru utilizarea acestor elemente în tehnica calculului numeric s-a urmărit obținerea unor caracteristici statice ale acestor ($p_e = f(p_c)$) cît mai apropiată de caracteristica tip releu [2]. Prin alegerea corespunzătoare a parametrilor constructivi și funcționali după mai multe încercări s-au realizat elemente tip bazate pe interacțiunea aerodinamică a jeturilor de aer cu unul sau mai multe semnale de comandă care au stat la baza obținerii unor circuite de calcul numeric.

3. Circuite logice realizate cu elemente pneumatice cu jet

Cu ajutorul elementelor tip realizate în laborator prin imprimare, s-au obținut circuite logice fundamentale utilizate în tehnica calculului.

Pentru reducerea numărului de elemente necesare obținerii circuitelor logice fundamentale pe lîngă elementele prezentate în [2] s-au realizat și alte elemente tip cu ajutorul cărora s-au obținut circuitele logice prezentate în anexa 1.

In anexa 1 sînt arătate unele dintre aceste circuite tip realizate cu elementele pneumatice reprezentate simbolic.

In tabelele de funcționare prin „1" s-a arătat existența semnalului de presiune iar prin „0" absența acestuia.

Pe baza funcțiilor logice prezentate în [2] și în anexa 1 s-au realizat unele circuite de calcul numeric cum ar fi: sumatoare, circuite de memorie etc.

Tabelul 1

X_1	X_2	X_e	Y_e
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

Funcționarea unui sumator binar cu două intrări, dată în tabelul 1 arată că el poate fi realizat cu ajutorul unei „echivalențe" negate ($X_e = \overline{X_1 \sim X_2}$) și cu un element „Și" care realizează transferul în poziția superioară vecină ($Y_e = X_1 \wedge X_2$).

Schema bloc pentru un sumator binar cu două intrări este dat în figura 3a. În figura 3b se prezintă schema principială a sumatorului cu două intrări realizat cu elemente pneumatice descrise mai sus.

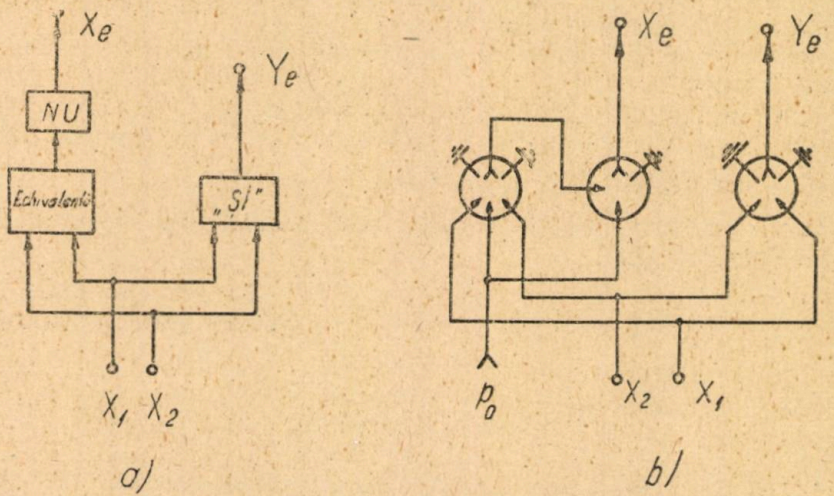


Fig. 3. Schema sumatorului binar cu două intrări

Sumatorul binar cu două intrări poate fi realizat cu elemente logice mai simple (fără echivalență) după următoarele relații logice:

$$X_e = (X_1 \vee X_2) \wedge \overline{(X_1 \wedge X_2)} \tag{18}$$

$$Y_e = X_1 \wedge X_2 \tag{19}$$

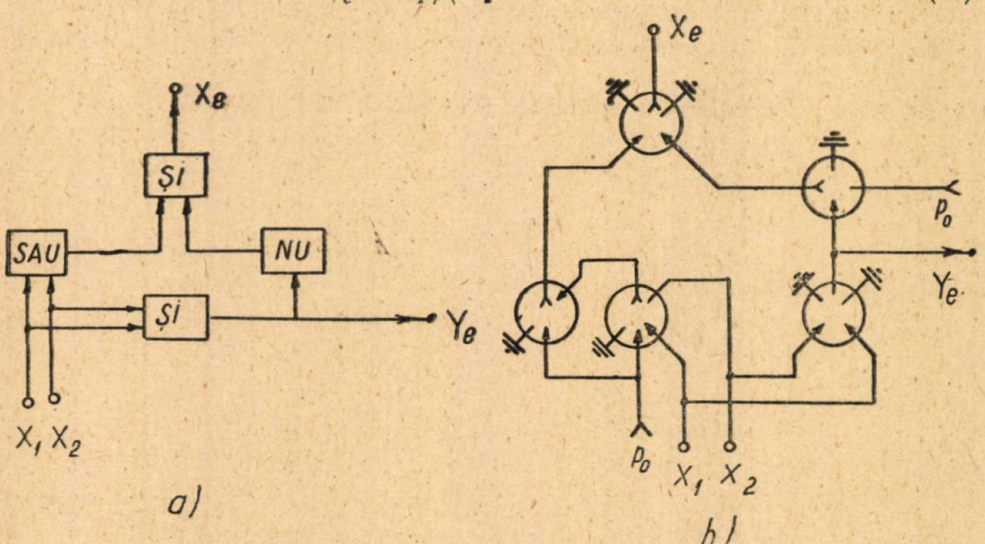


Fig. 4. Varianta a doua a sumatorului binar cu două intrări

Pe baza relațiilor 18 și 19 se obține schema bloc din figura 4a care s-a realizat cu elemente logice pneumatice „ȘI", „SAU", „NU", a cărui schemă principială este dată în fig. 4b.

Elementul SAU din schema logică 4a este realizat în schema 4b cu ajutorul a două elemente, unul NICI și unul NU.

Similar se poate obține și un sumator binar cu trei intrări după expresia logică :

$$X_e = [(X_1 \vee X_2 \vee X_3)] \wedge \overline{[(X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3)]} \vee [x_1 \wedge x_2 \wedge x_3] \quad (20)$$

$$Y_e = (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3). \quad (21)$$

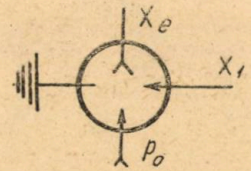
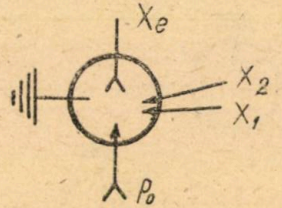
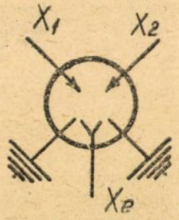
Pentru realizarea acestui sumator sînt necesare trei elemente „SAU și cinci elemente „ȘI".

Catedra de automatică
Institutul politehnic București

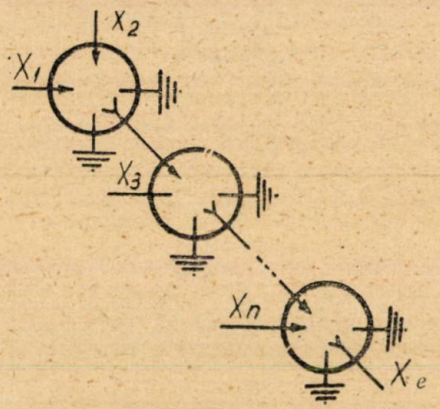
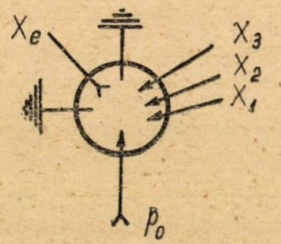
BIBLIOGRAFIE

1. *L. A. Zalmazon:* Osnovî teorii i rasciota elementov pnevmoavtomatiki I.F.A.C. 1960, Moscova.
2. *S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici:* Elemente de calcul numeric, pneumatice, bazate pe interacțiunea curenților de aer. Automatica și Electronica, vol. 8, nr. 2 și 3, 1964.
3. *G. N. Abramovici:* Teoria turbulentnîh strui, Moscova, Maşghiz 1960.
4. *W. E. Gray and Hans Stern:* Fluid amplifiers. Control engineering — februarie 1964.
5. *A. I. Kitov, N. A. Krinețki:* Mașini electronice cifrice și programare, Ed. Tehnică 1963.
6. *Dan Ștefănescu:* Transmisia căldurii și dinamica gazelor. Ed. Didactică și Pedagogică Buc. 1962.
7. *Ed. Nicolau:* Introducere în cibernetică. Ed. Tehnică 1964.

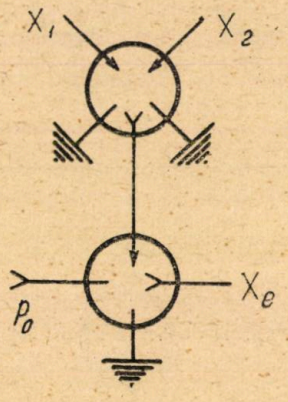
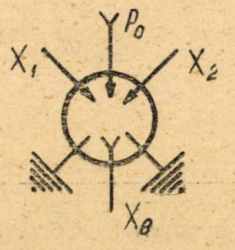
ANEXA 1

Nr. crt.	Funcția logică	Simbolul elementelor logice pneumatice	Tabelul de funcționare	Expresia funcției logice
1	Nu		X_1 | X_e 0 | 1 1 | 0	$X_e = \overline{X_1}$
2	Nici		X_1 | X_2 | X_e 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 0	$X_e = \overline{X_1 \vee X_2}$
3	„Și" cu două intrări		X_1 | X_2 | X_e 0 | 0 | 0 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1	$X_e = X_1 \wedge X_2$

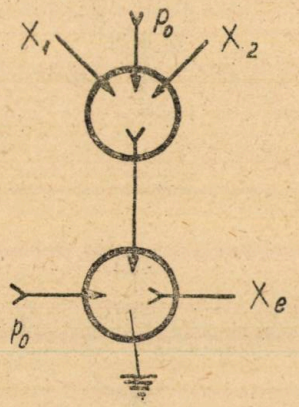
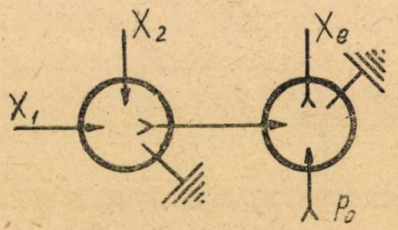
ANEXA 1 (continuare)

Nr. crt.	Funcția logică	Simbolul elementelor logice pneumatice	Tabelul de funcționare	Expresia funcției logice
4	„Și cu mai multe intrări		X_1 X_2 X_3 . . . . . X_n X_e 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 — 1 0 0 1 — 1 0 1 0 — 0 0 1 0 — 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1	$X_e = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \ldots \wedge X_n$
5	„Sau“ cu mai multe intrări		X_1 X_2 X_3 X_e 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1	$X_e = X_1 \vee X_2 \vee X_3$

ANEXA 1 (continuare)

Nr. crt.	Funcția logică	Simbolul elementelor logice pneumatice	Tabelul de funcționare	Expresia funcției logice
6	Schäffer (funcția de incompatibilitate)		X_1 | X_2 | X_e 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0	$X_e = \overline{X_1 \wedge X_2}$
7	Echivalența		X_1 | X_2 | X_e 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1	$X_e = X_1 \sim X_2$

ANEXA 1 (continuare)

Nr. crt.	Funcția logică	Simbolul elementelor logice pneumatice	Tabelul de funcționare	Expresia funcției logice
8	Negarea Echivalenței		X_1 | X_2 | X_e 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0	$X_e = \overline{X_1 \sim X_2}$
9	Implicația		X_1 | X_2 | X_e 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	$X_e = X_1 \rightarrow X_2$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

ELECTRONICĂ

C.Z : 621.374.3

FORMA, PERIOADA ȘI SPECTRUL OSCILAȚIILOR LIBERE IN CIRCUITUL L C CU CAPACITATEA NELINIARĂ A JONCȚIUNII P-N ALIATE *)

MIRCEA PETRESCU

Introducere

Utilizarea tot mai frecventă a capacității neliniare a barierei joncțiunii *p-n* a condus la necesitatea rezolvării unui număr mare de probleme teoretice și practice ; printre acestea un loc deosebit ocupă studiul complect al oscilațiilor în circuitul *L C* cu capacitatea joncțiunii *p-n* aliate (fig. 1). Un asemenea studiu prezintă o importanță deosebită, deoarece circuitele de tipul celui din fig. 1, găsesc în prezent o largă aplicare în radiotehnică și automatică. Unele aspecte ale acestei probleme sînt examinate în [1].

In lucrarea de față autorul își propune să prezinte o metodă nouă de studiu a oscilațiilor libere în circuitul *L C* cu capacitatea joncțiunii *p-n* aliate și să rezolve integral problema determinării formei, perioadei și spectrului acestora.

Pentru a simplifica studiul, s-a presupus că circuitul analizat este conservativ.

Perioada și forma oscilațiilor libere.

In [2] se arată că oscilațiile libere în circuitul din fig. 1 sînt descrise de ecuația :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\, y^2 + y = A_2 , \qquad (1)$$

unde :

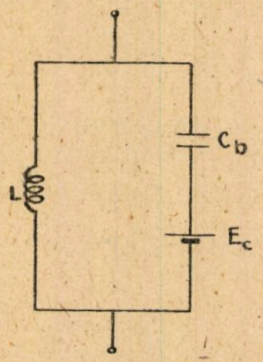
y — sarcina electrică normată acumulată în capacitatea neliniară ;
A_2 — valoarea normată a polarizării aplicate joncțiunii *p-n* ;
τ — variabila temporală exprimată în unități relative.

*) Manuscris predat la redacție la 22 decembrie 1964.

În stabilirea ecuației (1) a fost folosită expresia capacității barierei joncțiunii *p-n* aliate :

$$C_b = C_{b0}\left(\frac{U_0}{u_c + U_0}\right)^{1/2},$$

unde U_c este tensiunea aplicată joncțiunii, care în general poate avea o componentă variabilă și o componentă constantă (E_c) ; U_0 este diferența



Cb – capacitatea barierei joncțiunii p-n aliate

Fig.1

de potențial de contact a joncțiunii $p-n$; C_{b0} este valoarea capacității barierei pentru $u_c = 0$.

Pentru a integra ecuația (1) vom folosi relația :

$$\frac{dy}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} j \sqrt{y^3 + 3y^2 - 6A_2 y - 3A}, \qquad (2)$$

unde A este o constantă de integrare definită în [2], iar $j = \sqrt{-1}$. Din (2) se obțin ușor

$$\int_{y}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + 3y^2 - 6A_2 y - 3A}} = \pm j \frac{\tau}{2\sqrt{3}}, \qquad (3)$$

unde :

$$y_0 = y|_{\tau=0}.$$

În general integrala din partea stîngă a relației (3) nu se poate calcula în funcții elementare. Cu toate acestea, așa cum se va arăta mai jos, soluția ecuației (1) poate fi exprimată prin funcții speciale.

Să introducem schimbarea de variabilă :

$$u = y + 1. \qquad (4)$$

Atunci relația (3) devine:

$$\int_{u}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u + g_3}} = \pm j \frac{\tau}{2\sqrt{3}}, \tag{5}$$

unde:

$$g_2 = 4 \cdot 3 (1 + 2A_2),$$
$$g_3 = 4 [2 (1 + 3A_2) - 3A],$$
$$u_0 = y_0 + 1. \tag{6}$$

Pentru a simplifica operațiile ulterioare vom exprima integrala (5) ca diferența a două integrale, cu limitele de integrare de la u la ∞ și respectiv de la u_0 la ∞. Cu această observație obținem:

$$\int_{u}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u + g_3}} = \pm j \frac{\tau}{2\sqrt{3}} + \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u + g_3}}, \tag{7}$$

integrala din partea dreaptă fiind o mărime constantă.

Introducem notația:

$$\frac{\tilde{T}_1}{2} = \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u + g_3}}. \tag{8}$$

Atunci (7) devine:

$$\int_{u}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2 u + g_3}} = \pm j \frac{\tau}{2\sqrt{3}} + \frac{\tilde{T}_1}{2}. \tag{9}$$

In [3, 4] se arată că funcția căutată, care satisface ecuația (9), are următoarea expresie:

$$u = \wp \left(\pm j \frac{\tau}{2\sqrt{3}} + \frac{\tilde{T}_1}{2};\ g_2, -g_3 \right), \tag{10}$$

unde $\wp$ este funcția eliptică a lui Weierstrass cu invarianții g_2 și $-g_3$ · $\wp$ este o funcție dublu-periodică în planul complex iar perioada sa reală este egală cu mărimea $\tilde{T}_1$, determinată de formula (8).

Intrucît în cazul de față interesează numai valorile pozitive ale variabilei temporale normate τ, în membrul drept al relației (10) trebuie considerat numai semnul plus al mărimii $j \frac{\tau}{2\sqrt{3}}$. Făcînd abstracție de sensul fizic al lui τ, comportarea funcției u poate fi studiată numai pentru valorile pozitive ale variabilei τ, deoarece $\wp$ este o funcție pară în raport cu argumentul său.

Din teoria funcţiilor eliptice se ştie că [3]:

$$\wp\left(j\frac{\tau}{2\sqrt{3}}+\frac{\widetilde{T}_1}{2};\ g_2,-g_3\right)=\widetilde{u}_1+\frac{(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2)(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_3)}{\wp\left(j\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,-g_3\right)-\widetilde{u}_1}, \tag{11}$$

unde $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}_3$ sînt rădăcinile trinomului cubic $4u^3-g_2u+g_3$, iar:

$$\widetilde{u}_1>\widetilde{u}_2>\widetilde{u}_3. \tag{12}$$

Observăm că în relaţia (11) mărimea τ are ca factor variabila imaginară j. Deoarece pe noi ne interesează valorile reale ale variabilei temporale, este necesar să trecem de la argumentul imaginar $j\frac{\tau}{2\sqrt{3}}$ la argumentul $-\frac{\tau}{2\sqrt{3}}$. Această trecere se face uşor cu ajutorul formulei de omogenitate a funcţiei eliptice a lui Weierstrass [3]:

$$\wp\left(j\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,-g_3\right)=-\wp\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,g_3\right). \tag{13}$$

Ţinînd seama de (11) şi (13) expresia funcţiei căutate se obţine sub forma:

$$u=\widetilde{u}_1+\frac{(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2)(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_3)}{-\wp\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,\ g_3\right)-\widetilde{u}_1}, \tag{14}$$

sau:

$$u=-u_3-\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_3)}{\wp\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,\ g_3\right)-u_3}, \tag{15}$$

unde u_1, u_2, u_3 sînt rădăcinile trimonului cubic $4u^3-g_2u-g_3$ şi se determină din:

$$\begin{aligned} u_1&=-\widetilde{u}_3,\\ u_2&=-\widetilde{u}_2,\\ u_3&=-\widetilde{u}_1. \end{aligned} \tag{16}$$

Expresia (15) dă soluţia ecuaţiei diferenţiale examinate. Cu toate acestea, pentru analiza comodă a oscilaţiilor libere în circuitul neliniar studiat, este raţional să fie utilizată legătura dintre funcţia eliptică a lui Weierstrass şi sinusul eliptic al lui Jacobi şi în acest fel să se exprime soluţia ecuaţiei (1) prin sinusul eliptic. Este ştiut că [3]:

$$\wp\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}};\ g_2,g_3\right)-u_3=\frac{u_1-u_3}{sn^2\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{u_1-u_3}\right)}, \tag{17}$$

unde $sn\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{u_1-u_3}\right)$ este sinusul eliptic al lui Jacobi cu argumentul $\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{u_1-u_3}$.

În acest fel obținem pentru u următoarea expresie:

$$u=-u_3-(u_2-u_3)\cdot sn^2\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{u_1-u_3}\right), \tag{18}$$

sau, ținînd seamă de (4) și (16);

$$y=y_1-(y_1-y_3)\cdot sn^2\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{y_1-y_3}\right) \tag{19}$$

Se poate arăta [2], că mărimile y_1, y_2, y_3 sînt date de relațiile

$$y_1=y_0,$$

$$y_2=\frac{-(3+y_0)+\sqrt{12(1+2A_2)-3(1+y_0)^2}}{2}, \tag{20}$$

$$y_3=\frac{-(3+y_0)-\sqrt{12(1+2A_2)-3(1+y_0)^2}}{2},$$

unde y_0 este valoarea inițială a sarcinii electrice normate care se acumulează în capacitatea neliniară în regim liber. Pentru economie de spațiu nu mai dăm aici demonstrația valabilității relațiilor (20)

Expresia lui y devine acum:

$$y=y_0-(y_0-y_2)\cdot sn^2\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sqrt{y_0-y_3}\right). \tag{21}$$

În acest fel am ajuns la concluzia că, în regimul oscilațiilor libere, sarcina electrică acumulată în capacitatea joncțiunii p-n se exprimă prin pătratul sinusului eliptic. Pătratul sinusului eliptic este o funcție cu perioada $2K$, unde K este integrala eliptică completă de speța întîia cu modulul k [3, 4]. Vom nota cu T perioada sarcinii electrice normate y (exprimată tot în unități relative). Atunci putem scrie:

$$\frac{T}{2\sqrt{3}}\sqrt{y_0-y_3}=2K$$

de unde:

$$T=\frac{4\sqrt{3}\,K}{\sqrt{y_0-y_3}}. \tag{22}$$

Modulul integralei eliptice complecte K este determinat de relația:

$$k^2=\frac{y_0-y_2}{y_0-y_3}\ (k^2\leqslant 1), \tag{23}$$

sau, ținînd seama de (20) :

$$k^2 = \frac{3(1+y_0) - \sqrt{12(1+2A_2) - 3(1+y_0)^2}}{3(1+y_0) + \sqrt{12(1+2A_2) - 3(1+y_0)^2}}. \tag{24}$$

După cum se vede din expresia (22), calculul perioadei oscilațiilor libere se reduce la determinarea mărimii K. In cazul lipsei tabelelor, valoarea lui K poate fi găsită cu ajutorul următoarei dezvoltări în serie [3]:

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\} \tag{25}$$

Dacă introducem expresia lui K în relația (22) și luăm în considerație dependența lui k^2 de y_0, y_2, y_3, obținem pentru perioada oscilațiilor libere relația :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\sqrt{y_0 - y_3}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{y_0 - y_2}{y_0 - y_3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \left(\frac{y_0 - y_2}{y_0 - y_3}\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}\right]^2 \left(\frac{y_0 - y_2}{y_0 - y_3}\right)^n + \ldots\right\} \tag{26}$$

Din expresia (26) se vede că perioada oscilațiilor libere în circuitul LC cu capacitatea neliniară a joncțiunii p-n aliate depinde în mod complicat de condițiile inițiale (prin mărimile y_0, y_2, y_3), adică de aplitudinea oscilațiilor. Aceasta era de așteptat, deoarece este cunoscut că perioada și amplitudinea oscilațiilor libere ale unui sistem neliniar sînt interdependente. Dependența lui T de amplitudinea oscilațiilor este deosebit de complicată în cazul amplitudinilor mari, cînd valoarea modulului k este aproape de unitate și seriile de puteri din (25), și (26) converg lent.

Dacă amplitudinea oscilațiilor este mică, în dezvoltarea (26) ne putem limita numai la primul termen și atunci expresia perioadei devine :

$$T \approx 11{,}54\left[5(y_0+1) + \sqrt{12(1+2A_2) - 3(1+y_0)^2}\right]\left[3(y_0+1) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{12(1+2A_2) - 3(1+y_0)^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{27}$$

In fig. 2 este reprezentată dependența teoretică a perioadei de valoarea inițială a sarcinii electrice normate y_0 pentru două valori ale tensiunii de polarizare normate A_2. Ambele curbe au fost determinate cu ajutorul formulei exacte (22). Din figură se vede că mărirea lui y_0 (adică a amplitudinii oscilațiilor) atrage după sine creșterea perioadei oscilațiilor libere. Dependența lui T de y_0 este deosebit de puternică în regiunea valorilor mari ale lui y_0. Spre exemplu, pentru $A_2 = 0{,}7525$ creșterea lui y_0 de la 1 la 1,55 conduce la modificarea perioadei cu 8,6%.

Să determinăm acum dependența de timp a valorii normate a curentului care ia naștere în circuitul oscilant în regimul liber $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$ și a valorii normate a tensiunii la bornele inductanței circuitului $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)$.

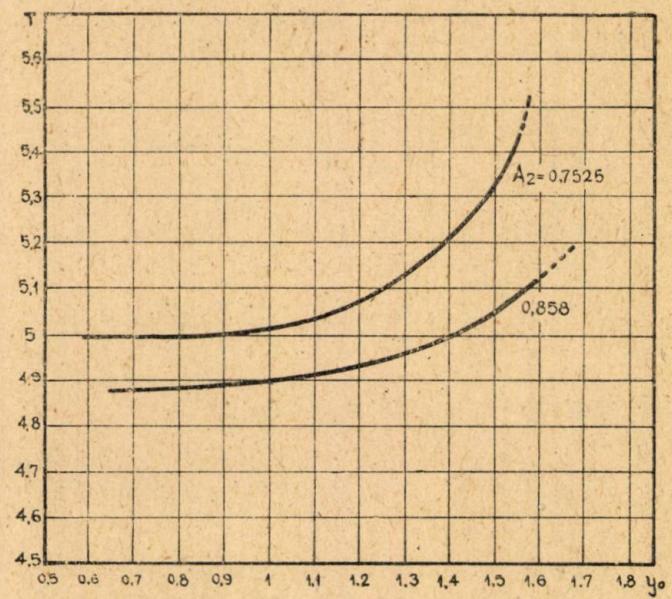


Fig.2

Ținînd seamă de (22), putem transcrie expresia lui y sub forma:

$$y = y_0 - (y_0 - y_2) \cdot sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right). \qquad (28)$$

După ce derivăm ultima expresie în raport cu τ obținem:

$$\frac{dy}{d\tau} = -2(y_0 - y_2) \cdot sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot \frac{d}{d\tau} \cdot sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right).$$

Derivata sinusului eliptic este determinată de relația [4]:

$$\frac{d}{d\tau} sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = \frac{2K}{T} \cdot cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right),$$

unde $cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right)$ este cosinusul eliptic cu argumentul $2K\frac{\tau}{T}$ iar $dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right)$ — funcția eliptică denumită „delta amplitudinii". Introducînd ultima

relație în expresia lui $\frac{dy}{d\tau}$ obținem :

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{(y_0 - y_2)\sqrt{y_0 - y_3}}{\sqrt{3}} \cdot sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right). \quad (29)$$

Pentru a determina expresia lui $\frac{d^2y}{d\tau^2}$, derivăm relația (29) :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{(y_0 - y_2)\sqrt{y_0 - y_3}}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{d}{d\tau}\left[sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right] \cdot cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) + \right.$$

$$+ sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\left[cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right] \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) +$$

$$\left. + sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot \frac{d}{d\tau}\left[dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right] \right\}.$$

Derivatele funcțiilor *cn* și *dn* sînt date de relațiile :

$$\frac{d}{d\tau} cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = -\frac{2K}{T} \cdot sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right),$$

$$\frac{d}{d\tau} dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = -k^2\frac{2K}{T} sn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot cn\left(2K\frac{\tau}{T}\right).$$

Ținînd seamă că $\frac{2K}{T} = \frac{\sqrt{y_0 - y_3}}{2\sqrt{3}}$, pentru $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ găsim :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}{6}\left[cn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn\left(2K\frac{\tau}{T}\right) - \right.$$

$$\left. - sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) \cdot dn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) - k^2 sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) cn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right].$$

Expresia lui $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ poate fi simțitor simplificată dacă exprimăm cosinusul eliptic și delta amplitudinei prin sinusul eliptic, conform formulelor [4] :

$$cn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = 1 - sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right),$$

$$dn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = 1 - k^2 \cdot sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right).$$

Utilizînd ultimele relații, expresia tensiunii normate la bornele inductanței circuitului oscilant ia forma definitivă:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}{6}\left[-1 + 2(1 + k^2)\cdot sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) - 3k^2\cdot sn^4\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right]. \quad (30)$$

Cu ajutorul formulelor (28), (29), (30) poate fi construită dependența de timp a mărimilor y, $\frac{dy}{d\tau}$ și $\frac{d^2y}{d\tau^2}$. Aceasta se poate face comod folosind nomogramele sau tabelele funcțiilor eliptice ale lui Jacobi. În fig. 3, fig. 4 și fig. 5 sînt reprezentate aceste mărimi pentru două valori inițiale diferite ale lui y, adică pentru două valori distincte ale amplitudinii oscilațiilor.

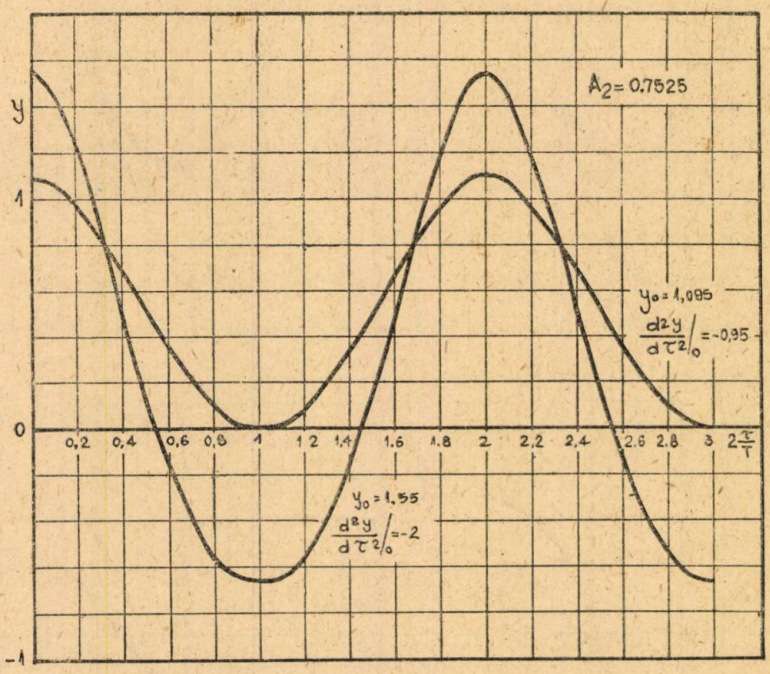


Fig. 3

Se constată că forma oscilațiilor depinde puternic de amplitudinea lor, fiind cu atît mai depărtată de forma sinusoidală cu cît este mai mare amplitudinea. Aceasta este normal, întrucît influența neliniarității capacității joncțiunii *p-n* se manifestă în special la amplitudini mari ale semnalului alternativ.

De obicei este dată condiția inițială nu pentru sarcina electrică ci pentru valoarea tensiunii la bornele inductanței circuitului oscilant (adică amplitudinea acestei tensiuni). Din această cauză pentru folosirea practică

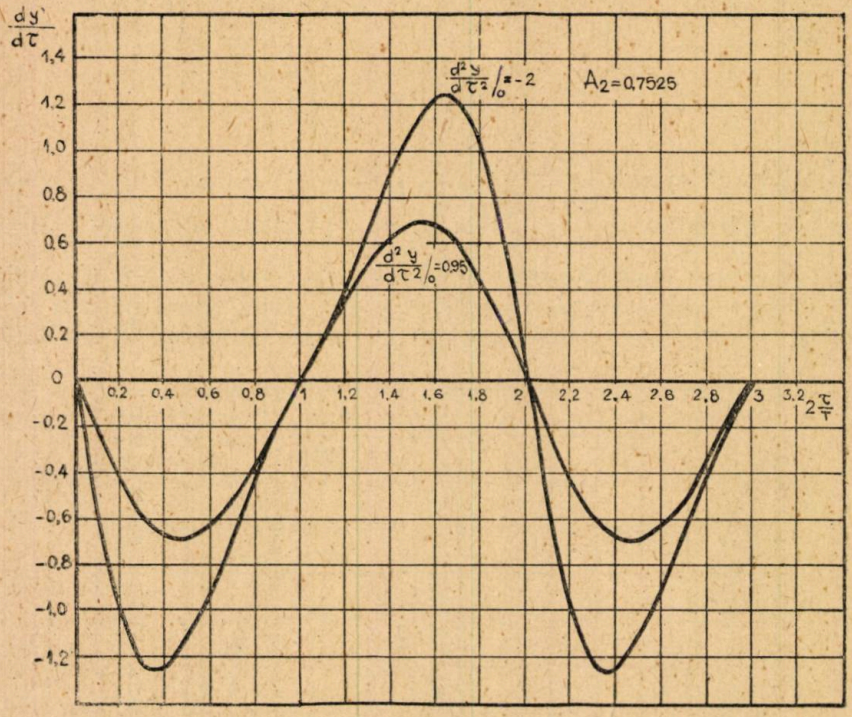


Fig. 4

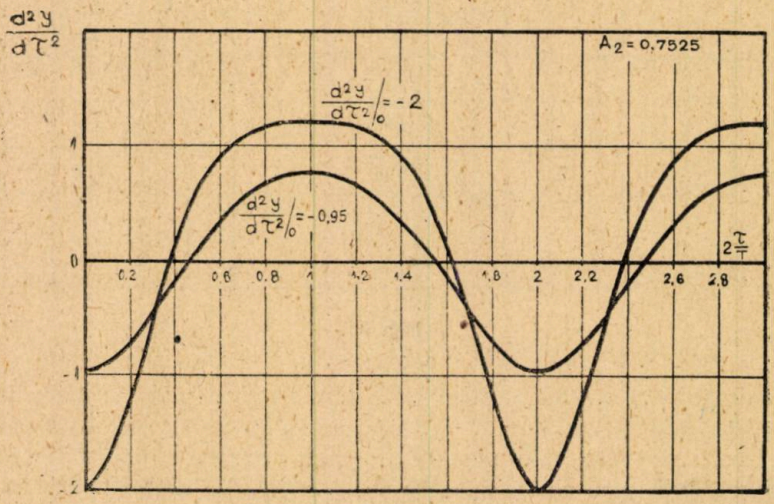


Fig. 5

a formulelor (28), (29) și (30) este util să fie cunoscută legătura dintre y_0 și $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0$. Această dependență se poate determina direct din (30) pentru $\tau = 0$:

$$\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 = -\frac{(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}{6}, \tag{31}$$

de unde, ținînd seamă de relațiile (20), se obține:

$$y_0 = -1 + \sqrt{1 + 2A_2 - 2\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0}. \tag{32}$$

Expresia tensiunii la bornele inductanței circuitului poate fi acum exprimată în forma:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 \left[-1 + 2(1+k^2)\cdot sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) - 3k^2\cdot sn^4\left(2K\frac{\tau}{T}\right)\right]. \tag{33}$$

Spectrul oscilațiilor libere.

Formula (33) este comodă pentru calculul valorii instantanee a tensiunii la bornele inductanței circuitului; ea nu poate fi însă utilizată în această formă pentru a face o apreciere directă a compoziției spectrale a tensiunii, ceea ce este important atît din punct de vedere al analizei teoretice, cît și din punct de vedere al aplicațiilor practice. De aceea este necesar să fie găsită dezvoltarea în serie Fourier a funcției $\frac{d^2y}{d\tau^2}$. Înainte de a trece la aceasta, observăm că în dezvoltarea în serie trigonometrică a mărimii $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ vor fi prezente numai componentele cosinusoidale, deoarece $sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right)$ și $sn^4\left(2K\frac{\tau}{T}\right)$ sînt funcții pare în raport cu timpul.

În [5,2] se arată că:

$$sn^2\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{K-E}{K} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega\tau, \tag{34}$$

$$sn^4\left(2K\frac{\tau}{T}\right) = \frac{1}{3k^2}\left[2\frac{1+k^2}{k^2}\cdot\frac{K-E}{K} - 1\right] - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega\tau, \tag{35}$$

unde E este integrala eliptică complectă de speța a doua cu modulul k iar $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Coeficienții a_n și b_n se determină din relațiile:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{kK}\right)^2 \cdot \frac{n q^n}{1 - q^{2n}}, \tag{36}$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2kK}\right)^4 \left[(2n)\cdot 4\cdot(1+k^2)\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - (2n)^3\right]\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}, \tag{37}$$

unde $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, iar K' este integrala eliptică coplectă de speța întîia cu modulul complementar $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Introducînd (34) și (35) în (33) obținem:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 \left\{-1 + 2(1+k^2)\left[\frac{1}{k^2}\cdot\frac{K-E}{K} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega\tau\right] - \right.$$

$$\left. - 3k^2\left[\frac{1}{3k^2}\left(2\frac{1+k^2}{k^2}\cdot\frac{K-E}{K} - 1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega\tau\right]\right\}.$$

După transformări simple ultima relație ia forma:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [3k^2 b_n - 2(1+k^2)a_n] \cos n\omega\tau. \tag{38}$$

Introducem notația:

$$U_n = -\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 \cdot [3k^2 b_n - 2(1+k^2)a_n]. \tag{39}$$

Ținînd seamă de (39), dezvoltarea în serie Fourier a tensiunii normate de la bornele inductanței circuitului oscilant ia forma definitivă:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos n\omega\tau, \tag{40}$$

unde coeficienții U_n, calculați cu ajutorul relațiilor (36) și (37), au expresia de mai jos:

$$U_n = \left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{\pi}{k}\right)^4 \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n}} \cdot n^3. \tag{41}$$

Din (41) rezultă că amplitudinile armonicelor tensiunii depind de condițiile inițiale, adică de amplitudinea oscilațiilor. Această dependență este determinată nu numai de prezența mărimii $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0$ în expresia (41), ci și de legătura mărimilor k, K și q cu condițiile inițiale. În cazul amplitudinilor mari cînd $k^2 \to 1$ (deoarece $y_2 \to y_3$ conform relației (20)), $K \to \infty$ și $K' \to \frac{\pi}{2}$, așa că valoarea lui q va fi aproape de unitate. Prin urmare, mărimea q^{2n} va tinde lent către zero odată cu creșterea lui n, ceea ce conduce la o scădere relativ înceată a amplitudinilor armonicelor cu creșterea ordinului lor. Rezultă că în această situație distorsiunile de neliniaritate vor fi importante, mai ales că amplitudinea primei armonice este mică (datorită valorii mari a lui K). Dacă amplitudinea oscilațiilor tinde către zero atunci $k^2 \to 0$, $K \to \frac{\pi}{2}$, $K \to \infty$ și q va avea o valoare mică. Prin urmare, deși în acest caz amplitudinea primei armonice va fi mică, distorsiunile de neliniaritate vor fi neimportante, întrucît q^n și q^{2n} tind foarte repede către zero cu creșterea lui n.

Pentru a ilustra analiza teoretică prezentată mai sus vom calcula valorile numerice ale armonicelor U_n în cazul $A_2 = 0{,}7525$ pentru două valori ale mărimii $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0$ (—0,95 și —2).

Fie $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 = -0{,}95$. Cu ajutorul formulei (32) găsim $y_0 = 1{,}095$. Acum poate fi determinată valoarea pătratului modulului integralei eliptice: $k^2 = 0{,}2107$. Valoarea integralei eliptice complecte de speța întîia se găsește din (25): $K = 1{,}57$. Pentru calculul integralei eliptice K' cu modulul complementar k' este incomod să fie utilizată expresia (25), deoarece pentru valoarea corespunzătoare a lui k' seria este lent convergentă. De aceea este rațional să fie utilizată următoarea dezvoltare în serie a mărimii K' [4]:

$$K' = \alpha_0 + \left(\frac{1}{2}\right)\alpha_1 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\alpha_2 k^4 + \ldots, \qquad (42)$$

unde:

$$\alpha_0 = \ln \frac{4}{k},$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 1.$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{2}{(2n-1)n}.$$

Intrucît seria (42) converge rapid, putem să ne oprim la al treilea termen al dezvoltării. Se obține atunci $K' \approx 2{,}226$. Găsim apoi cu ușurință $q = 1{,}17 \cdot 10^{-2}$.

Cunoscînd toate mărimile necesare, calculăm cu ajutorul formulei (41) amplitudinile armonicilor tensiunii. Mărginindu-ne la a treia armonică

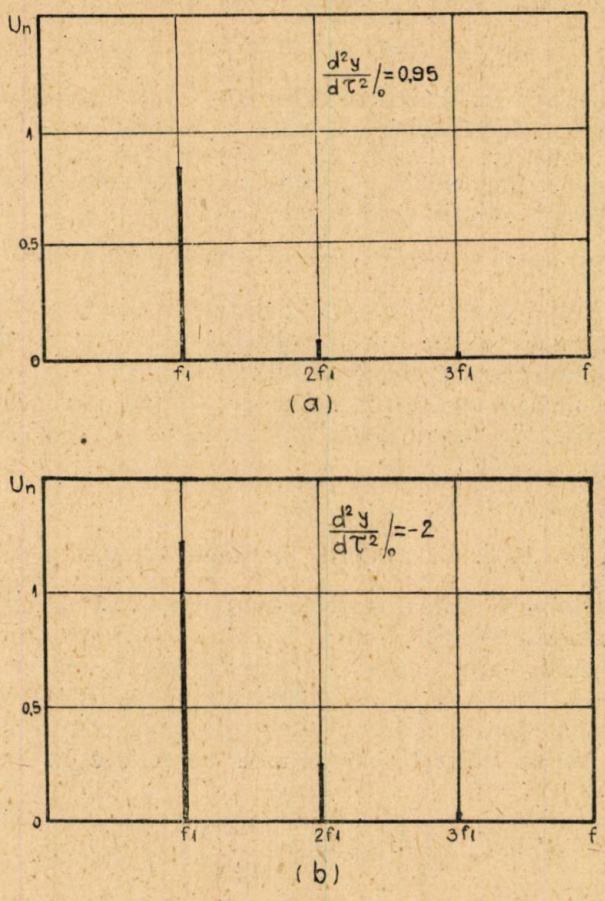


Fig. 6

obținem: $U_1 = -0{,}842$; $U_2 = -0{,}079$; $U_3 = -0{,}00311$. Analog, pentru $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0 = -2$ găsim: $U_1 = -1{,}23$; $U_2 = -0{,}25$; $U_3 = -0{,}0212$. Spectrul tensiunii la bornele inductanței circuitului oscilant este reprezentat în fig. 6 a și fig. 6 b.

Calculînd cu ajutorul datelor obținute coeficientul de distorsiuni neliniare găsim în primul caz $\delta = 9{,}4\%$ iar în cazul al doilea $\delta = 20{,}4\%$. Prin urmare, în circuitul LC cu capacitatea neliniară a joncțiunii p-n aliate

apar oscilații libere nesinusoidale, iar distorsiunile neliniare sînt cu atît mai importante, cu cît este mai mare amplitudinea oscilațiilor. După cum se va vedea mai jos, studiul experimental al unui astfel de circuit în regim de autooscilații confirmă rezultatele teoretice.

Este interesant să fie determinată și dezvoltarea în serie Fourier a sarcinii electrice normate, acumulată în joncțiunea *p-n* în regim liber. Introducînd (34) în (28) obținem :

$$y = y_0 - (y_0 - y_3)\frac{K-E}{K} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega\tau, \qquad (44)$$

unde :

$$Q_n = 2(y_0 - y_3) \cdot \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n}} \cdot n. \qquad (45)$$

Verificări experimentale.

Scopul părții experimentale a lucrării de față a constat în verificarea principalelor concluzii teoretice referitoare la natura oscilațiilor libere în circuitul *LC* analizat mai sus. Acest deziderat a fost realizat pe calea cercetării experimentale a autooscialțiilor care apar într-un circuit *LC* cu capacitatea joncțiunii *p-n* aliată.

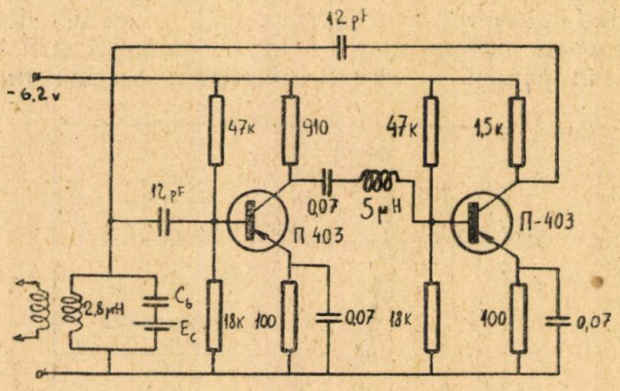


Fig. 7

A fost examinată dependența frecvenței și compoziției spectrale a autooscilațiilor de amplitudinea lor. Toate măsurătorile s-au făcut cu ajutorul oscilatorului cu două tranzistoare prezentat în fig. 7. În calitate de capacitate neliniară a fost utilizată o diodă cu siliciu de tip D—813, polarizată în sens invers conducției. Pentru a elimina influența circuitelor de măsură asupra regimului oscilatorului, tensiunea de la bornele circuitului oscilant a fost măsurată prin intermediul unui cuplaj inductiv slab.

In fig. 8 este reprezentată cu linie întreruptă dependența experimentală a frecvenței autooscilațiilor de mărimea $\Delta y''$, care reprezintă diferența dintre valorile maximă și minimă ale tensiunii normate la bornele induc-

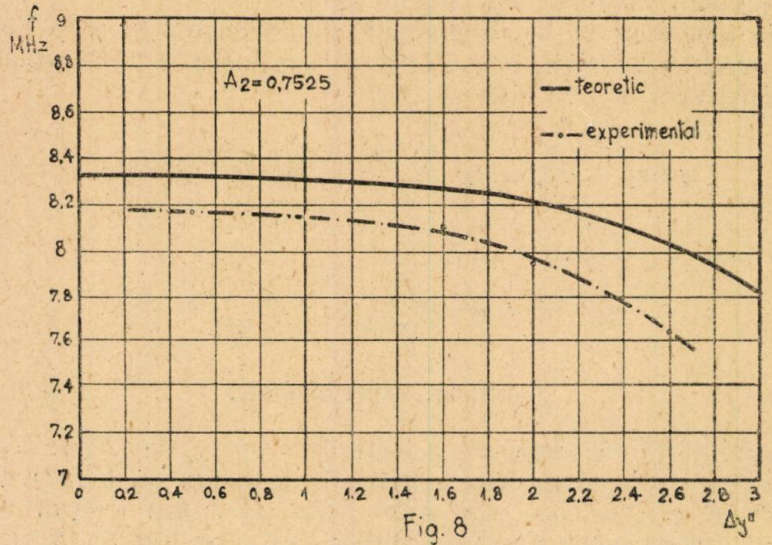
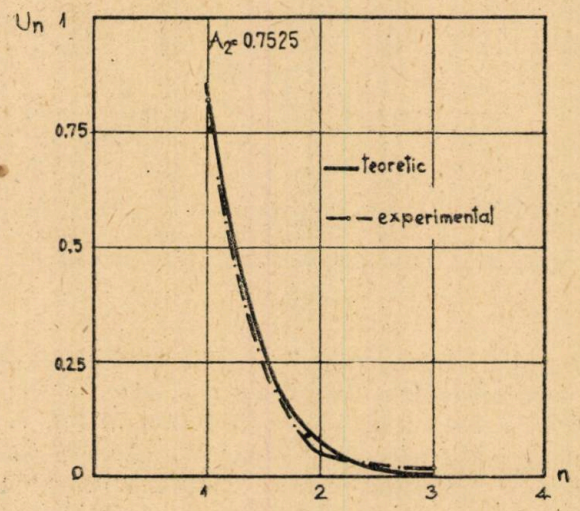


Fig. 8

tanței; în aceeași figură se dă și dependența teoretică a frecvenței de $\Delta y''$. Neconcordanța între curba experimentală și cea teoretică se datorește, după cum se poate înțelege ușor din fig. 7, prezenței unei mici capacități suplimentare în paralel cu circuitul oscilant; această capacitate supli-



(a)

Fig. 9

mentară micșorează frecvența oscilațiilor. Din fig. 8 rezultă că, odată cu creșterea oscilațiilor, diferența între dependențele experimentală și teoretică devine tot mai însemnată. Acest fapt poate fi ușor înțeles, deoarece dependența teoretică a fost determinată cu ajutorul formulei (22), în care integrala eliptică complectă K se calculează conform relației (25) ; însă, odată cu creșterea amplitudinii oscilațiilor, $k^2 \to 1$ și seria (25) va fi tot mai lent convergentă, ceea ce duce la mărirea erorii în calculul perioadei oscilațiilor.

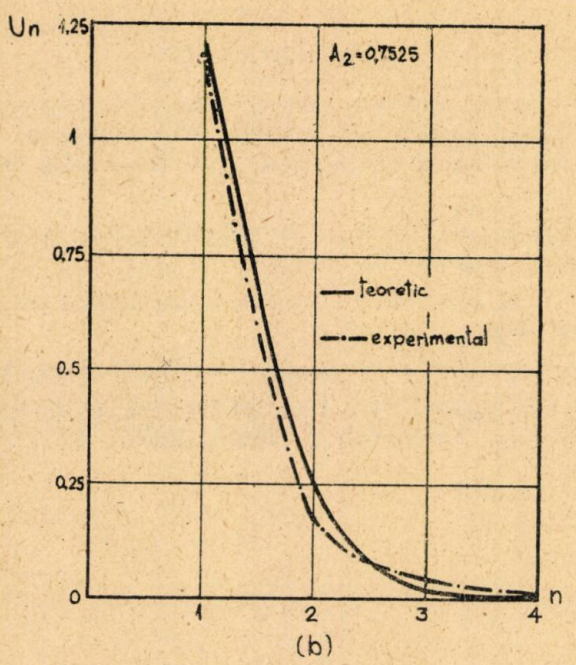


Fig. 9

De asemenea, a fost determinat experimental spectrul tensiunii la bornele oscilant (cu ajutorul măsurătorului de zgomot de tip IP-12-2M). Rezultatele măsurătorilor sînt reprezentate cu linie întreruptă în fig. 9a (pentru $\triangle y'' = 1{,}71$) și fig. 9b. (pentru $\triangle y'' = 3$). În aceste figuri pot fi de asemenea urmărite înfășurătoarea spectrelor obținute pe cale teoretică.

Concluzii

În circuitul oscilant cu capacitatea neliniară a barierei joncțiunii *p-n* aliate pot apare oscilații libere, care sînt cu atît mai departe de forma armonică, cu cît amplitudinea lor este mai mare. Perioada acestor oscilații depinde de amplitudine, mărindu-se cu creșterea acesteia.

Datele experimentale concordă în mod satisfăcător cu cele teoretice. Rezultatele obținute arată că, în regim de autooscilații, circuitul studiat este un sistem aproape conservativ și, prin urmare, pentru aprecierea frecvenței, amplitudinii și spectrului autooscilațiilor, pot fi folosite concluziile analizei teoretice a oscilațiilor libere.

Catedra de tuburi electronice și tranzistori
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *V P. Diomin,* O periode svobodnîh kolebanii v konture s iomkostiu p-n perehoda, în „O primenenii iomkosti p-n perehoda poluprovodnikovîh priborov v radiotehniceskih shemah", sub red. prof. I. A. Gonorovskii, Oborongiz, Moscova, 1962.

2. *M. Petrescu,* Upravliaemîe immitansî na poluprovodnikovîh priborah, candidatskaia dissertației, Moscova, MEI, 1963.

3. *I. S. Gradstein, I. M. Rijik,* Tablițî integralov, summ, riadov i proizvedenii, Fizmatgiz, Moscova, 1962.

4. *A. M. Iuravskii,* Spravocinic po ellipticeskim funkțiiam, Moscova, 1941.

5. *K. I. G. Iacobi,* Gesammelte Werke, (Hrsg. auf Veraulassung der Königlich preusischen Academie der Wissenschaften), Berlin, Reifer, 1881, t. 1.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 1

TRANSPORTURI

C.Z : 656.222

DETERMINAREA VITEZELOR ȘI TIMPILOR DE MERS AI TRENURILOR PRIN METODA NOMOGRAMELOR *)

ALEXANDRU POPA

Introducere

Determinarea vitezei și timpului de mers în exploatarea căilor ferate prezintă o importanță deosebită atît pentru întocmirea graficelor de circulație, cît și pentru determinarea eficacității tehnico-economice a diferitelor sisteme de tracțiune sau tipuri de locomotive.

În literatura tehnică de specialitate există diverse metode pentru determinarea vitezelor și timpilor de mers. Toate acestea se bazează pe rezolvarea ecuației de mișcare a trenului.

Ecuația de mișcare a trenului se prezintă sub forma :

$$\frac{dV}{dt} = \varphi (f_0 - w_t), \tag{1}$$

unde :

f_0 — forța de tracțiune specifică, în kgf/t ;

w_t — forța rezistentă specifică, în kgf/t ;

φ — accelerația imprimată trenului de o forță specifică de accelerație egală cu 1 kgf/t.

Integrarea ecuației (1), în scopul determinării funcțiilor $V = f(s)$ și $t = f(s)$ implică în prealabil exprimarea analitică a forței specifice de tracțiune (f_0) și a forței specifice rezistente (w_t). Atît forța de tracțiune specifică, cît și rezistența la mers depinde de mai mulți parametri ceea ce face ca exprimarea analitică a lor să fie foarte complicată. Chiar în ipoteza că forța de tracțiune specifică (f_0) și rezistența specifică (w_t) ar depinde numai de viteză, integrarea ecuației diferențiale (1) prezintă dificultăți. Din aceste motive, în practică se utilizează metoda integrării aproximative, care pentru necesitățile de calcul ale exploatării este suficient de exactă.

---

* Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

Aproximația care se face constă în faptul că în ecuația de mișcare a trenului (1) în locul variațiilor infinitezimale ale vitezei și timpului (dV și dt) se iau variații finite (Δt și ΔV), iar în limitele acestor variații forța de accelerație se consideră constantă și egală cu valoarea medie, în intervalul de viteză considerat, adică :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \varphi (f_0 - w_t)_m . \tag{2}$$

Valoarea medie a accelerației specifice (φ) pentru calculele practice poate fi considerată :

$$\varphi = 120 \text{ km/h}^2 = 2 \text{ km/h min} = \frac{1}{30} \text{ km/h sec}$$

pentru care ecuația (2) se prezintă sub formele :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 120 (f_0 - w_t)_m , \tag{3}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 2 (f_0 - w_t)_m , \tag{4}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{30} (f_0 - w_t)_m . \tag{5}$$

In practica exploatării căilor ferate este necesar să se construiască curbele $V = (s)$ și $t = f(s)$. Această construcție se realizează fie prin metode grafo-analitice, fie prin metode grafice.

În momentul de față pentru construirea curbelor $V = f(s)$ și $t = f(s)$ există mai multe metode ca de exemplu : Lipetz, Müler, Lebedev, Degtiorov, metoda vitezelor echivalente etc.

Scurtă prezentare a unor metode existente de trasare a curbelor $V = f(s)$ și $t = f(s)$.

1. *Metoda integrării aproximative*

Această metodă constă în determinarea funcțiilor $V = f(s)$, $V = f(t)$ și $t = f(s)$ din ecuația de mișcare a trenului în ipoteza că forța specifică de accelerație rămîne constantă în limitele intervalelor de viteze ΔV. Pentru intervalele de viteză adoptate funcțiile de mai sus se determină cu ajutorul formulelor :

$$t_2 - t_1 = \frac{V_2 - V_1}{\varphi (f_0 - w_t)_{1-2}} , \tag{6}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{\varphi (f_0 - w_t)_{1-2}} \cdot \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} , \tag{7}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{V_2 + V_1}{2} (t_2 - t_1) . \tag{8}$$

Construcția curbelor $V = f(t)$, $V = f(s)$ și $t = f(s)$, se realizează folosind ecuațiile de mai sus prin segmente de dreaptă sau de curbă corespunzătoare intervalelor de viteză $\triangle V$ adoptate.

2. *Metoda Lipetz pentru construirea curbei* $V = f(s)$.

Pentru trasarea curbei $V = f(s)$ prin metoda Lipetz, se construiește curba $f_0 - w_t = f(V)$ pentru mersul trenului în palier și aliniament. Se

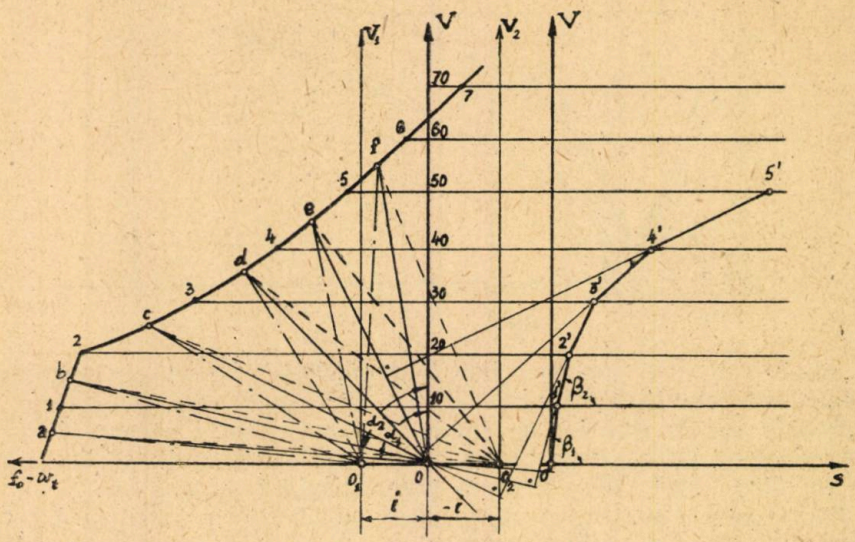


fig. 1.

aleg intervalele de viteză $\triangle V$ (de exemplu $\triangle V = 10$ km/h) după cum se vede în fig. 1) cu ajutorul cărora curba $f_0 - w_t = f(V)$ se împarte în intervalele 1, 2, 3,...,n.

Punctele a, b, c,...,z care dau valoarea medie a forței specifice de accelerație corespunzătoare fiecărui interval de viteză se unesc cu originea axelor de coordonate O.

Curba $V = f(s)$ se construiește cu ajutorul unor perpendiculare duse, începînd din originea O', pe dreptele Oa, Ob,... Oz, obținîndu-se segmentele de dreaptă O' 1′, 1′ 2′,..., $(n-1)'$ n', care reprezintă segmente ale curbei $V = f(s)$.

Pentru mersul trenului pe rampe și pante construirea curbei se realizează prin același procedeu cu deosebirea că axa vitezei se deplasează spre stînga respectiv spre dreapta originei O așa cum se observă în fig. 1.

Pentru cazul cînd locomotiva circulă fără consum de combustibil sau de energie electrică, sau pentru cazul cînd se circulă în regim de frînare, construirea curbei $V = f(s)$ prin această metodă se realizează ca și în cazul mersului în regim de tracțiune cu deosebirea că se folosesc curbele $-w_t' = f(V)$ și respectiv $-(b + w_t') = f(V)$.

3. *Construirea curbei $t = f(s)$ prin procedeul lui Lebedev.*

Pentru construirea curbei $t = f(s)$ prin procedeul lui Lebedev se porneşte de la curba $V = f(s)$ construită prin una din metodele cunoscute. Curba $V = f(s)$ se împarte în porţiuni elementare 01, 12, 23,..., $(n-1)n$.

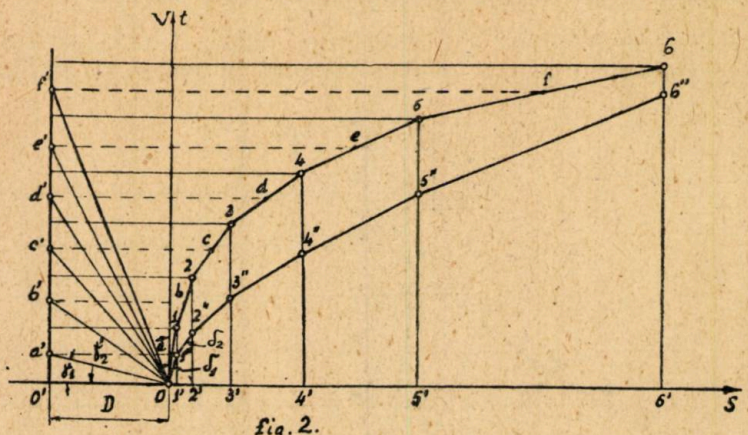


fig. 2.

Din punctele 1, 2, 3,....,*n*, se coboară perpendicularele pe axa spaţiului şi se obţin punctele 1', 2', 3',....,*n'*, fig. 2.

Pentru fiecare interval de spaţiu, valoarea vitezei se consideră constantă şi egală cu valoarea medie a acesteia. La distanţa arbitrară *D* se duce în stînga axei *OV* o dreaptă perpendiculară pe axa *Os*.

Prin punctele a, b, c,....*n*, corespunzătoare vitezelor medii se duc paralelele la axa *Os* şi se obţin punctele *a'*, *b'*, *c'*,...*n'*, care se unesc cu originea sistemului *Vs*.

Construirea curbei $t = f(s)$ începe din originea *O* a axelor, ducîndu-se perpendiculare pe dreptele *Oa'*, *Ob'*, *Oc'*,...,*Oz'*, cu ajutorul cărora se obţin segmentele de dreaptă 01'', 1'' 2'',....,$(n-1)''$ *n''*, care sînt segmente ale curbei $t = f(s)$.

4. *Calculul timpilor de mers prin metoda vitezelor constante.*

Acest procedeu se bazează pe ipoteza că trenul are o mişcare uniformă pe fiecare element al profilului, independent de lungimea sa, cu o viteză corespunzătoare declivităţii acestui element şi care se schimbă brusc la trecerea pe un alt element al profilului.

Vitezele echivalente se determină prin intersecţia curbelor forţei de tracţiune $F_0 = f(V)$, cu curbele rezistenţei totale $W_T = f(V)$, determinate pentru diferite declivităţi, fig. 3.

Cunoscînd lungimea elementului de profil *s* şi viteza *V* corespunzătoare declivităţii sale se determină uşor timpul necesar pentru parcurgerea acestui element cu relaţia :

$$t = \frac{s}{V}\, 60 . \qquad (9)$$

Timpul total de mers pe întreaga secție se determină prin însumarea timpilor elementari, adică:

$$T = \Sigma t_i = 60 \sum \frac{s_i}{V_i}. \qquad (9')$$

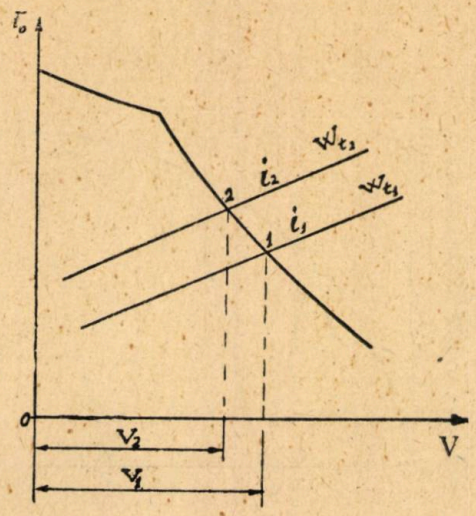


Fig. 3

5. *Calculul timpilor de mers prin procedeul Degtiorov.*

Această metodă constă în construirea unor triunghiuri isoscele asemenea, cu vîrfurile pe curba $V = f(s)$, a căror bază este egală cu drumul parcurs de tren pentru un interval de timp constant (de exemplu $\triangle t = 1$ min).

Pentru a se determina timpul total de mers este suficient să se cunoască numărul de triunghiuri asemenea cu triunghiul de bază, cuprinse sub curba $V = f(s)$.

Triunghiul de bază se construiește pentru intervalul de timp ales.

Pentru $\triangle t = 1$ min, se construiește un triunghi isoscel *ABC* (fig. 4) cu înălțimea egală cu 60 km/h și cu baza egală cu 1 km, la scările corespunzătoare. Baza acestui triunghi reprezintă spațiul pareurs de tren în timpul de 1 min cu viteza de 60 km/h.

6. *Metoda Stanislaviuc pentru construirea curbei* $V = f(s)$.

In ultimul timp în U.R.S.S., în unele organizații de proiectare a căilor ferate, se utilizează metoda V. L. Stanislaviuc.

Această metodă constă în construirea diagramei $V = f(s)$ cu ajutorul unei nomograme construite sub forma de triunghi cu un unghi variabil după cum se vede în fig. 5.

Șablonul se construiește cu ajutorul ecuației de mișcare a trenului pentru $\triangle V =$ constant (de exemplu : $\triangle V = 10$ km/h). Valoarea intervalului de timp în care viteza crește cu o valoare constantă autorul o determină cu ajutorul relației :

$$\Delta t = \frac{10}{20 - c}$$

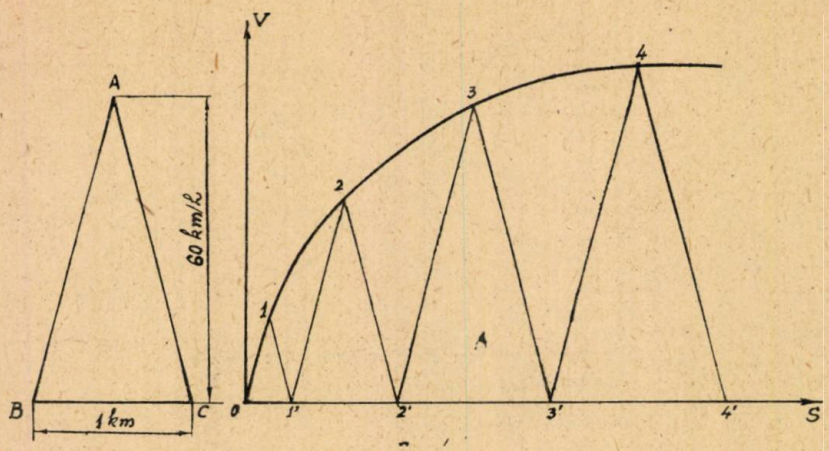


Fig. 4

unde c — reprezintă valoarea cu care scade forța specifică de accelerație în intervalul de viteză $\triangle V = 10$ km/h.

In intervalul de viteză $\triangle V$ ales, autorul consideră forța specifică de accelerație constantă și egală cu valoarea ei de la începutul intervalului.

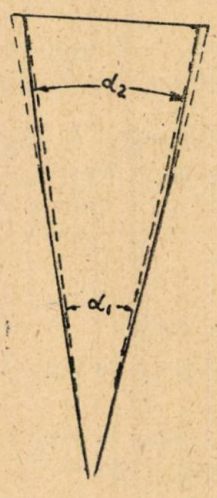


Fig. 5

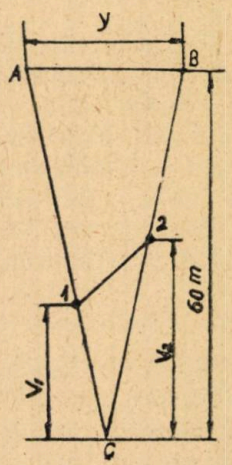


Fig. 6

Trebuie arătat că în unele cazuri construirea unei nomograme cu un unghi α variabil prezintă unele dificultăți.

Metoda propusă

Pentru determinarea vitezei și timpului de mers cu un consum de timp minim și fără a micșora precizia, se recomandă următoarea variantă pentru construirea curbei $V = f(s)$.

Dacă în ecuația de mișcare a trenului se înlocuiește valoarea accelerației specifice φ cu 2 km/h min și se menține Δt constant se obține următoarea ecuație:

$$\Delta V = 2 \Delta t (f_0 - w_t)_m = K (f_0 - w_t)_m . \qquad (10)$$

Considerîndu-se la începutul intervalului de timp Δt viteza egală cu V_1, viteza V_2 de la sfîrșitul intervalului Δt se poate determina cu ajutorul relației.

$$V_2 = V_1 + \Delta V . \qquad (11)$$

Pe baza ecuațiilor (10) și (11) se poate construi cu ușurință curba $V = f(s)$ dacă se folosește triunghiul lui Degtirov.

Se construiește un triunghi ABC, ca în fig. 6, cu baza y (în mm) care la scară corespunde la un km de drum și cu înălțimea de 60 m (în mm) care la scară corespunde vitezei de 60 km/h.

Triunghiul din fig. 6 se construiește și pentru alte valori ale intervalului de timp Δt și în acest caz baza devine Δty. Dacă la un moment dat viteza de circulație a trenului are valoarea V_1 (punctul 1 din fig. 6), cu ajutorul ecuației (10) se determină creșterea de viteză ΔV, iar cu ecuația (11) se determină viteza V_2. Pe latura CB a triunghiului ABC, se determină la scară o valoare egală cu V_2 și se obține punctul 2.

Segmentul de dreaptă 1—2 reprezintă un segment al curbei $V = f(s)$.

Construirea curbei $V = f(s)$ prin această metodă este arătată în fig. 7 și constă în următoarele:

Se presupune construită curba $V = f(s)$ prin una din metodele cunoscute pînă în punctul A, care determină viteza V_A corespunzătoare începutului intervalului de timp Δt. La sfîrșitul acestui interval de timp viteza este V_B care se determină cu ecuația

$$V_B = V_A + \Delta V_{AB} \qquad (11')$$

în care creșterea de viteză ΔV_{AB} în intervalul de timp Δt se determină cu ecuația

$$\Delta V_{AB} = K (f_0 - w_t)_m^{AB} \qquad (10')$$

Valoarea medie a forței specifice de accelerație se citește din diagrama 7 a.

Porțiunea de spațiu $A'B'$ parcursă de tren în intervalul de timp Δt corespunzător căruia viteza trenului crește cu valoarea ΔV_{AB} se poate determina folosindu-se triunghiul lui Degtiorov, astfel: se construiește

triunghiul $A''DB'''$, pe fig 7 b, cu unghiul $A''DB''' = 2\alpha$, cu bisectoarea perpendiculară pe axa spațiului și cu latura $A''D$ trecînd prin punctul A. Valoarea unghiului α se determină cu ajutorul mărimilor triunghiului lui Degtiorov, astfel :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{2 \cdot 60\ \text{m}}\,\Delta t. \qquad (12)$$

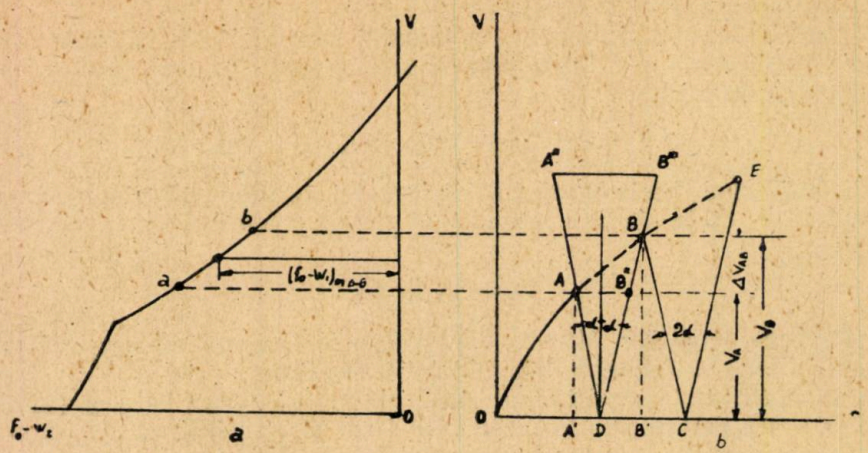


Fig. 7

Ducîndu-se la axa spațiului o paralelă la distanța V_B se obține la intersecția acesteia cu latura DB'''' punctul B. Prin unirea punctului A cu punctul B se obține un segment al curbei $V = f(s)$. Următoarele puncte, cu ajutorul cărora se construiește curba $V = f(s)$, se determină în mod asemănător.

Se observă că ecuația (10) folosită la construirea curbei $V = f(s)$ prin metoda propusă prezintă o nedeterminare, deoarece sînt necunoscute atît $\triangle V$ cît și $(f_0 - w_t)_m$. Această nedeterminare se ridică prin încercări. Astfel : se ia punctul a pe curba $f - w = f(V)$, fig. 7a corespunzător punctului A de pe curba $V = f(s)$; se alege un alt punct b, pe aceeași curbă, care determină și creșterea de viteză $\triangle V$; se citește apoi valoarea forței specifice de accelerație corespunzătoare vitezei medii. Dacă forța specifică de accelerație amplificată cu $k = \varphi \triangle t$ nu este egală cu valoarea intervalului de viteză ΔV (nu se verifică ecuația (10)) atunci punctul b se deplasează spre viteze mai mari sau mai mici după cum $\triangle V$ este mai mic respectiv mai mare decît $k\,(f_0 - w_t)_m$. Încercările se continuă pînă cînd este verificată ecuația (10).

Practic, pentru trasarea diagramei $V = f(s)$ prin această metodă se folosește un șablon de material plastic (fig. 8).

Pe acest șablon unghiul $2\,\alpha$ se construiește, cu bisectoarea perpendiculară pe baza șablonului, folosindu-se relația (12) din care rezultă că unghiul α depinde numai de scările y și m cînd $\triangle t = \text{const.}$

Mărimile y, m și Δt din relația (12) fiind constante rezultă că și valoarea unghiului α este constantă, iar șablonul capătă un caracter universal. El poate fi folosit atît în cazul cînd locomotiva funcționează în regim de tracțiune (cu consum de combustibil sau de energie electrică) cît și pentru mersul fără consum de combustibil sau de energie electrică sau în timpul frînării.

La mersul fără consum de combustibil sau de energie electrică creșterea vitezei ΔV în intervalul de timp Δt se determină cu ajutorul ecuației:

$$\Delta V = 2\Delta t (w'_t)^*, \tag{13}$$

unde:

w'_t — forța rezistentă specifică a trenului la mersul locomotivei fără consum de combustibil sau de energie electrică (la locomotivele cu abur, la mersul cu regulatorul închis), în kgf/t.

La mersul cu frînare, creșterea ΔV a vitezei în intervalul de timp Δt se poate determina cu ajutorul relației:

$$\Delta V = 2\Delta t (b + w'_t)_m, \tag{14}$$

unde:

b — forța specifică de frînare a trenului, kgf/t.

Valorile creșterilor de viteză ΔV, la mersul fără consum de combustibil sau de energie electrică, se determină tot prin încercări însă cu ajutorul curbei $w'_t = f(V)$, iar pentru mersul cu frînare cu ajutorul curbei $b + w'_t = f(V)$.

Tabloul 1

Intervalul	V_i	$(f_o - w_e)_m$	ΔV_i	V_s
0	1	2	3	4
1	V_o	$(f_o - w_t)_{0-1}$	ΔV_{0-1}	V_1
2	V_1	$(f_o - w_t)_{1-2}$	ΔV_{1-2}	V_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	V_{n-1}	$(f_o - w_t)_{(1-1)-n}$	$\Delta V_{(n-1)-n}$	V_n

Valorile vitezei la începutul intervalului de timp Δt se determină pe latura din partea stîngă a unghiului 2α iar cele de la sfîrșitul intervalului pe latura dreaptă a aceluiași unghi, așa cum se vede în fig. 8. Unindu-se punctul de la începutul și sfîrșitul aceluiași interval de timp se obțin segmentele de dreaptă V_1V_2, V_2V_3,... care reprezintă segmente ale curbei $V = f(s)$.

Pentru realizarea unei precizii cît mai mari se recomandă a se adopta valoarea intervalului de timp Δt pentru mersul locomotivei în regim de

tracțiune ½ min, iar pentru mersul în regim de frînare ¼ min. Valoarea intervalului de timp $\triangle t$ de 1 min. se recomandă numai pentru mersul locomotivei în regim de tracțiune și numai în cazul cînd curba $(f_0 - w_t) = f(V)$, în acest interval de timp, are o variație aproximativ liniară. Valori mai mari de 1 minut nu se recomandă.

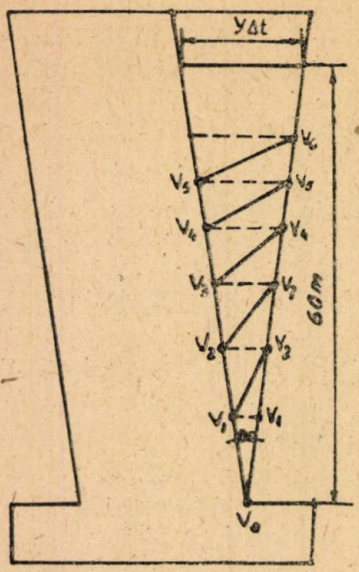


Fig. 8

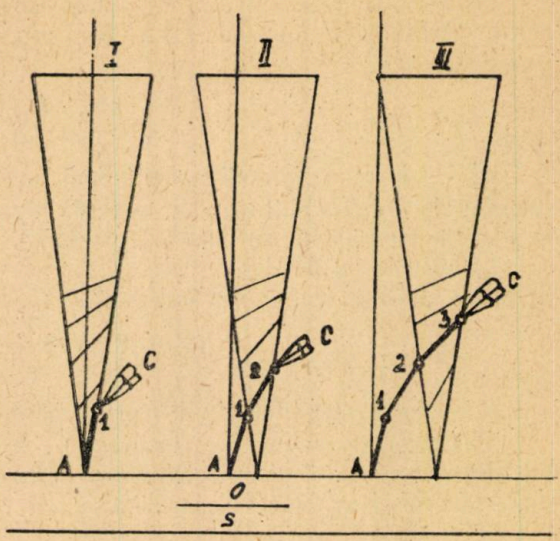


Fig. 9

Șablonul se construiește pentru cazul cînd trenul circulă în palier și aliniament, după cum și curba $f_0 - w_t = f(V)$ a fost construită pentru aceeași situație. În exploatare însă, trenul circulă și pe rampe și pante (rezistența datorită curbelor se ia în considerație la simplificarea profilului).

Pentru mersul în palier și aliniament folosirea șablonului pentru construirea curbei $V = f(s)$ rezultă din fig. 9.

Construirea curbei $V = f(s)$ începe prin așezarea șablonului cu vîrful unghiului 2α în origine (punctul A din fig. 9) și cu un creion (C) bine ascuțit se înseamnă punctul 1, care indică valoarea vitezei la sfîrșitul primului interval de timp $\triangle t$. Se deplasează șablonul spre dreapta pînă cînd latura din partea stîngă a șablonului se suprapune peste punctul 1 (poziția II-a a șablonului din fig. 9), și se înseamnă cu vîrful creionului, în partea dreaptă a șablonului, viteza la sfîrșitul celui de al doilea interval de timp, obținîndu-se astfel punctul 2. Următoarele puncte se obțin în mod analog. Unindu-se punctele A, 1, 2, 3,...,n se obține curba $V = f(s)$ la mersul trenului în palier și aliniament.

Pentru mersul trenului pe rampe viteza la sfîrșitul intervalului de timp $\triangle t$ se micșorează față de viteza corespunzătoare de pe șablon de-

oarece $\triangle V$ se micșorează datorită creșterii forței rezistente. Ecuația de micșorare a trenului pentru această situație capătă forma :

$$\Delta V = 2\Delta t\,[f_0 - (w_t + i)]. \qquad (15)$$

La mersul trenului pe pante valoarea vitezei la sfîrșitul intervalului respectiv de timp $\triangle t$ se mărește față de viteza corespunzătoare segmen-

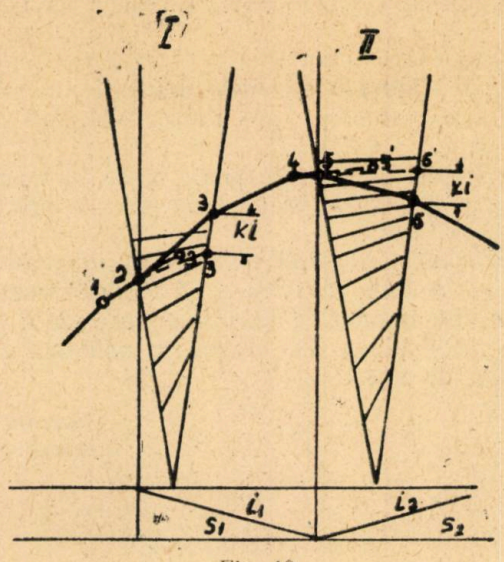


Fig. 10

telor de pe șablon după cum creșterea vitezei $\triangle V$ se mărește datorită micșorării forței rezistente. În acest caz ecuația de mișcare a trenului se scrie sub forma :

$$\Delta V = 2\Delta t\,[f_0 - (w_t - i)]. \qquad (16$$

Practic, curba $V = f(s)$ la mersul pe rampe și pante se construiește după cum se vede în fig. 10.

Cu ajutorul șablonului se determină valoarea vitezei la sfîrșitul intervalului de timp $\triangle t$ ca și în cazul mersului în palier și aliniament obținîndu-se punctul 3′ (fig. 10 I) la mersul pe pante, iar punctul 6′ (fig. 10 II) la mersul pe rampe. După aceea la mersul pe pante valoarea vitezei de la sfîrșitul intervalului de timp $\triangle t$ se mărește cu valoarea ki, iar la mersul pe rampe se micșorează cu valoarea ki, unde $k = 2\triangle tm$. Se obțin astfel punctele 3 și respectiv 6 care dau vitezele la sfîrșitul intervalului de timp pe pante și respectiv pe rampe.

Concluzii

Metodele existente pentru trasarea curbei $V = f(s)$, în afară de metoda vitezelor uniforme, dau o aproximație care satisface necesitățile de exploatare a căilor ferate. Ele au fost și mai sînt folosite în exploatarea căilor ferate pentru rezolvarea problemelor de tracțiune și exploatare.

Deoarece la C.F.R. nu există o instrucție specială pentru efectuarea calculelor de tracțiune, la determinarea vitezei și timpilor de mers se utilizează diverse metode și mai ales metoda vitezelor uniforme care după cum a arătat practica dă erori, în unele cazuri pînă la 25%. Folosirea metodelor existente, cu excepția metodei lui Stanislaviuc, necesită un consum mare de timp, în special pentru lucrările cu un volum mare de lucru.

Pentru rezolvarea problemelor de tracțiune și exploatare (viteze, timpi de mers, etc), precum și pentru calculele tehnico-economice se recomandă folosirea metodei nomogramelor, care reduce volumul de lucru față de metodele existente de circa 8÷10 ori.

Prin folosirea acestei metode, se poate trasa în timp de o oră curba $V = f(s)$ pentru circa 200÷250 km de linie și cu o precizie egală cu cea obținută prin metoda Lipetz.

Șablonul odată construit, avînd un caracter universal, poate fi folosit pentru toate cazurile în care valoarea $\triangle t$ rămîne aceeași, cu observația că segmentele de curbă trasate pe șablon se înlocuiesc cu cele corespunzătoare cazului ce se studiază. De asemenea șablonul se folosește și la determinarea timpilor de mers.

Catedra material rulant
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Popa* — К вопросу о выборе вида тяги для основных магистралей РМД. Москва, 1963.

2. *В. А. Станиславюк* — Новый способ построения кривой скорости движения поезда при тяговых расчетах. МПС СССР Бюлетень технико-экономической информации № 11—12, 1957.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 7672

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 FEB 22

F 1130

REFERATE

Geod.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

R

TOMUL XXVII NUMĂRUL 2 ANUL 1965
MARTIE—APRILIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 2

MARTIE—APRILIE
1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Prof. *S. Gîdea*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *A. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. Dr. *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R P. R.

Sumar

MATEMATICĂ

C. Ionescu-Bujor
Sur les transformations optiques de l'espace 17

HIDRAULICĂ

D. Pavel
Contribuție la proiectarea rotoarelor hidraulice 31

CHIMIE ANORGANICĂ

T. D. Ionescu, G. Uță, G. Tudorache
Utilizarea schimbătorilor de ioni la electroliza clorurei de sodiu . . 49

A. Ianu, Gr. Teodorescu, A. Dinescu, L. Cocărgeanu
Identificarea și dozarea pierderilor de mercur de la electroliza clorurei de sodiu 61

CHIMIA MACROMOLECULARĂ

O. F. Solomon, N. Cobianu, I. Z. Ciută
Polimerizarea N-vinil-carbazolului cu soluții apoase de acid percloric diluat 65

REZISTENȚA MATERIALELOR

I. Zamfirescu
Deformația absolută a țevii închise la capete și supusă la presiune interioară și exterioară 71

TERMOTEHNICĂ

L. Stoicescu, S. Petrescu
Kreisprozesse die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden . 87

L. Stoicescu, S. Petrescu
Experimentale Überprüfung des neuen Ausdruckes des ersten Grundsatzes für thermodynamische Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit 97

C. Țurcanu
Contribuții la aplicarea similitudinii la motoarele rachetă cu combustibil lichid 107

M. Grigoriu
Importanța exergiei pentru studiul proceselor reale din mașinile frigorifice cu compresie de vapori 117

ELECTRONICĂ

I. Teodorescu, I. Luchian
Acceleratoare rezonante cu unda stationară pentru ioni 131

Резюме

К. Ионеску-Бужор Д.К. 513.7

От оптических ireобразованиях в пространстве (I)

В этой работе автор исследует оптические преобразования в пространстве через собирающую линзу, при помощи метода данного в предыдущих работах [1] и [2].

В первой часту работы рассматриваются сходящиеся трансляции пространства, которые могут быть разложенны в оптические преобразования Сходящиеся трансляции определенны в § 2 и их свойства данны (§ 3 — § 14).

Доказывается, что множество (T) сходящихся пространственных трансляции является совершенно симметричным (См раб. [3] и [4]. в отношении $[G]$, главной группы эвклидовой геометрии пространства. Также и множества $[G]$,

$$[S] = [T] \cup [G] \cup [TG]$$

являются совершенно симметричными в отношение $[G]$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Д. Павел Д.К. 621-25

Разметка профиля и потока роторов типа Франчиса

На основе двух функций между относительными координатами x_e/x_{em}, x_i/x_{im} радиальные и соответсвенно L/L_e, L/L_i осевые, а ткже на основе статических первоначальных отношений определятся аналитическим путем профиль ротора Франчиса. Расчет применяется у турбин с разными скоростями $n_s = 100 \ldots 400$ (рис. 1—2.)

Поле утечек, полученное практически путем последовательных испытаний, в работе расчитывается более точно в зависимости от осевых симметричных координат Методы расчета конкретизируются двумя функциями (рис. 3—4) более быстрее и точнее, чем в случае использования известных методв.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Д.К. 661.42 : 547.398.6

Т. Д. Ионеску, Г. Уцэ, Г. Тудораке

Использование ионных обменников при электролизе хлористого натра

В этой работе изучается возможность применения ионных обменников при очищении рассолов хлористого натра и при очищении едких щелочей, получающихся от электролизаторов. Были установлены оптимальные условия работы и были проведены технико-экономический расчет.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

А. Иану, Гр. Теодореску, А. Динеску, Л. Косэрджяну Д.К. 456.49 : 661.41

Определение и дозировка потерь при электролизе хлористого натра

Исследуются точки механического процесса электролиза хлористого натра, где могут происходить потери ртути. Устанавливается, что большинство потерь ртути происходит в точках конденсирования воды, образующейся вследствие выделения водорода.

Производится колориметрическая дозировка ртути, используемая в виде реактива dimetilaminobenziiidenrodamin.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Summary

C. Ionescu-Bujor D.C. 513.7

Optical Transformations in the Space (I)

In this note, the author does a short study of the transformations by convergent lentil in the space, with the method given in the papers {1} and {2}. The first part of the note presents the convergent translations of the space. These transformations permit a decomposition of the transformations by lentil. They are defined at § 2°. Some theorems are given in the next paragraphs (§ 3°—§ 14°).

Then it is shown that the set [T] of convergent translations of the space is perfect symmetric (see the notes 3 and 4) in connexion with [G], the principal goup of the Euclid's geometry of the space. Also the sets [TG],

$$[S] = [T] \cup [G] \cup [TG]$$

are perfect symmetrie in connexion with [G].

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D. Pavel D.C. 621—25

The Treatment of the Profile and the Flux of Francis Rotors

On the basis of two functions between the relative coordinates x_e/x_{em}, x_i/x_{im}, — respectively L/L_e, L/L_i, axial, and the original statistic relations, the profile of the Francis rotor is determined analytically. The computing is applied to the turbine with different speeds $n_s = 100 \ldots 400$ (fig. 1—2).

The field of discharge obtained practically by repeated attempts is computed more exactly in this study by ψ φ depending on the axial simetrical coordinates r z. The computing method is exemplified by means of two functions (fig. 3; 4) more rapidly and exactly than by common methods.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.C. 661.42 : 547.398.6

T. D. Ionescu, Gh. Uţă, G. Tudorache

The Use of the Change of Ions in the Electrolysis of Sodium Chloride.

In this work is studied the possibility of applying the changes of ions for the sodium chloride brine purifving and the caustic by, resulting from the electrolysis apparatus with diaphragm. The best conditions of work have been established, and a technical economic computing has been made.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.C. 456.49 : 661.41

A. Ianu, Gr. Teodorescu, A. Dinescu, L. Cocărgeanu

The Identification and Dosing of Mercury Losses in the Electrolysis of Sodium Chloride.

The authors analyses the points in the technological process where losses of mercury may be found. It is observed that most of the losses take place at the water condensing points resulting from the descharging hydrogen. Mercury is calorimetrically dosed using as a reactive dimetil-aminobenzilideurodanina.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Д. К. 547.759.32 : 546.133.3

О. Ф. Соломон, Н. Кобиану, И. З. Чутэ

Полимеризация и — винилкарбозоля с лодными растворпми перхлорной кислоты.

Исседовались полимеризация и — вигилкарбозоля с водными оастворами перхлорной кислоты в различных растсориелях (метил, этил, ктон, этилацетат, ацетон и толуол)

Оценивается скорость полимеризации. Наряду с полимеризацией были выделены кристалические продукты типа дим-ровтрммеров, характеристики которых даются на основе физико-химических свойств.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Д.К. 539.3

И. Замфиреску

Об абсолютной деформации труб

Работа посвящена изучению проблемы абсолютной деформации стенок труб с учетом специфических деформаций по направлению оси трубы, радиуса и касательной в тех случаях, когда труба подвергается внутреннему давлению p_i, внешнему давлению p_e, равномерно распределенным по стенкам трубы.

Для этого рассматривались в качестге переменных параметров радиус в определенной точке трубы и соотношение p_i/p_e установленных давлений.

Была выяснена взможность проявления абсолютной деформации в стенках трубы, благодаря этим параметрам.

Исследование позволяет установить, как будут вести себя турбы под действием рассматриваемых сил и наоборот: выбирать эти силы так, чтобы труба выдержала их действие определенным образом, который соответствовал бы характеристикам прочности.

Кроме того, это исследование выясняет некоторые интересные особенности сопротивления труб, при которых радиусы имеют определенные значения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2/965

Д.К. 621.1.01.

Л. Стоическу, С. Петреску

Циклы, пройденные с конечной скоростью

Новое математическое выражение первого начала для термодинамических процессов с конечной скоростью использовано для вывода термического КПД одного необратимого цикла, пройденного с конечной скоростью.

В связи с тем, что все уравнения необратимых превращений построены так, что уравнения обратимых превращений представляются как частный случай, авторы пришли к выражению термического необратимого КПД как произведению обратимого КПД с числом необратимости. Это является функцией средней скорости поршня, средней молекулярной скорости, адиабатного показателя агента, степени сжатия и степени роста давления во время горения.

Достигается максимальная скорость прохождения одного цикла мотор; сверх этой скорости цикл становится потребителем, хотя он пройден в прямом направлении. Приходим к второй теореме Карно ($\eta_{t.irev.} < \eta_{t.rev.}$) без обращения ко 2-му началу термодинамики, сформулированному феноменологически.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.C. 547.759.32 : 546.133.3

O. F. Solomon, N. Cobianu, I. Z. Ciută

The Polymerization of N-Vinylcarbazole in Aqueous Solutions of Perchloric Acid.

There has been studied the polymerization of N-vinylcarbazole in aqueous solutions of the perchloric acid in different solvents (methyl-ethyl-cetone ethyl-acetate, aceton and toluene). Appreciations concerning the polymerization velocity are made. Besides the polymers there have been separated crystalline products of the dimer an trimer type, which have been characterised on the basis of some of their physical and chemical properties.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.C. 539.3

I. Zamfirescu

On the Absolute Distortion of Pipes.

In this paper is studied the absolute distortion of the pipe wall, considering the specific distortions in the pipe axle direction, in the radius direction; and in the tangent direction, when the pipe is subjected to a p_i internal pressure, a p_e external pressure, uniformly distributed over the sides of the pipe.

Therefore, the radius in any point of the pipe and the ratio p_i/p_e of the above mentioned pressures, have been considered as variable parameters.

The possibilities of the absolute distortion to come out into the walls of the pipes, owing to these parameters, have been also shown.

The study gave the possibility to recognize the behaviour of the pipe under the action of the forces above mentioned and, inversely to choose these forces, so that the pipe may resist in a certain way convenient to its strength features. From the study result also some interesting strength properties of the pipes-at which the radii have certain values.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.C. 621.1.01

L. Stoicescu, S. Petrescu

Cycles Covered with Finite Speed

The new mathematical expression of the first principle for the thermodynamic processes with finite speed used to deduce the thermic efficiency of an irreversible cycle covered with finite speed.

As all the equations of irreversible transformations are built up so that the equations of the reversible ones should appear as a special case, it also comes to an expression of irreversible thermic efficiency as a product of the reversible one with an irreversible figure. This is a function of the average speed of the piston, of the molecular average speed, of the adiabatic exponent of the agent, of the rate of compression and of the rate of the pressure increase during the izocore burning. It comes to a maximum speed of covering a working cycle; over this speed the cycle becomes consumer though it is covered in direct way. It comes to the second Carnot's theorem ($\eta_{t.trev.} < \eta_{t.rev.}$) without resorting to the second principle of thermodynamics phenomelogically formulated.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Л. Стоическу, С. Петреску Д.К. 621.1.01

Экспериментальная проверка нового выражения первого начала термодинамических процессов конечной скорости

В исследовании проводится экспериментальная проверка нового выражения первого начала термодинамических процессов конечной скорости, осуществляемая на основании некоторых выводов вытекающих из него.

Теоретическим путем авторы выводят выражение эффекта необратимости и приходят к заключению, что эффект необратимости пропорционален скорости процесса. Опытным путем определяется эффект. Проверяется прямая пропорциональность эффекта с конечной скоростью процесса. Осуществляется проверка абсолютной велигины эффекта.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

К. Цуркану Д. К. 621.45 : 621-63

К вопросу о применении подобия. в ракетных двигателях с жидким горючим

На основании критериев подобия. используемых при изучении распылеоия, в работе получены новые отношения подобия для ракетного двигателя с жидким горючим, отношения которые учитывают изменение поверхностн го нэпряжения и плотности жидкого топливо. Предложены масштабные данные для: диаметра, камеры сгорапия, скоросгу и давления в камере сгорания тяги двигателя и диаметра инжектора.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

М. Григориу Д.К. 621.57:621.54

Важность эксергии в изучении охлаждающих машин с паровым давлением

В статье указывается метод анализа эффективности холодильных машин на основании использования эксергии.

Определяется эксергия, указывается методика установления выражения и значения эксергии одной жидкости и определяется эксергетический к. п. д,

Указывается методика пользования диаграммы эксергии-энталпии в изучении паровых холоднльных машин и для определения эксергетического к. п. д.

Указывается диаграмма, (ex — i) для хлористого метила — выработанная автором, диаграмма которая может быть использована для практических расчетов в изучении и проектировании паровых холодильных машин хлористого метила.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

И. Теодореску И. Лукьян Д.К. 539.17

Резонансные ускорители с установившейся волной для ионов

Работа изучает влияние размера продольного ускоренного протежутка над энергией, полученной частицами, при его прохождениях, с целью получения максимума энергии без использования больших величин электрического поля. С этой точки зрения определяются оптимальные условия для данного поля и анализируются несколько конструктивных вариантов, которые могут быть использованы как ускорители малой энергии для ионов, предназначенные для получения быстрых нейтронов через реакцию $D — T$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

L. Stoicescu, S. Petrescu D.C. 621.1.01

The Experimental Verification of a New Expression of the First Principle for Thermodynamic Processes with Finite Speed.

The authors have in view the experimental verification of a new expression of the first principle for the thermodynamic processes with finite speed on the basis of some consequences resulting from it. The expression of the effect of irreversibility is theoretically deduced coming to the conclusion that this is proportional to the process speed. The effect is experimentally determined. The direct proportionality of the effect to the process speed is checked up. The absolute value of the effect is verified.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C. Turcanu D.C. 621.45 : 621—63

Contributions to the Applying of Similarity to Rocket Engines with Liquid Fuel.

Using the similarity criteria used in the study of atomizing, new similarity relations are obtained for the rocket engine with liquid fuel : relations taking into account the change of the surface tension and of the liquid fuel density. Scale factors are shown for : the diameter of the combustion chamber ; the speed and pression of the combustion chamber, the engine traction and the injector diameter.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

M. Grigoriu D.C. 621.57 : 621.54

Importance of Exergy for the Study of the Steam Compression Refrigerating Machine.

In the paper is shown a method of annalvsis of the efficiency at the refrigerating machine based on the use of the concept Exergy. There is given the definition of Exergy, the methodology regarding the determination of the expression and value of exergy, withim a fluid and is defined also the exergetical performance.

Further the paper presents the methods for using the exergy-entolopy-diagram when studying the steam compression refrigerating machine and establishing the exergetical performance of this machine. Is presented the diagram *(ex-i)* for methyl chloride worked out by the author which diagram can be used for practic calculations in studying and projecting steam compression refrigerating machines operating with methyl-chloride.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

I. Teodorescu, I. Luchian D.C. 539.17

Ion Resonant Accelerators with Stationary Wave.

The paper studies the longitudinal dimension influence of the accelerating interval upon the energy gained by the particles when crossing it. in order to obtain the maximum energy, without having to deal with too high values of the electric field. The optimum conditions for a given field are determined considering this point of view ; and some constructive variants, available as low energy accelerators for ions aimed at obtaining rapid neutrons by *D-T*. reaction, are as well analysed.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Résumé

C. Ionescu-Bujor C.D. 513.7

Sur les transformations optiques de l'espace (I)

Dans cette note, l'auteur fait une brève étude des transformations par lentilles de l'espace, en utilisant la méthode donnée dans ses travaux {1} et {2}.

La primière partie de la note présente les translations convergentes de l'espace. Ces transformations permettent une décomposition des transformations par lentilles. Elles sont définies à § 2°. Quelques propriétés sont données dans les paragraphes suivantes (§ 3°—§ 14°).

Puis on montre que l'ensemble [T] des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique (voir pour cette notion les notes 3 et 4) par rapport à [G], le groupe principal de la géométrie euclidienne de l'espace Aussi le ensembles [TG].

$$[S] = [T] \cup [G] \cup [TG]$$

sont parfaitement symétriques par rapport à [G].

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D. Pavel C.D. 621—25

Le traçage du profil et du flux des rotors Francis

Sur la base des deux fonctions entre les coordonnées relatives x_e/x_{em}, x_i/x_{im}, — radiaux respectivement L/L_e, L/L_i, axiales et des relations statiques originales, on détermine sur voie analytique le profil du rotor Francis. Le calcul s'applique aux turbines avec rapidités différentes $n_s = 100 \ldots 400$ (fig. 1—2).

Le champ de fluxe, obtenu en pratique par des essais successifs, est calculé dans l'étude plus exactement par ψ φ en function des coordonnées axial -symétriques r z. Les méthodes de calcul s'exemplifie par deux fonctions (fig. 3—4) de beaucoup plus rapidement et exactement que selon les méthodes usuelles.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C.D. 661.42 : 547.398.6

T. D. Ionescu, Gh. Uţă, G. Tudorache

L-utilisation des changements d-ions dans l'électrolyse de la clorure de sodium.

On a établi dans ce travail la possibilité de l'application des inverseurs d'ions, à la purification de la saumure de clorure de sodium et à la purification des lessives caustique, issues des électrolysateurs à dyaphragme. On a établi les conditions optimes de travail et on a effectué un calcul techno-économique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C.D. 456.49 : 661.41

A. Ianu, Gr. Teodorescu, A. Dinescu, L. Cocărgeanu

L'identification et le dosage des pertes de mercure pendant l'électrolyse de la clorure de soude.

On cherche les points du procès technologique de l'électrolyse de la clorure de soude où peuvent avoir lieu des pertes de mercure. On constate que la majorité des pertes de mercure ont lieu aux points de condensation de l'eau qui résulte de l'hydrogène qui se dégage. On fait le dosage colorimètrique du mercure en utilisant comune réactif dimethylaminobenzyliden-rhodanin.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

Zusammenfassung

C. Ionescu-Bujor D.K. 513.7

Optische Transformationen im Raume (I)

In dieser Anmerkung gibt der Vefasser einige Sätze über den Transformationen durch Linse im Raume, benutzend die Methode die in {1} und {2} gegeben wird.

Der erste Teil der Anmerkung vorstellt die konvergenten Translationen im Raume. Diese Transformationen erlauben eine Zersetzung der Transformationen durch Linse. Sie werden zu § 2° bestimmt.

Einige Eigenschaften werden in den folgenden Absätzen (§ 3°—§ 14°) gegeben.

Dann zeigt man dass die Menge [T] der konvergenten Translationen im Raume vollkommensymetrische (sehen die Anmerkungen 3 und 4) in Beziehung der euklidischen Geometrie im Raume sei.

Auch die Mengen [TG],

$$[S] = [T] \cup [G] \cup [TG]$$

sind vollkommensymetrischen in Beziehung auf [G].

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D. Pavel D.K. 621—25

Entwurf des Profils und Strömungsfeldes der Francis-Laufräder

Auf Grund von zwei Funktionen zwischen den relativen Koordinaten r_e/x_{em}, x_t/x_{tm},— in radialer Richtung, bezw. den achsialen L/L_e, L/L_t, und neuen statistischen Beziehungen, wird das Profil des Francis-Laufrades analytsch bestimmt. Die praktische Berechnung wird für Laufräder verschiedener Schanelläufigkeit $n_s = 100 \ldots 400$ (Abb. 1 — 2) angewandt.

Das Strömungsfeld, welches praktisch mittels wiederholten Annäherungen erzielt wird, ist in diesem Beitrag genauer ausgerechnet, durch ψ φ als Funktionen der achsialsymetrischen Koordinaten r z. Die Rechnungsmethoden sind durch zwei Beispiele erläutert (Abb. 3—4), welche viel schneller und genauer erzielt werden, als diejenigen nach den üblichen Methoden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.K. 661 42 : 547.398.6

T. D. Ionescu, Gh. Uţă, G. Tudorache

Die Anwendung der Ionenaustauscher in der Elektrolyse des Natriumchlorids.

In dieser Arbeit wurde die Anwendungsmöglichkeit der Ionenaustauscher zur Reinigung der Natriumchloridlösung und der Reinigung der Alkalilaugen, welche von den Elektrolysörs mit Diaphragma resultieren, studiert.

Es wurden die besten Arbeitsbedingungen festgesetzt und eine technisch-ökonomische Berechnung durchgeführt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.K. 456.49 : 661.41

A. Ianu, Gr. Teodorescu, A. Dinescu, L. Cocărgeanu

Nachweis und Bestimmung der Quecksilberverluste bei der Elektrolyse von Natriumchlorid.

Man sucht die Punkte des technologischen Prozesses der Natrium-Chlorid-Elektrolyse wo Quecksilberverluste auftreten können. Man erkennt dass in meisten Fällen die Quecksilberverluste tretten in den Punkten wo das aus der ausscheidende Wasserstoff resultierendes Wasser Kondensiert auf.

Es tut die kolorimetrische Quecksilberbestimmung mit dimethylamino-benzilyden-rhodanin.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C.D. 547.759.32 : 546.133.3

O. F. Solomon, N. Cobianu, I. Z. Ciută

La polymérisation du N-vinylcarbazol par des solution aqueuses d'acide perchlorique.

On a étudié la polymérisation du N-vinylcarbazol par des solutions aqueuses d'acide perchlorique dans des solvants differents (méthyle-éthuyle-cétone, acétate d'étyle, acétone et toluene). On fait des considérations concernant la vitesse de polymérisation. Outre les polymères, on a séparé des produits cristallins du type dimère-trimère, qui ont été caracterisés à partir de certaines propriétés hpysico-chimiques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C.D. 539.3

I. Zamfirescu

Sur les déformations absolues des tuyaux.

Dans l'ouvrage on étudie la déformation absolue de la paroi du tuyau en tenant compte des déformations spécifiques sur l'axe du tuyau dans la direction du rayon et dans la direction de la tangente au cas où le tuyau est soumis à une pression intérieure p_i à la pression extérieure p_i uniformément distribuée sur les côtes du tuyau. Pour cela on a considéré comme paramètres variables le rayon dans un certain point du tuyau et le rapport p_i/p_e des pressions mentionnées. Ou a mis en évidence les possibilites de se manifester des déformations absolues dans la paroi du tuyau grâce à cels paramètres. L'étude permet de connaître la manière dont se comporte le tuyau sous l'action des forces considérées et réciproquement, choisir ces forces de façon que le tuyau résiste d'une certaine maniere, convenable du point de vue de ses caractéristiques de résistance. De même il en résulte aussi de l'etude quelques propriétés intéressantes de la résistance des tuyaux à la quelle les rayon ont certaines valeurs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C.D. 621.1.01

L. Stoicescu, S. Petrescu

Cycles parcourus à vitesse finie.

La nouvelle expression mathématique du premier principe pour les proces thermodynamiques à vitesse finie est employée pour la déduction du rendement thermique d'un cycle irréversible parcouru à vitesse finie. Puisque toutes les équations des transformations irréversibles sont bâties de telle manière que les équations des transformations réversibles apparaissent comme un cas particulier ; on est arrivé aussi à une expression du rendement thermique irréversible comme un produit du rendement réversible avec un ciffre d'irréversibilité. Celui-ci est une fonction de la vitesse moyenne du piston, de la vitesse moyenne moléculaire, de l'exponent adyabatique de l'agent, du degré de compression et du degré de l'accroissement de la pression penaant la combustion isocore. On arrive à une vitesse maxima du parcours du cycle moteur ; au delà de cette vitesse le cycle devient consomateur, quoiqu'il soit parcourus dans un sens directe. On arrive au deuxième théorème de Carnot ($\eta_{t.ir.} < \eta_{t.rev.}$) sans faire appel du deuxième principe de la thérmodynamique formulée d'une maniere phénoménologique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

D.K. 547.759.32 : 546.133.3

O. F. Solomon, N. Cobianu, I. Z. Ciută

Die Polymerisation von N-Vinyl-Carbazol mit wässerigen Perchlorsäurelösungen.

Es wurde die Polymerisation des N-Vinyl-Carbazols mit wässeri gen Perchlorsäurelösungen in verschiedenen Lösungsmitteln untersucht (Methyl-Ethyl-Ceton, Ethylacetat, Aceton und Touluol). Es werden Betrachtungen bezüglich der Geschwindigkeit der Polymerisation angestellt. Ausser den Polymeren wurden kristalline Verbindungen des Typus der Dimere-Trimere abgetrennt und auf Grund einiger chemisch-physikalischer Eigenschaften charakterisiert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/935

I. Zamfirescu D.K. 539.3

In bezug auf die absolute Verformung der Rohre.

In der Arbeit wird die absolute Verformung der Rohrwand studiert, unter Berücksichtigung der spezifischen Verformung in Richtung der Rohrachse, in Richtung des Halbmessers und Richtung der Tangente, in den Fällen in welchen das Rohr dem gleichmässig auf den Flachen des Rohres verteilten inneren Druck p_i und äusseren Druck p_e, ausgesetz ist.

Zu diesem Zwecke wurden als veränderliche Parameter die genannten Halbmesser in irgendeinem Punkte des Rohres und das Verhältnis der Drucke p_i/p_e angenommen. Es wurden die Äeusserungsmöglichkeiten der durch diese Parameter bedingten absoluten Verformungen in der Rohrwand, unterstrichen.

Das Studium ermöglicht das Verhalten des Rohres unter der Wirkung der genannten Kräfte zu erkennen und reziprok, diese Kräfte so zu wählen, dass das Rohr in einer vom Gesichtspunkt seiner Resistenzcharakteristiken vorteilhaften Weise, standhält.

Ebenfalls ergeben sich aus dem Studium einige interessante Eigenschaften der Resistenz der Rohre, deren Halbmesser bestimmte Werte haben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/935

L. Stoicescu und S. Petrescu D.K. 621.1.01

Kreisprozesse die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Der neue mathematische Ausdruck des ersten Grundsatzes für thermodynamische Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit wird dazu benützt, um den thermischen Wirkungsgrad eines irreversiblen Kreisprozesses, der mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird, herzuleiten. Da die Gleichungen sämtlicher irreversiblen Zustandsänderungen derart aufgebaut sind, dass diejenigen der reversiblen als Spezialfall erscheinen, konnte man auch einen Ausdruck des irreversiblen thermischen Wirkungsgrades herleiten, der ein Produkt des reversiblen mit einer Irreversibilitäts-Zahl ist. Diese letzte ist eine Funktion von der mittleren K — Geschwindigkeit, der mittleren Geschwindigkeit der Gasmolekeln, dem adiabaten Exponenten des Gases, dem Verdichtungsgrad und dem während der isochoren Verbrennung auftretenden Druckverhältnis. Dabei kommt man zur Maximal-Geschwindigkeit mit welcher ein arbeitserzeugender Kreisprozess durchlaufen werden kann; darüber hinaus wird der Kreisprozess arbeitsverbrauchend, obwohl er im direkten Sinne durchlaufen wird. Das zweite Theorem von Carnot ($\eta_{t.ir.} < \eta_{t.rev.}$) wird festgestellt ohne an den phenomenologisch formulierten zweiten Grundsatz zu appellieren.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

L. Stoicescu, S. Petrescu C.D. 621.1.01

La vérification expérimentale de la nouvelle expression du premier principe pour les procés thermodynamiques à vitessé finie.

On poursuit la vérification expérimentale de la nouvelle expression du premier principe pour les procès thermodynamiques à vitesse finie, en raison de certaines conséquences qui en résultent. On décrit la méthode expérimentale employée pour vérifier les équations de l'effet de bates irréversibles à vitesse. On déduit l'expression de l'effet de l'irréversibilité par voie théorique et on arrive à la conclusion que celui-ci est proportionnel avec la vitesse du procès. On détermine l'effet par voie expérimentale. On vérifie le rapport direct de proportion de l'effet avec la vitesse du procès. On vérifie la valeur absolue de l'effet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

C. Ţurcanu C.D. 621.45 : 621—63

Contributions à l'application de la similitude dans des moteurs fusées à combustible liquide.

En employant le critérium de similitude utilisé dans l'étude de la pulvérisation, l'ouvrage obtient de nouvelles relations de similitude pour la moteur fusée à combustible liquide qui considère le changement de la tension superficielle et de la densité du combustible liquide. On présente des facteurs à l'échelle pour : chambre de combustion, la vitesse et la pression de chambre de combustion, la traction du moteur et le diamètre de l'injecteur.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

M. Grigoriu C.D. 621.57:621.54

L'importance de l'exergie pour l'étude des machines frigorifiques à compressions de vapeurs.

L'article présente une méthode d'analyse de l'éfficacité de la machine frigorifique à l'aide de l'exergie.

On définit l'exergie, on présente la méthodique d'établir l'expression et la valeur de l'exergie d'un fluidé et on définit le rendement exergétique.

On présente ensuite la méthodique de l'utilisation de la diagramme exergie-enthalpie pour l'étude de la machine frigorifique à compression de vapeurs et pour l'établissement du rendement exergétique de cette machine. On présente la diagramme (*ex-i*) pour la chlorure de méthile, élaborée par l'auteur, diagramme qui peut être utilisée pour des calcules pratiques à l'étude et à l'établissement des projets des machines frigorifiques à compression de vapeurs à chlorure de méthile.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

I. Teodorescu, I. Luchian C.D. 539.17

Accélérateurs resonnants à onde stationnaire pour les ions.

Le travail étudie l'influence de la dimension longitudinale de l'intervalle accélérateur sur l'énergie gagnée par les particules en traversant celui-ci, afin d'obtenir le maximum d'énergie sans faire intervenir des valeurs plus élevées du champ électrique. De ce point de vue, on détermine les conditions optima pour un champ donné et on analyse plusieurs variantes constructives, utilisables comme accélérateurs de basse énergie pour les ions, destinés à l'obtention des neutrons rapides par la réaction *D-T*.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII. Nr. 2/965

L. Stoicescu, S. Petrescu D.K. 621.1.01

Experimentale Uberprüfung des neuen Ausdruckes des ersten Gundsatzes für thermodynamische Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit.

Die vom Titel gestellte Aufgabe wird auf die Weise gelöst dass man die aus dem neuen Ausdruck des ersten Prinzips gezogenen Schlüsse auf ihre Richtigkeit experimental überprüft.

Der Ausdruck des Irreversibilitäts-Effektes wird im theoretischen Wege hergeleitet, wobei man zu der Schlussfolgerung kommt, dass er der Entwicklungs-Geschwindigkeit des Prozesses direkt proportional ist. Nachher wird der fragliche Effekt auch experimental festgestellt, wobei seine direkt proportionale Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Prozesses in Erscheinung tritt. Der absolute Wert des Irreversibilitäts-Effektes wird überprüft.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2/965

C. Turcanu D.K. 621.45 : 621—63

Beiträge zur Anwendung der Gleichartigkeit bei den Raketenmotoren mit flüssigen Brennstoff

Unter Verwendung der zum Studium der Zerstäubung angewandten Gleichartigkeitskriterien, werden in der Arbeit neue Gleichartigkeitsbeziehungen für den Motor mit flüssigem Brennstoff erhalten, Beziehungen welche die Veränderung der Oberflächenspannung und der Dichte des flüssigen Brennstoffs erwägen ; Durchmesser der Verbrennungskammer, Geschwindigkeit und Druck in der Verbrennungskammer, Zugkraft des Motors unde Durchmesser des Injektors.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2/965

M. Grigoriu D.K. 621.57:621.54

Die Bedeutung der Exergie für das Studium des Dampfkompressionkältemaschine.

Im Artikel wird eine Methode zur Analysierung der Leistungsfähigheit der Kältemaschine auf Grund der Anwendung des Begriffs „Exergie" dargestellt.

Es wird ebenfalls die Exergie bestimmt, die Methodik angegeben in Hinsicht der Festlegung des Ausdrucks und der Grösse der Exergie einer Flüssigkeit und man bestimmt den exergetische Gütegrad.

Weiterhin zeigt man die Methodik der Anwendung der Exergie — entolgite — Diagramm für Studium der mit Dampfkompression Kältemaschine und für die Festlegung der exergetischen Gütegrad dieser Maschine. Es wird dargestellt die vom dem Verfasser verarbeitete Diagramm (*ex-i*) für Methylchlorid welche Diagramm für praktische Berechnungen beim Studium und Entwerfung der Kältemaschinen mit Kompression von Methylchloriddampf benutzt werden kann.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2/965

I. Teodorescu, I. Luchian D.K. 539.17

Resonanzbeschleuniger mit stationärer Welle für Ionen.

Die Arbeit studiert den Einfluss der longitudinalen Dimension des beschleunigenden Zwischenraums auf die von Partikeln bei dessen Durchgang gewonnene Energie, zum Zwecke der Erlangung grösstmöglicher Energie ohne dass es nötig ist mit zu hohen Werten des elektrischen Feldes zu arbeiten. Aus diesem Gesichtspunkt werden die bestmöglichen Bedingungen für ein gegebenes Feld bestimmt und einige Konstruktionsvarianten, verwendbar als Beschleuniger mit kleiner Energie für Ionen die zur Erlangung von schnellen Neutrons durch die Reaktion *D-T.* vorgesehen sind, analysiert.

Bulet. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

MATEMATICĂ

C.Z.: 513.7

SUR LES TRANSFORMATIONS OPTIQUES DE L'ESPACE *

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

I

Les translations convergentes de l'espace

1°. Nous avons étudié dans deux notes {1}, {2} les transformations planes par lentilles. La recherche de la possibilité de décomposer une transformation plane par lentille en produit de transformations, nous a mené à considérer une nouvelle transformation, que nous avons nommée *translation convergente*, car elle agit d'une manière convergente (dans le sens qu'on donne à cette expression en physique) sur les points d'un faisceau de droites dont le centre représente le centre de la transformation, de même qu'elle se comporte comme une translation sur chaque rayon du faisceau,

Dans cette note nous ferons une étude des transformations par lentilles de l'espace en utilisant la même méthode. La première partie de notre travail donne quelques propriétés des translations convergentes de l'espace.

2°. *Définition. La translation convergente de l'espace est une transformation ponctuelle, déterminée par un point O et par un vecteur $\bar{v}$, qui met en correspondance un point quelconque $M(\overline{OM} = \bar{r})$ de l'espace à un point M_1 $(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$ tel que: les points O, M, M_1 soient en ligne droite, et*

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v}.\ \text{grad}\ r)\ \text{grad}\ r, \tag{1}$$

(Nous désignons par $\bar{a}.\bar{b}$ le produit scalaire des vecteurs $\bar{a},\bar{b}$).
La condition (1) peut être écrite ainsi

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - \frac{1}{r^2}(\bar{v}\cdot\bar{r})\,\bar{r}. \tag{1'}$$

Le point O et le vecteur $\bar{v}$ sont *le centre et le vecteur de la translation convergente.*

* Communiquée à la session scientifique de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest 22—23 fevrier 1964.

Si le centre de la translation convergente est le point ω et son vecteur est $\bar{v}$, alors — pour

$$\overline{O\omega} = \bar{u}, \quad \overline{OM} = \bar{r}, \quad \overline{OM_1} = \bar{r}_1 \text{ — on a}$$

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - \frac{1}{(\bar{r}-\bar{u})^2}(\bar{v}\cdot(\bar{r}-\bar{u}))\,(\bar{r}-\bar{u}). \qquad (1'')$$

3°. *L'ensemble des translations convergentes de l'espace, déterminées par le même centre et par l'ensemble des vecteurs de l'espace, est un groupe commutatif, isomorphe au groupe des translations de l'espace.*

Soit $[t]$ l'ensemble des translations convergentes de l'espace, dont le centre est O.

a) La translation convergente de $[t]$ qui a le vecteur nul, est une transformation identique.

b) *Si $t \in [t]$ a $\bar{v}$ comme vecteur, la translation convergente dont le centre est O et le vecteur $-\bar{v}$ est la transformation inverse de t.*

Considérons un point $M(\overline{OM} = \bar{r})$ et son transformé $M_1(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$ par t. Le point M_1 appartient à la droite OM et

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v}\cdot \operatorname{grad} r)\ \operatorname{grad} r.$$

La translation convergente t', ayant O comme centre et $-\bar{v}$ comme vecteur, transforme le point M_1 *en* $M_2(\overline{OM_2} = \bar{r}_2)$ situé sur la droite OM, tel que

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + (\bar{v}\cdot \operatorname{grad} r_1)\ \operatorname{grad} r_1.$$

Mais

$$\operatorname{grad} r = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} r_1 = \frac{\bar{r}_1}{r_1},$$

donc

$$\operatorname{grad} r_1 = \varepsilon \operatorname{grad} r, \quad (\varepsilon^2 = 1).$$

Il résulte

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + (\bar{v}\cdot \operatorname{grad} r)\ \operatorname{grad} r = \bar{r},$$

donc

$$M_2 \equiv M, \quad t' = t^{-1}, \quad t' \in [t].$$

c) *Le produit de deux translations convergentes t_1, t_2 de l'ensemble $[t]$, déterminées par les vecteurs $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ est équivalent à la translation convergente t de $[t]$ déterminée par le vecteur $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.*

Un point quelconque $M(\overline{OM} = \bar{r})$ est transformé par t_1 en $M_1(\overline{OM_1} = r_1)$ situé sur la droite OM et satisfait à la condition

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v}_1\cdot \operatorname{grad} r)\ \operatorname{grad} r. \qquad (2)$$

La translation convergente t_2 transforme M_1 en M_2 $(\overline{OM_2} = \bar{r}_2)$ situé sur OM et

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 - (\bar{v}_2 \cdot \operatorname{grad} r_1) \operatorname{grad} r_1. \tag{3}$$

Mais

$$\operatorname{grad} r_1 = \varepsilon \operatorname{grad} r, \qquad (\varepsilon^2 = 1),$$

donc

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 - (\bar{v}_2 \cdot \operatorname{grad} r) \operatorname{grad} r = \bar{r} - (\bar{v}_1 \cdot \operatorname{grad} r) \operatorname{grad} r -$$
$$- (\bar{v}_2 \cdot \operatorname{grad} r) \operatorname{grad} r = \bar{r} - [(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \cdot \operatorname{grad} r] \operatorname{grad} r.$$

De cette relation on déduit que t transforme le point M en M_2, donc

$$t_2 t_1 = t.$$

Il résulte aussi

$$t_2 t_1 = t_1 t_2.$$

d) Le groupe $[t]$ est isomorphe au groupe $[\tau]$ des translations de l'espace, car on peut mettre en correspondance les transformations $t \in [t]$, $\tau \in [\tau]$ déterminées par le même vecteur $\bar{v}$.

e) On déduit de cet isomorphisme :

1) L'ensemble des translations convergentes du groupe $[t]$, déterminées par l'ensemble des vecteurs parallèles au plan P, est un sous-groupe de $[t]$.

2) L'ensemble des translations convergentes du groupe $[t]$, déterminées par l'ensemble des vecteurs qui ont la même direction, est un sous-groupe de $[t]$.

4°. *Expression cartésienne de T.*

Considérons un système de coordonnées cartésiennes, défini par les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz dont les vecteurs unitaires sont $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Soit le vecteur

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}.$$

La translation convergent T déterminée par le point O et par le vecteur $\bar{v}$, transforme le point $M(x, y, z)$ en $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et, en tenant compte de (1), on déduit

$$x_1 = x(1 - \varphi), \quad y_1 = y(1 - \varphi), \quad z_1 = z(1 - \varphi), \tag{4}$$

où

$$\varphi = \frac{x v_x + y v_y + z v_z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a aussi

$$x = x_1(1 + \varphi_1), \quad y = y_1(1 + \varphi_1), \quad z = z_1(1 + \varphi_1), \tag{5}$$

où

$$\varphi_1 = \frac{x_1 v_x + y_1 v_y + z_1 v_z}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

5°. *Points doubles de la translation convergente.*

Considérons la translation convergente T, déterminée par le centre O et le vecteur $\bar{v}$.

Les points du plan π, *qui contient le point O et qui est perpendiculaire au vecteur* $\bar{v}$, *sont (sauf le point O) des points doubles de la transformation. La transformation T n'a pas d'autres points doubles.*

Soit $M(\overline{OM} = \bar{r})$, un point du plan π, M_1 $(\overline{OM}_1 = \bar{r}_1)$ son transformé par T. En tenant compte de (1), comme

$$\bar{v} \cdot \operatorname{grad} r = 0,$$

on a $\bar{r}_1 = \bar{r}$, donc $M_1 \equiv M$.

Réciproquement, si $M_1 \equiv M$, mais distinct de O, on a $\bar{v} \cdot \operatorname{grad} r = 0$, donc M appartient au plan π, dont l'équation dans le système de coordonnées considéré est

$$x v_x + y v_y + z v_z = 0.$$

6°. *Sphère caractéristique d'une translation convergente.*

Soit donnée la translation convergente T, déterminée par le centre O et par $\bar{v}$.

Si $\overline{OF'} = \bar{v}$, la sphère (S) ayant OF' comme diamètre sera appelée *sphère caractéristique de la transformation T.*

La translation convergente transforme tout point de sa sphère caractéristique (sauf O) en O.

Si le point $M(\overline{OM} = \bar{r})$ appartient à la sphère (S), on a

$$\bar{r} \cdot (\bar{v} - \bar{r}) = 0,$$

donc

$$\bar{r} \cdot \bar{v} = r^2. \tag{6}$$

On transforme M par T en $M_1(\overline{OM} = \bar{r}_1)$, tel que (1') :

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - \frac{1}{r^2} (\bar{v} \cdot \bar{r}) \bar{r}.$$

Il résulte

$$\bar{r}_1 = \bar{0},$$

donc $M_1 \equiv O$.

L'équation de (S) dans le système de coordonnées choisi (§ 4°) est

$$x^2 + y^2 + z^2 - v_x x - v_y y - v_z z = 0.$$

Soit (S') la sphère symétrique de (S) par rapport à O. La translation convergente T fait correspondre à son centre O tout point de la sphère (S').

En désignant par F_1' l'extrémité du vecteur $\overline{OF_1'} = -\bar{v}_1$, (S') a OF_1' comme diamètre, donc (S') est la sphère caractéristique de T^{-1}. Mais T^{-1} transforme les points de la sphère caractéristique (sauf O) en O. Par conséquent T fait correspondre à O tout point de (S').

Le centre d'une translation convergente est un point singulier de la transformation.

7°. *Droites et plans doubles de la translation convergente.*

Les droites, qui contiennent le centre de la translation convergente, sont des droites doubles de la transformation. Elle n'a pas d'autres droites doubles.

Les plans, qui contiennent le centre de la translation convergente, sont des plans doubles de la transformation.

8°. *La transformation d'un plan quelconque.*

Considérons le système de coordonnées et les notations adoptées à (§ 4°). La translation convergente T, déterminée par le point O et par le vecteur $\bar{v}$, transforme les points M du plan P,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (D \neq 0),$$

qui n'appartiennent pas à la sphère caractéristique, en M_1, situés sur la surface

$$(\Sigma_1) \quad (Ax + By + Cz + D)(x^2 + y^2 + z^2) + \\ + (Ax + By + Cz)(xv_x + yv_y + zv_z) = 0. \qquad (7)$$

Les points du plan P, qui appartiennent à la sphère caractéristique, sont transformés en O.

L'intersection du plan P et de la surface (Σ_1) est la droite de points doubles

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad xv_x + yv_y + zv_z = 0.$$

9°. *Surfaces* Σ.

Le plan P et la surface Σ_1 dont l'équation est (7), appartiennent à la famille de surfaces du 3 ème ordre :

$$(\Sigma) \quad (Ax + By + Cz + D)(x^2 + y^2 + z^2) + \\ + \lambda (Ax + By + Cz)(xv_x + yv_y + zv_z) = 0, \qquad (8)$$

où λ est un paramètre.

L'intersection d'une surface $\Sigma_k \in (\Sigma)$, correspondante à $\lambda = k$, avec la sphère caractéristique (S) de T, est formée par le point O et par le cercle

$$(\Gamma_k)\begin{cases} x^2+y^2+z^2-v_x x-v_y y-v_z z=0 \\ A(1+k)x+B(1+k)y+C(1+k)z+D=0. \end{cases} \tag{9}$$

La translation convergente T transforme la surface Σ_k *en* $\Sigma_{k+1} \in (\Sigma)$ *correspondante à* $\lambda = k+1$, *sauf les points O et les points du cercle* (Γ_k) *qui sont transformés en (S') et O.*

10°. *La transformée d'une droite d par une translation convergente T, dont le centre O n'appartient pas à d, est une cubique située dans le plan déterminé par O et d.*

Si

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad A'x+B'y+C'z+D'=0$$

sont les équations de la droite d, sa transformée par T est l'intersection (γ) des surfaces :

$$\left.\begin{aligned} (\Sigma_1)\ (Ax+By+Cz+D)\ (x^2+y^2+z^2)+(Ax+By+Cz)\ (xv_x+yv_y+zv_z)=0, \\ (\Sigma_1')\ (A'x+B'y+C'z+D')\ (x^2+y^2+z^2)+ \\ +(A'x+B'x+C'z)\ (xv_x+yv_y+zv_z)=0. \end{aligned}\right\}$$

Il résulte pour (γ) :

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{Ax+By+Cz}=\frac{A'x+B'x+C'z+D'}{A'x+B'y+C'z}$$

ou

$$D'(Ax+By+Cz)-D(A'x+B'y+C'z)=0,$$

qui est l'équation du plan déterminé par O et d. Donc (γ) est une courbe plane. Cette courbe est une cubique.

11°. *Soit T une translation convergente dont le centre O appartient à une sphère* (σ). *T transforme* (σ) *en deux sphères : une sphère* (σ_1) *qui contient le point O et la sphère (S').*

Les centres C, C_1 *des sphères* (σ), (σ_1) *sont situés sur une droite parallèle au vecteur* $\bar{v}$ *de la transformation T et* $CC_1=\frac{v}{2}$.

En effet, la sphère

$$(\sigma)\quad x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=0$$

est transformée en :

$$(\sigma_1)\quad x^2+y^2+z^2-2\left(a-\frac{v_x}{2}\right)x-2\left(b-\frac{v_y}{2}\right)y-2\left(c-\frac{v_z}{2}\right)z=0,$$

$$(S')\quad x^2+y^2+z^2+v_x x+v_y y+v_z z=0.$$

12°. *Le rapport anharmonique des quatre points situés sur une droite d, qui contient le centre O de la translation convergente T, est invariant par rapport à T.*

Si d est considérée comme axe Ox, les points $M_i(x_i, 0, 0)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ situés sur $d$sont transformés par T en $M'_i(x'_i, 0, 0)$, tel que (en tenant compte de § 4°)

$$x'_i = x_i - v_x.$$

Il résulte

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M'_1 M'_2 M'_3 M'_4).$$

13°. *On considère*

$$(\Sigma_i) \quad (Ax + By + Cz + D)(x^2 + y^2 + z^2) + \\ + \lambda_i (Ax + By + Cz)(xv_x + yv_y + zv_z) = 0, \qquad (10)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$ quatre surfaces de la famille (Σ) (§ 9°) associée au plan

$$(P) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

par la translation convergente T.

Une droite d qui contient le centre O de T coupe encore chaque surface Σ_i en M_i.

On a

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

Les équations paramétriques de la droite d sont

$$x = \alpha t, \quad y = \beta t, \quad z = \gamma t,$$

où t est le paramètre et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

On a pour M_i

$$t_i = -\frac{\lambda_i (A\alpha + B\beta + C\gamma)(\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z) + D}{A\alpha + B\beta + C\gamma},$$

donc les coordonnées (x_i, y_i, z_i) des points M_i sont liées par des relations homographiques à λ_i. Alors

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

Conséquence. Le rapport anharmonique des valeurs du paramètre λ des quatre surfaces Σ est invariant par rapport à la translation convergente T.

14°. *On considère une translation convergente T de centre O et les surfaces (Σ) associées à un plan quelconque P par T.*

Si M, M_1, M_2, M_3 sont les intersections d'une droite d, qui contient O, avec une surface Σ et avec ses transformées par T, T^2, T^3, le rapport anharmonique.

$$(M M_1 M_2 M_3)$$

a une valeur indépendante de P et de Σ.

Soit $\lambda = \lambda_1$ pour Σ. Les translations convergentes T, T^2, T^3 transforment Σ en Σ_1, Σ_2, Σ_3 qui correspondent à

$$\lambda = \lambda_1 + 1, \quad \lambda = \lambda_1 + 2, \quad \lambda = \lambda_1 + 3.$$

On a

$$(M M_1 M_2 M_3) = (\lambda_1 \ \lambda_1 + 1 \ \lambda_1 + 2 \ \lambda_1 + 3) = \frac{4}{3}.$$

15°. *Lemme. Si $[T]$ est un ensemble de transformations symétriques par rapport à l'ensemble de transformations $[\tau]$, l'ensemble $[T]$ est parfaitement symétrique à $[\tau]$ si la transformation inverse de chaque $\tau \in [\tau]$ appartient à $[\tau]$.*

Nous avons montré {3} que $[T]$ est symétrique par $[\tau]$ si a chaque $T \in [T]$ et $\tau \in [\tau]$ il correspond une transformation $T_1 \in [T]$, la correspondante de T par raport à τ, qui satisfait à

$$\tau T = T_1 \tau. \tag{11}$$

L'ensemble $[T]$ est parfaitement symétrique par rapport à (τ) s'il est symétrique par rapport à $[\tau]$ et si à chaque $T \in [T]$ et $\tau \in [\tau]$ il correspond une transformation $T_{-1} \in [T]$ qui donne

$$T\tau = \tau T_{-1}. \tag{12}$$

Considérons l'ensemble $[T]$ symétrique par rapport à $[\tau]$ et supposons que $[\tau]$ contient l'inverse de chaque $\tau \in (\tau)$. Alors T a une correspondante $T_{-1} \in [T]$ par rapport à τ^{-1}, donc

$$\tau^{-1} T = T_{-1} \tau^{-1}$$

ou

$$T\tau = \tau T_{-1}.$$

Par conséquent, $[T]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[\tau]$.

16°. *L'ensemble des translations convergentes $[T]$ de l'espace est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[\tau]$ des translations de l'espace.*

a) Soit $T \in [T]$ la translation convergente dont le centre est O et le vecteur $\bar{v}$, $\tau \in [\tau]$ une translation déterminée par le vecteur $\bar{u}$. Si O_1 est le transformé de O par τ, alors la translation convergente T_1, qui a O_1 comme centre et v comme vecteur, satisfait à la relation

$$\tau T = T_1 \tau,$$

donc elle est la correspondante de T par τ.

Comme $[\tau]$ contient l'inverse de chaque $\tau \in [\tau]$, on a $T_{-1} \in [T]$ tel que

$$T\tau = \tau T_{-1}.$$

b) Si $[X]$, $[Y]$ sont deux ensembles, nous exprimons par $[YX]^*$ l'ensemble des produits formés avec $X \in [X]$ et $Y \in [Y]$.

Si $[Y]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[X]$, alors pour chaque $Y \in [Y]$ et $X \in [X]$ on trouve $Y_1 \in [Y]$, $Y_{-1} \in [Y]$ pour avoir

$$XY = Y_1 X, \quad YX = XY_{-1},$$

donc

$$[XY]^* = [YX]^*. \tag{13}$$

Nous adoptons la notation $[YX]$ pour l'ensemble $[YX]^*$ qui satisfait la condition (13).

c) L'ensemble $[T\tau]$ est $\{4,24°\}$ parfaitement symétrique par rapport à $[\tau]$, de même $\{4,25°\}$ l'ensemble

$$[S_1] = [T] \cup [\tau] \cup [T\tau]. \tag{14}$$

17°. *Le groupe $[t]$ des translations convergentes qui ont le centre O est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[r]$ des rotations déterminées par les droites qui contiennent O.*

a) Si $t \in [t]$ a $\bar{v}$ comme vecteur appliqué en O, si $r \in [r]$ a δ comme axe, soit $\bar{v}_1$ le transformé de $\bar{v}$ par r. La translation convergente $t_1 \in [t]$ ayant $\bar{v}_1$ comme vecteur satisfait à la condition

$$rt = t_1 r.$$

On a aussi $r^{-1} \in [r]$.

b) L'ensemble $[tr]$ est $\{3, 14°; 4,24°\}$ un groupe parfaitement symétrique par rapport à $[r]$. Aussi

$$[S_2] = [t] \cup [r] \cup [tr] \tag{15}$$

est un groupe parfaitement symétrique par rapport à $[r]$.

18°. *L'ensemble $[T]$ des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[R]$ des rotations déterminées par les droites de l'espace.*

a) Soit $T \in [T]$ une translation convergente ayant O comme centre et $\bar{v}$ comme vecteur. $R \in [R]$ une rotation dont l'axe est Δ.

Si Δ contient O, on a $T_1 \in [T]$ qui satisfait (§ 17°) la condition

$$RT = T_1 R.$$

Si Δ ne contient pas O, on prend un point ω sur Δ et on considère la translation τ déterminée par le vecteur $O\omega$. Soit T_2 la correspondante de T par rapport à τ. Alors

$$T = \tau^{-1} T_2 \tau,$$

donc

$$RT = R\tau^{-1} T_2 \tau.$$

Mais l'ensemble $[\tau]$ des translations de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[R]$, donc il y a $\tau_1 \in [\tau]$ tel que

$$R\tau^{-1} = \tau_1 R.$$

Comme T_2 a son centre sur l'axe Δ de R, on a une translation convergente T_3, dont le centre est ω, qui satisfait à la relation

$$RT_2 = T_3 R .$$

Enfin on a {3,2°, c}

$$R\tau = \tau_1^{-1} R .$$

Donc

$$RT = \tau_1 T_3 \tau_1^{-1} R .$$

Mais $\tau_1 T_3 \tau_1^{-1}$ donne la translation convergente T_4, la correspondante de T_3 par rapport à τ_1. Alors

$$RT = T_4 R ,$$

relation qui jointe à $R^{-1} \in [R]$, prouve la propriété énoncée.

b) On déduit que les ensembles $[TR]$,

$$[S_3] = [T] \cup [R] \cup [TR] \tag{16}$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[R]$.

Comme l'ensemble $[\tau]$ est aussi parfaitement symétrique par rapport à $[R]$, il résulte que $[\tau R]$, $[\tau S_3]$ sont {3, 13°} parfaitement symétriques par rapport à $[R]$. Donc l'ensemble

$$[S_4] = [T] \cup [\tau] \cup [R] \cup [T\tau] \cup [TR] \cup [\tau R] \cup [T\tau R] \tag{17}$$

est parfaitement symétrique par rapport à $[R]$. Il est aussi parfaitement symétrique par $[\tau]$ et par $[\tau R]$, donc par

$$[\tau] \cup [R] \cup [\tau R] .$$

c) *L'ensemble $[T]$ des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[s]$ des symétries déterminées par les droites de l'espace.*

Les ensembles $[Ts]$,

$$[S_5] = [T] \cup [s] \cup [Ts] \tag{17'}$$

sont aussi parfaitement symétriques par rapport à $[s]$.

19°. *L'ensemble $[T]$ des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[E]$ des déplacements hélicoïdals*, car $E = R\tau$, où R est une rotation d'axe Δ et τ une translation dont le vecteur $\bar{u}$ a Δ comme direction.

Comme $[T]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[R]$ et à $[\tau]$, il est aussi {4,10°} par rapport à $[E]$. Aussi les ensembles $[TE]$,

$$[S_6] = [T] \cup [E] \cup [TE] \tag{18}$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[E]$.

20°. *L'ensemble* $[T]$ *des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport au groupe* $[D]$ *des déplacements de l'espace.*

En utilisant les notations données, on a

$$[D] = [\tau] \cup [R] \cup [E].$$

Mais $[T]$ est parfaitement symétrique par rapport à chaque terme de cette réunion, donc il est parfaitement symétrique par $[D]$. Aussi $[TD]$

$$[S_7] = [T] \cup [D] \cup [TD] \tag{19}$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[D]$.

21°. *L'ensemble* $[T]$ *des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble* $[\sigma]$ *des symétries déterminées par les plans de l'espace.*

Soit $T \in [T]$ déterminée par le centre O et le vecteur $\bar{v}$, $\sigma \in [\sigma]$ déterminée par le plan P, puis O_1 et $\bar{v}_1$ les transformées de O et $\bar{v}$ par σ. La translation convergente T_1 dont le centre est O_1 et le vecteur $\bar{v}_1$ satisfait à la condition

$$\sigma T = T_1 \sigma,$$

aussi $\sigma^{-1} = \sigma$.

Les ensembles $[T\sigma]$,

$$[S_8] = [T] \cup [\sigma] \cup [T\sigma] \tag{20}$$

sont aussi parfaitement symétriques par rapport à $[\sigma]$.

22°. *L'ensemble* $[T]$ *est parfaitement symétrique par rapport à* $[M]$, *le groupe fondamental de la géométrie métrique de l'espace.*

La propriété résulte de

$$[M] = [D] \cup [\sigma] \cup [D\sigma].$$

Les ensembles $[TM]$,

$$[S_9] = [T] \cup [M] \cup [TM] \tag{21}$$

sont aussi parfaitement symétriques par rapport à $[M]$.

23°. *Le groupe* $[t]$ *des translations convergentes de l'espace dont le centru est O est parfaitement symétrique par rapport au groupe* $[h]$*des homothéties de l'espace ayant O comme centre.*

Soit $t \in [t]$ la translation convergente déterminée par le vecteur $\bar{v}$, $h \in [h]$ l'homothétie ayant le rapport λ.

On considère le point $M(\overline{OM} = \bar{r})$, qui est transformé par t en $M_1(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$, donc

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v} \cdot \operatorname{grad} r) \operatorname{grad} r.$$

$[h]$ transforme M_1 en M_2 $(\overline{OM}_2 = \bar{r}_2)$. On a

$$\bar{r}_2 = \lambda \bar{r}_1,$$

par conséquent

$$\bar{r}_2 = \lambda \bar{r} - \lambda (\bar{v} \cdot \text{grad } r) \text{ grad } r. \tag{22}$$

Si on transforme M d'abord par h, on trouve M' $(\overline{OM}' = \bar{r}')$,

$$\bar{r}' = \lambda \bar{r}.$$

Soit $t_1 \in [t]$ la translation convergente dont le vecteur est $\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}$. Elle transforme M' en M'' $(\overline{OM}'' = \bar{r}'')$ et

$$\bar{r}'' = \bar{r}' - (\lambda \bar{v} \cdot \text{grad } r') \text{ grad } r'.$$

Mais

$$\text{grad } r' = \varepsilon \text{ grad } r, \qquad (\varepsilon^2 = 1),$$

donc

$$\bar{r}'' = \lambda \bar{r} - \lambda (\bar{v} \cdot \text{grad } r) \text{ grad } r, \tag{23}$$

Les relations (22), (23) donnent $M'' \equiv M_2$, donc

$$ht = t_1 h.$$

On a aussi $h^{-1} \in [h]$. Il résulte la propriété énoncée. On déduit alors que $[th]$,

$$[S_{10}] = [t] \cup [h] \cup [th] \tag{24}$$

sont des groupes parfaitement symétriques par rapport à $[h]$.

24°. *L'ensemble $[T]$ des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[H]$ des homothéties de l'espace.*

Soit $T \in [T]$ déterminée par le centre O et le vecteur $\bar{v}$, $H \in [H]$ déterminée par le centre ω et le rapport λ. Si τ est la translation dont le vecteur est $O\bar{\omega} = \bar{u}$ et T_1 la correspondante de T par rapport à τ, on a

$$T = \tau^{-1} T_1 \tau,$$

donc

$$HT = H \tau^{-1} T_1 \tau.$$

Mais $[\tau]$, l'ensemble des translations de l'espace, est parfaitement symétrique par rapport à $[H]$. Donc on trouve $\tau_1 \in [\tau]$ pour avoir

$$H \tau^{-1} = \tau_1 H.$$

Aussi parceque T_1 et H ont le même centre, on trouve une translation convergente T_2 qui donne

$$HT_1 = T_2 H.$$

On a aussi

$$H\tau = \tau_1^{-1} H.$$

Il résulte

$$HT = \tau_1 T_2 \tau_1^{-1} H.$$

Comme $\tau_1 T_2 \tau_1^{-1}$ équivaut à la correspondante T_3 de T_2 par rapport à τ_1 on déduit

$$HT = T_3 H.$$

On a aussi $H^{-1} \in [H]$. Alors on conclut la propriété de l'énonce.
Les ensembles $[TH]$.

$$[S_{11}] = [T] \cup [H] \cup [TH] \tag{25}$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[H]$.

25°. *L'ensemble $[T]$ des translations convergentes de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à $[G]$, le groupe principal de la Géométrie euclidienne de l'espace.*

On a, en utilisant les notations adoptées :

$$[G] = [\tau] \cup [R] \cup [E] \cup [\sigma] \cup [E\sigma] \cup [H] \cup [RH] \cup [\sigma H] \cup [R\sigma H].$$

Mais $[T]$ est parfaitement symétrique par rapport à chacun des termes de cette réunion, alors $[T]$ est parfaitement symétrique par le groupe $[G]$.
Aussi $[TG]$ et

$$[S] = [T] \cup [G] \cup [TG] \tag{26}$$

sont des ensembles parfaitement symétriques par $[G]$.

La chaire de mathématique
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. Ionescu-Bujor:* Asupra unor transformări optice (I), Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom XXIII, Fasc. 2, 1961.
2. *C. Ionescu-Bujor:* Asupra unor transformări optice (II), Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom XXIV, Fasc. 1, 1962.
3. *C. Ionescu-Bujor:* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom XXI, Fasc. 1, 1959.
4. *C. Ionescu-Bujor:* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transfortion donnée (II), Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom XXI, Fasc. 2, 1959.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

HIDRAULICĂ

C.Z.: 621—25

CONTRIBUŢIE LA PROIECTAREA ROTOARELOR HIDRAULICE*

DORIN PAVEL

La proiectarea rotorului turbinei Francis, respectiv al pompei centrifuge, primele probleme care trebuie rezolvate sînt: calculul gabaritelor, trasarea coroanelor profilului prin rotor şi stabilirea fluxului hidrodinamic $\varphi\ \psi$. Pe baza acestora se procedează apoi la proiectarea palelor rotorului.

Pentru stabilirea gabaritelor se utilizează mai multe metode [1], dintre care metoda similitudinii şi aceea statistică propuse de autor [1, 2] se verifică bine cu turbine construite pe plan mondial şi se presupune că sînt cunoscute de către specialişti.

Uzinele constructoare de maşini hidraulice din diferite ţări dispun de metode proprii pentru determinarea dimensiunilor, a profilului şi fluxului prin rotor, însă acestea nu sînt publicate.

Ţinînd seama de nevoile didactice şi de dezvoltare a fabricării maşinilor hidraulice în R.P.R .se propun în acest studiu metode proprii pentru trasarea profilului rotorului şi a fluxului prin el.

1. TRASAREA COROANELOR ROTORULUI

1.1. Funcţia curbei coroanelor

După stabilirea dimensiunilor principale se trasează coroanele şi muchiile de intrare 1, respectiv la ieşire 2 din rotor, alegînd drept modele turbine care în exploatare au dat randamente optime.

Modelele trebuie să aibă rapiditatea $n_s = n \dfrac{P^{0,5}}{H^{1,25}}$ cît mai apropiată de aceea a turbinei în curs de proiectare.

Acest procedeu este laborios şi nesigur, aşa că în fazele succesive ale proiectării se fac numeroase corectări a curbei coroanelor. În acest studiu se propune una din soluţiile analitice posibile şi se aplică la diferite rapidităţii n_s.

* Manuscris predat la redacţie la 21 decembrie 1964.

Coroana exterioară cu indicele e și cea interioară i trebuie să aibe forme hidrodinamice, așa că pot fi obținute prin analogie cu profile de aripi — cum se arată în acest capitol — sau prin reprezentări axialsimetrice expuse în capitolul 2.

O funcție stabilită de Prof. Th. Bovet pentru profile hidrodinamice:

$$y = \frac{16}{3\sqrt{3}}\, y\left(1-\frac{x}{l}\right)\sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)}$$

servește ca bază a obținerii coroanelor rotorului Francis, ca și a pompelor centrifuge.

Cu notațiile din figura 1 și 2, se transformă relația precedentă sub formă de rapoarte, calculate în tabela 1 pentru rotoare lente, normale și rapide $n_s = 100—400$:

$$\frac{x_e}{x_{em}} = 3{,}08\left[\left(\frac{L}{L_e}\right)^{0{,}5}\left(1-\frac{L}{L_e}\right)^{1{,}5}\right];\quad \frac{x_i}{x_{im}} = 3{,}08\left[\left(\frac{L}{L_i}\right)^{0{,}5}\left(1-\frac{L}{L_i}\right)^{1{,}5}\right]\ldots \quad (1)$$

Din acestea se calculează abscisele x în funcție de ordonatele L, fiind date geometric limitele lui L_e L_i în funcție de rapiditate (al. 1.2). Originea curbei e se amplasează în E la raza r_E cu L_e în jos și x_e spre dreapta și analog cu J pentru curba i cu r_J.

1.2. Relații statistice necesare trasării profilelor e și i

În scopul comparației profilelor rotoarelor cu diferiți n_s este util a se reduce acestea la o dimensiune unitară. Astfel se alege $r_{2e} = 1$ — raza de ieșire în exterior, pentru cele patru exemple cu $n_s = 100; 200; 300; 400$. calculate în tabela 1 și desenate în fig. 1 și 2.

Tabela 1

Coordonatele coroanelor rotorului cu diferite n

n_s	$\frac{L}{L_e}; \frac{L}{L_i}$	$\frac{x_e}{x_{em}}; \frac{x_i}{x_{im}}$	$x_e = 0{,}532\frac{x_e}{x_{em}}$	$L_e = 1{,}77\frac{L}{L_e}$	$x_i = 1{,}308\frac{x_i}{x_{im}}$	$L_i = 4{,}293\frac{L}{L_i}$
100	0,01	0,303	0,161	0,0177	0,397	0,0429
	0,05	0,638	0,338	0,0885	0,834	0,215
	0,10	0,831	0,441	0,177	1,085	0,429
	0,20	0,986	0,522	0,354	1,288	0,859
	0,25	1.000	$x_{em} = 0{,}532$	$L_{ei} = 0{,}443$	$x_{im} = 1{,}308$	$L_{im} = 1{,}073$
	0.2825	0,996	$x_{ez} = 0{,}530$	$L_{ez} = 0.500$	—	—

(continuare) tabela 1

n_s	$\frac{L}{L_e}; \frac{L}{L_i}$	$\frac{x_e}{x_{em}}; \frac{x_i}{x_{im}}$	$x_e = 0{,}151\frac{x_e}{x_{em}}$	$L_e = 1{,}26\frac{L}{L_e}$	$x_i = 1{,}059\frac{x_i}{x_{im}}$	$L_i = 5\ 17\frac{L}{L_i}$
	0,01	0,303	0,0458	0,0126	0,321	0,0517
	0,05	0,638	0,0963	0,0630	0,676	0,259
	0,10	0,831	0,1256	0,126	0,881	0,517
200	0,20	0,986	0,1490	0,252	1,044	1,034
	0,25	1,000	$x_{em} = 0{,}151$	0,315	$x_{im} = 1{,}059$	$L_{im} = 1{,}292$
	0,397	0,933	$x_{ez} = 0{,}141$	0,500	—	—

n_s	$\frac{L}{L_e}; \frac{L}{L_i}$	$\frac{x_e}{x_{em}}; \frac{x_i}{x_{im}}$	$x_e = 0{,}1256\frac{x_e}{x_{em}}$	$L_e = 0{,}89\frac{L}{L_e}$	$x_i = 0{,}954\frac{x_i}{x_{im}}$	$L = 5{,}83\frac{L}{L_i}$
	0,01	0,303	0,0381	0,0089	0,289	0,0583
	0,05	0,638	0,0801	0,0445	0,608	0,292
	0,10	0,831	0,1044	0,089	0,799	0,533
	0,20	0,986	0,1238	0,178	0,940	1,166
300	0,25	1,000	$x_{em} = 0{,}1256$	$L_{em} = 0{,}223$	$x_{im} = 0{,}954$	$L_{im} = 1{,}458$
	0,30	0,987	0,1240	0,267	—	—
	0,40	0,905	0,1137	0,356	—	—
	0,50	0,770	0,0967	0,445	—	—
	0,562	0,669	$x_{ez} = 0{,}084$	0,500		

n_s	$\frac{L}{L_e}; \frac{L}{L_i}$	$\frac{x_e}{x_{em}}; \frac{x_i}{x_{im}}$	$x_i = 0{,}0968\frac{x_i}{x_{im}}$	$L_e = 0{,}64\frac{L}{L_e}$	$x_i = 0{,}897\frac{x_i}{x_{im}}$	$L = 6{,}27\frac{L}{L_i}$
	0,05	0,638	0,0618	0,032	0,572	0,3135
	0,10	0,831	0,0804	0,064	0,750	0,627
	0,20	0,986	0,0954	0,128	0,883	1,254
	0,25	1,000	$x_{em} = 0{,}0968$	$L_{em} = 0{,}160$	$x_{im} = 0{,}897$	$L_{im} = 1{,}568$
400	0,30	0,987	0,0955	0,192	—	—
	0,40	0,905	0,0976	0,256	—	—
	0,50	0,770	0,0745	0,320	—	—
	0,60	0,603	0,0584	0,384	—	—
	0,781	0,279	$x_{ez} = 0{,}027$	$L_{ez} = 0{,}500$	—	—

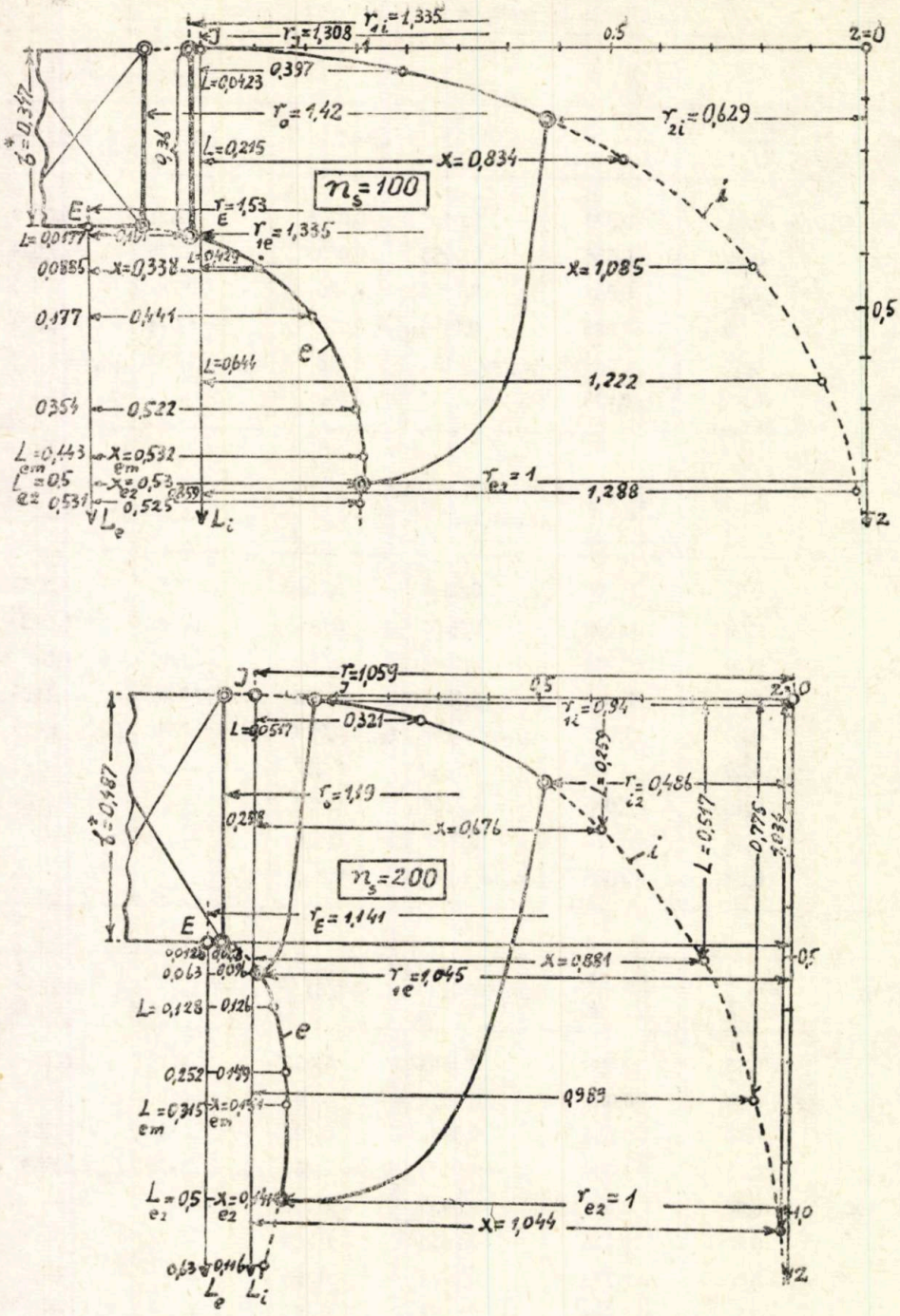


Fig. 1. Trasarea coroanelor respectiv a intrării și ieșirii din rotorul lent $n_s = 100$ și din cel normal $n_s = 200$.

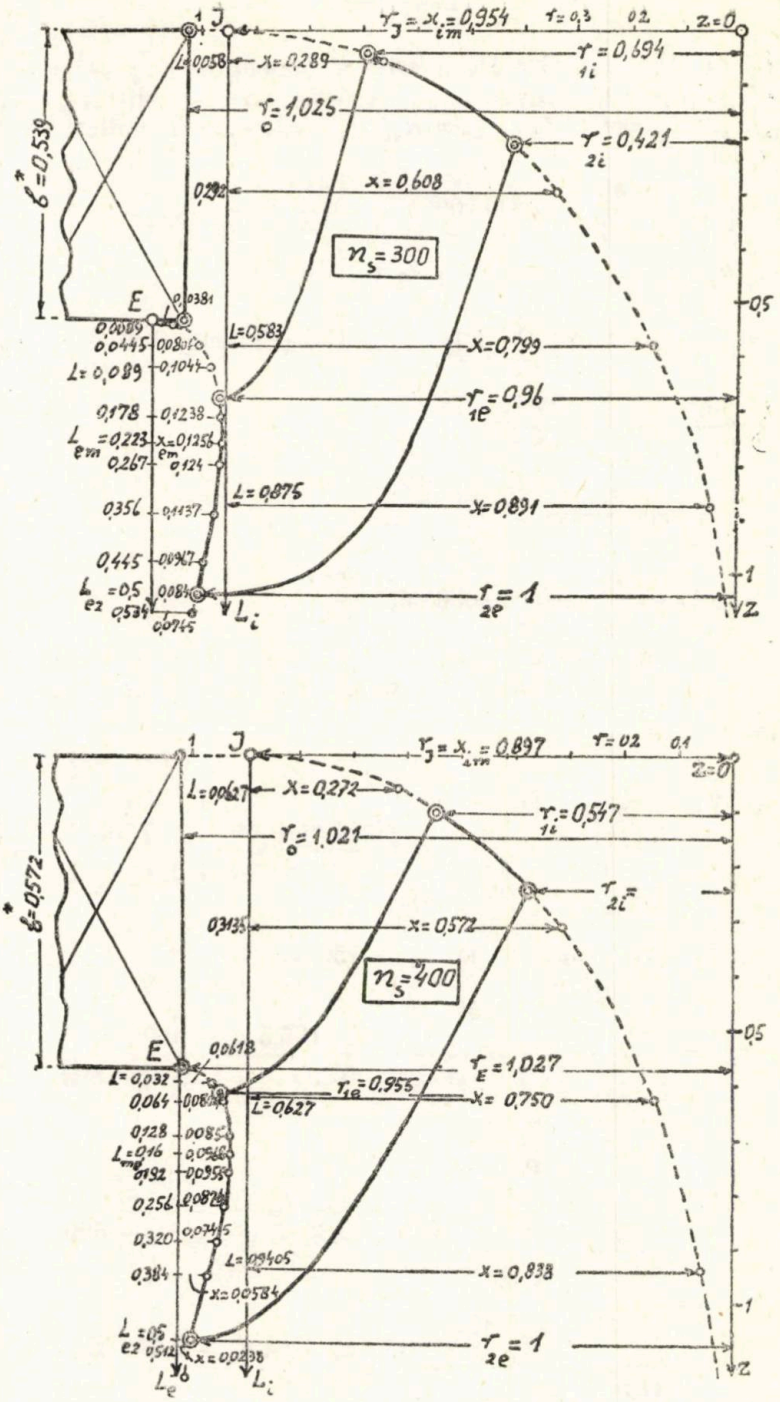


Fig. 2. Trasarea profilului rotorului normal n_s=300, respectiv rapid n_s=400.

Din formulele statistice ale diferitelor diametre [1,2] se obțin razele $R = 0{,}5\ D$ și raportînd acestea la R_{2e} se obțin razele relative $r_{1e} = R_{1e}/R_{2e}$; $r_{1i} = R_{1i}/R_{2e}$; $r_{2i} = R_{2i}/R_{2e}$; $r_{2e} = R_{2e}/R_{2e} = 1$, care delimitează coroanele și pala rotorului.

$$R_{1e} = \left(0{,}15 + \frac{80}{n_s} + 0{,}000\,0005\, n_s^2\right) \frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}};$$

$R_{1i} = R_{1e}$ la $n_s < 150$ (Francis lent);

$$R_{1i} = \left(\frac{106{,}5}{n_s} - 0{,}02\right) \frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}} \text{ la } n_s > 150 \text{ (Francis normal și rapid)}$$

$$R_{2i} = \left(\frac{37}{n_s} - 0{,}08\right) \frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}};$$

$$R_{2e} = \left(0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s^2}\right) \frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}};$$

$$R_0 = \left(0{,}17 + \frac{84}{n_s} + 0{,}000\,0005\, n_s^2\right) \frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}}.$$

Razele rotorului unitar $r_{2e} = 1$, notate cu r, se obțin raportînd razele reale R la aceea de la ieșirea în exterior R_{2e}, așa că se reduc termenii $\frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}}$ din relațiile (2) la (5):

$$r_{1e} = \frac{0{,}15 + \frac{80}{n_s} + 0{,}000\,0005\, n_s^2}{0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s^2}} = \frac{0{,}15\, n_s^2 + 80\, n_s + 0{,}000\,0005\, n_s^4}{0{,}35\, n_s^2 + 41{,}5\, n_s - 500} \tag{2}$$

$r_{1i} = r_{1e}$ la $n_s < 150$, iar la $n_s > 150$ va fi:

$$r_{1i} = \frac{\frac{106{,}5}{n_s} - 0{,}02}{0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s^2}} = \frac{106{,}5\, n_s - 0{,}02\, n_s^2}{0{,}35\, n_s^2 + 41{,}5\, n_s - 500} \tag{3}$$

$$r_{2i} = \frac{\frac{37}{n_s} - 0{,}08}{0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s}} = \frac{37\, n_s - 0{,}08\, n_s^2}{0{,}35\, n_s^2 + 41{,}5\, n_s - 500} \tag{4}$$

$$r_0 = \frac{0{,}17 + \frac{84}{n_s} + 0{,}000\,0005\, n_s^2}{0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s^2}} = \frac{0{,}17\, n_s^2 + 84\, n_s + 0{,}000\,0005\, n_s^4}{0{,}35\, n_s^2 + 41{,}5\, n_s - 500} \tag{5}$$

$$b^* = \frac{B_0}{D_{2e}} = (0{,}01\, n_s^{0,5} - 0{,}002\, n_s - 0{,}54)\, r_{1e} \tag{6}$$

$$r_E = \frac{33}{n_s^{0,667}}, \quad \text{la } n_s < 150 \tag{7}$$

$$r_E = 1{,}255 - 0{,}00057\, n_s, \quad \text{la } n_s > 150 \tag{8}$$

$$r_J = 0{,}7 + \frac{87{,}4}{43{,}7 + n_s}, \quad \text{la orice } n_s \tag{9}$$

$$L_e = 2{,}4 - 0{,}007\, n_s + 0{,}000\,0065\, n_s^2 \tag{10}$$

$$L_i = 3{,}2 + 0{,}012\, n_s - 0{,}000\,0108\, n_s^2 \tag{11}$$

1.3. Calculul profilelor rotoarelor unitare

1.31. *Rotorul unitar lent* $n_s = 100$

Se calculează mărimile caracteristice după relațiile (1 la 11), toate funcții de rapiditatea $n_s = 100$:

$$r_{1e} = 1{,}335;\ r_{1i} = 1{,}335;\ r_{2i} = 0{,}629;\ r_{2e} = 1;\ r_0 = 1{,}42;$$

$$b^* = (0{,}1\sqrt{100} - 0{,}002 \cdot 100 - 0{,}54)\, 1{,}335 = 0{,}347;\ r_E = \frac{33}{100^{0,667}} = 1{,}53$$

$$r_J = 0{,}7 + \frac{87{,}4}{43{,}7 + 100} = 1{,}307 = x_{im};\ L_e = 1{,}77;\ L_i = 4{,}292.$$

Se calculează în tabela 1 (cazul $n_s = 100$) la diferite rapoarte L/L_e și L/L_i valabile la $x_e\ x_{em}$, respectiv x_i/x_{im} (coloana a 3-a a tabelei 1, după relațiile 1), apoi se calculează succesiv coloanele 4—7;

$$x_e = 0{,}532\frac{x_e}{x_{em}};\ L_e = 1{,}77\frac{L}{L_e};\ x_i = 1{,}308\frac{x_i}{x_{im}};\ L_i = 4{,}293\frac{L}{L_i}.$$

Cu coordonatele $x_e\ L_e$ trasate din punctul E (la raza r_E), anume x_e spre dreapta, respectiv L_e în jos, obținîndu-se coroana exterioară (e), în fig. 1-sus. La fel se procedează cu $x_i\ L_i$, trasate din punctul J, cu raza r_J, care dau coroana interioară i.

Pe profilul trasat în acest mod (fig. 1) se amplasează diferitele raze unitare ca și înălțimea unitară a statorului b^* și se obțin toate punctele care delimitează pala rotorului și cea a statorului.

1.32. *Rotorul unitar normal* $n_s = 200$

Analog ca sub. 1.31, se calculează cu noul n_s mărimile caracteristice, fiind însă valabile, (la $n_s > 150$) relațiile (3) pentru r_{1i} și (8) pentru r_E:

$$r_{1e} = 1{,}045;\ r_{1i} = 0{,}940;\ r_{2i} = 0{,}486;\ r_{2e} = 1;\ r_0 = 1{,}12$$

$$b^* = 0{,}487;\ r_E = 1{,}141;\ r_J = 1{,}059;\ L_e = 1{,}26;\ L_i = 5{,}17.$$

Coloanele tabelei 1, în cazul $n_s = 200$, se calculează cu relațiile (1) și cu $x_e = 1{,}51\frac{x_e}{x_{em}}$; $L_e = 1{,}26\frac{L}{L_e}$; $x_l = 1{,}059\frac{x_l}{x_{lm}}$; $L_l = 5{,}17\frac{L}{L_l}$.

Rotorul unitar cu rapiditate normale $n_s = 200$ (peste 150 și sub 250) s-a trasat, cu aceste mărimi, în fig. 1-jos.

1.33. *Rotorul unitar rapid $n_s = 300$*

Pe baza aceloraşi relații (1—11) s-au calculat mărimile caracteristice și s-a trasat rotorul (fig. 2-sus), cu datele următoare:

$r_{1e} = 0{,}960$; $r_{1l} = 0{,}694$; $r_{2l} = 0{,}421$; $r_{2e} = 1$; $r_0 = 1{,}025$;

$b^* = 0{,}539$; $r_E = 1{,}084$; $r_J = 0{,}954 = x_{lm}$; $L_e = 0{,}89$; $L_l = 5{,}83$.

În tabela 1, cazul $n_s = 300$ s-au calculat relațiile (1) și coordonatele $x_e = 0{,}1256\frac{x_e}{x_{cm}}$; $L_e = 0{,}89\frac{L}{L_e}$; $x_l = 0{,}954\frac{x_l}{x_{lm}}$; $L_l = 5{,}83\frac{L}{L_l}$.

1.34. *Rotorul unitar foarte rapid $n_s = 400$*

Analog s-au calculat mărimile caracteristice și tabela 1 (cazul $n_s = 400$) respectiv s-a trasat rotorul foarte rapid în fig. 2-jos cu datele:

$r_{1e} = 0{,}955$; $r_{1l} = 0{,}547$; $r_{2l} = 0{,}383$; $r_{2e} = 1$; $r_0 = 1{,}021$;

$b^* = 0{,}572$; $r_E = 1{,}027$; $r_J = 0{,}897 = x_{lm}$; $L_e = 0{,}64$; $L_l = 6{,}27$;

$x_e = 0{,}0968\frac{x_e}{x_{em}}$; $L_e = 0{,}64\frac{L}{L_e}$; $x_l = 0{,}987\frac{x_l}{x_{lm}}$; $L_l = 6{,}27\frac{L}{L_l}$.

1.35. *Colecția de rotoare în mărime naturală*

Repetînd procedeul, utilizat în aliniatele precedente, pentru o gamă mare de rapidități, între $n_s = 50$ și $n_s = 450$, se obțin coordonatele unitare și un întreg catalog de rotoare unitare $r_{2e} = 1$.

Pentru proiectul unei turbine oarecari, caracterizată prin mărimi date de tema de proiectare Q și H, se trece de la rotorul unitar, notat cu raza r, la rotorul real cu razele $R = r R_{2e}$. Cum R_{2e}-real se calculează din relația dată în 1,2, vor fi:

$$R_{2e} = \left(0{,}35 + \frac{41{,}5}{n_s} - \frac{500}{n_s^2}\right)\frac{Q^{0{,}5}}{H^{0{,}25}} \quad \text{și} \quad R = r R_{2e}. \tag{12}$$

Se obțin astfel razele reale ale rotorului respectiv introducînd, după (2...11) r_{1e} în $R_{1e} = r_{1e} R_{2e}$; $R_{1l} = r_{1l} R_{2e}$; $B_0 = b^* R_{2e}$ și așa mai departe. Cu excepția relației (1), adoptată după funcția lui Bovet, dezvoltarea precedentă este originală a autorului, dar se menționează că ori cînd se poate trece la dimensiuni după alte metode, aplicînd metodologia precedentă. De asemenea se menționează că pot fi găsite și alte funcții, în locul (1), ceea ce depășește cadrul acestui studiu.

2. TRASAREA ROTORULUI ȘI FLUXULUI

Suprafețele de flux $\psi = ct$ și echipotențiale $\varphi = ct$ în spațiul de revoluție axial simetric al rotorului și statorului, se cunosc dacă se stabilesc curbele generatoare ψ și φ.

2.1. Exemple de funcții ψ φ

Pentru ψ și φ pot fi găsite numeroase soluții, dintre care unele sînt hidrodinamice, favorabile proiectării rotorului Francis. Astfel F. Prášil [3] a exemplificat mișcările axialsimetrice prin aspirator cu funcțiile (13, 14).

$$\psi = 2zr^2 ; \quad \varphi = 2z^2 - r^2 \tag{13}$$

$$\psi = C_0\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4\cdot 4} + \frac{r^6}{6\cdot 6} + \ldots\right) + C_1\left(\frac{r^3}{2} + \frac{r^5}{5\cdot 9} + \frac{r^7}{7\cdot 25} + \ldots\right)\cos z \tag{14}$$

$$\varphi = C_0\left(1 + \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{16} + \ldots\right) + C_1\left(r + \frac{r^3}{9} + \frac{r^5}{25} + \ldots\right)\sin z \tag{14'}$$

2.2. Rețeaua axialsimetrică I

Notînd componenta mediană a vitezei absolute $c_m = c\sin\alpha$ prin spațiul axialsimetric al statorului și rotorului, la raza r, din axul z al turbinei, trasat vertical în jos (fig. 5), de la $z=o$ planul orizontal superior al statorului, se pot exprima, după :

Torricelli $c_m = \sqrt{2gz}$

Cuplul Euler $c_m\, r = k$-constant.

Se înlocuiește viteza din prima relație în a doua și se ridică la pătrat :

$$\sqrt{2gz}\, r = k ; \quad 2r^2 z = \frac{k}{g} = K = \psi .$$

La diferite valori numeric parametrice ale constantei $K=$ de exemplu $\psi_0 = 0$; $\psi_{0,1} = 0{,}1$; $\psi_{0,2} = 0{,}2 \ldots\ldots \psi_1 = 1$; $\psi_2 = 2$, etc., se obțin generatoarele suprafețelor de flux $\psi = ct$ după (17) și cele echipotențiale φ după (18). După proprietățile rețelelor axialsimetrice se exprimă relațiile :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (15) ; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (16)$$

$$\psi = 2r^2 z ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 4rz ; \quad \partial\varphi = \frac{1}{r}4rz\,\partial z = 4z\,\partial z ;$$

$$\varphi = 4\int z\,\partial z + C = 2z^2 + C .$$

Pentru determinarea costantei C se aplică (16) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{r}2r^2 = -2r ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(2z^2 + C) = \frac{\partial C}{\partial r} .$$

Egalînd cele două expresii a lui $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ se obține constanta C și funcția echipotențialelor:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -2r; \quad C = -2\int r\,\partial r = -r^2; \quad \varphi = 2z^2 - r^2.$$

Astfel liniile de flux ψ și echipotențiale φ se exprimă prin relațiile:

$$\psi = 2r^2 z \quad (17); \qquad \varphi = 2z^2 - r^2 \quad (18)$$

Pentru nevoile proiectării rotorului trebuie calculat cîmpul (fig. 3), care se efectuiază în tabela 2 și 3. Cu ajutorul acestor tabele poate fi construit cîmpul ψ φ, asemănător figurii 3, la scări cît mai amănunțite, pînă la scara 1 : 1 a rotorului.

Analog s-au calculat coordonatele echipotențialelor.

Tabela 2

Rețeaua $\psi = 2r^2 z$, calculul razelor $r = \sqrt{\frac{\psi}{2z}}$ la z și ψ parametric constante

ψ \ z	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,1	r=0,4	0,353	0,289	0,250	0,224	0,204	0,189	0,177	0,167	0,158
0,2	0,707	0,500	0,408	0,353	0,316	0,289	0,267	0,250	0,246	0,224
0,3	0,866	0,612	0,500	0,433	0,387	0,354	0,327	0,306	0,289	0,274
0,4	1,000	0,707	0,577	0,500	0,447	0,408	0,378	0,353	0,333	0,316
0,5	1,112	0,790	0,656	0,560	0,500	0,457	0,422	0,395	0,372	0,353
0,6	1,225	0,866	0,707	0,612	0,548	0,500	0,463	0,433	0,408	0,387
0,7	1,322	0,936	0,764	0,662	0,591	0,540	0,500	0,468	0,441	0,418
0,8	1,414	1,000	0,817	0,707	0,632	0,577	0,535	0,500	0,472	0,447
0,9	1,500	1,060	0,866	0,750	0,671	0,612	0,567	0,530	0,500	0,474
1,0	1,580	1,118	0,912	0,790	0,707	0,645	0,598	0,559	0,528	0,500
1,5	1,935	1,370	1,118	0,968	0,866	0,790	0,732	0,684	0,646	0,612
2,0	2,235	1,580	1,290	1,118	1,000	0,913	0,845	0,790	0,746	0,707
2,5	—	1,770	1,445	1,250	1,118	1,020	0,945	0,884	0,833	0,790
3,0	—	1,935	1,580	1,370	1,225	1,118	1,034	0 968	0,912	0 866
3,5	—	2,090	1,706	1,480	1,322	1,208	1,118	1,045	0,686	0,935
4,0	—	2,235	1,825	1,580	1,414	1,290	1,195	1,118	1,055	1,000
4,5	—	—	1,940	1,675	1,500	1,370	1,268	1,185	1,118	1,060
5,0	—	—	2,040	1,770	1,581	1,441	1,337	1,250	1,177	1,118
5,5	—	—	—	1,852	1,658	1,515	1,402	1,310	1,235	1,173
6,0	—	—	—	1,935	1,732	1,580	1,463	1,370	1,290	1,225

Tabela 3

Ordonatele $z = \frac{\psi}{2r^2}$ la ψ și r parametric constante

r \ ψ	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0,5	1,000	2,000	3,000	—	—	—	—	—	—	
1,0	0,250	0,500	0,750	1,000	1,250	1,500	1,750	2,000	2,250	2,500
1,5	0,111	0,222	0,333	0,444	0,555	0,666	0,778	0,889	1,000	1,111
2,0	0,0625	0,125	0,1875	0,250	0,3126	0,375	0,4375	0,500	0,5625	0,625

Tabela 4

Calculul razelor $r = \sqrt{2z^2 - \varphi}$, la φ și z parametric constante

z \ φ	0	— 0,5	— 1	— 1,5	— 2	— 2,5	— 3	— 3,5	— 4
0	$r = 0$	0,707	1,000	1,225	1,414	1,581	1,732	1,870	2,000
0,2	0,233	0,732	1,040	1,258	1,442	1,606	1,755	1,893	2,020
0,4	0,535	0,906	1,150	1,350	1,525	1,680	1,824	1,955	2,080
0,6	0,818	1,105	1,311	1,490	1,650	1,795	1,930	2,052	—
0,8	1,131	1,335	1,510	1,680	1,810	1,945	2,063	—	—
1,0	1,414	1,580	1,732	1,870	2,000	2,120	—	—	—
1,2	1,696	1,828	1,970	2,090	—	—	—	—	—

Tabela 5

Calculul ordonatelor $z = 0{,}707\sqrt{r^2 + \varphi}$, la φ și r parametric constante

r \ φ	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7
0	z=0,224	0,500	0,707	1,000	1,225	1,414	1,580	1,732	1,870
0,5	0,418	0,612	0,790	1,060	1,274	1,458	1,620	1,768	1,903
1,0	0 741	0,866	1,000	1,225	1,414	1,580	1,732	1,875	2,000
1,5	1,081	1,174	1,275	1,456	1,619	1,766	1,905	2,032	—

Se menționează că fig. 3 poate servi numai la proiectarea rotoarelor lente cu $n_s < 150$, deoarece intrarea spre rotor are linii de flux ψ convergente, deci neapte pentru rotoare normale și rapide.

În acest scop se schițează în fig. 3 rotorul cu $n_s = 100$, conturat prin punctele *li*, *le*, *2i*, *2e*, cu muchea de intrare *li*—*le* și de ieșire *2i*—*2e* și razele aferente preluate din fig. 1—sus.

Un rotor foarte lent s-a trasat între punctele *i*—*e*—*i'*—*e'*, așa cum pot fi trasate numeroase alte rotoare cu $n_s = 50$ la 150. La toate acestea liniile de flux, cuprinse între coroana exterioară *le*—*2e* și interioare *2e*—*2i*, sînt determinate de relația $\psi = 2r^2 z$.

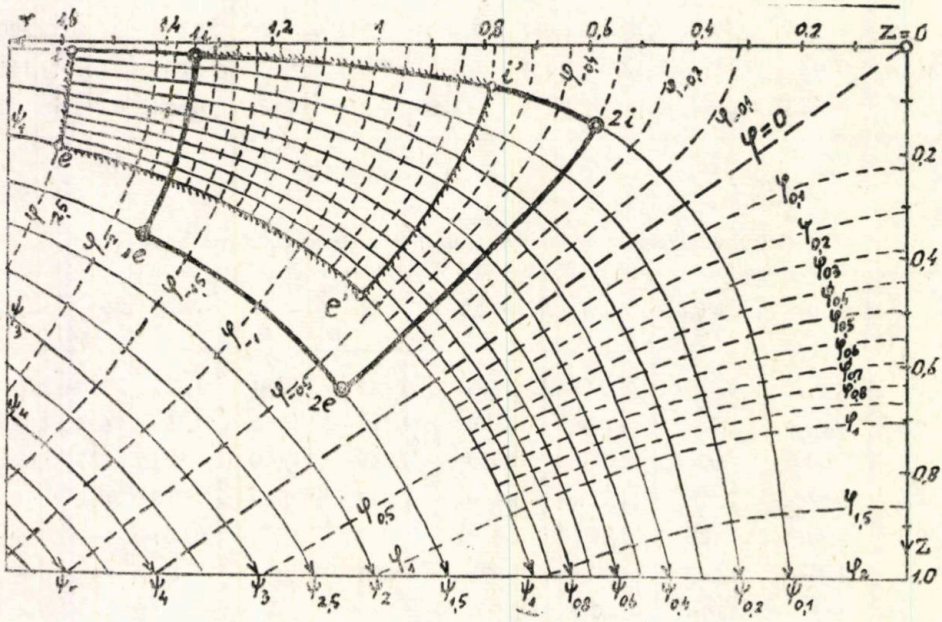


Fig. 3. Cîmpul hidrodinamic axialsimetric I.

În orice punct al palei poate fi calculată viteza absolută meridiană c_m după (19), în care Δn se citește între două linii ψ consecutive. La fel în orice punct poate fi calculat unghiul γ între c_m și raza r, din relația : (20):

$$c_m = \frac{k}{r}\frac{\Delta\psi}{\Delta n} \quad (19) ; \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta r} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} \quad (20)$$

Astfel reiese că utilizarea cîmpului ψ φ din fig 3 constituie posibilitatea de a cunoaște precis — pe cale analitică — toți parametrii necesari proiectării palei. Spre deosebire de acesta, cîmpul construit după metoda aproximărilor succesive se verifică greoi în 3—4 etape după relația continuității $r\Delta n = \text{constant}\ \Delta l$.

2.3. Rețeaua axialsimetrică II

Admițînd o toleranță de cîteva procente la calculul numeric, se renunță în (14—14') la termeni r cu exponenți superiori. Din motive de

simetrie trebuie să fie $C_1 = 0$. Astfel se exprimă simplificat liniile de flux ψ și echipotențiale φ în funcție de raza r și ordonata z:

$$\psi = \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{16}\right) \cos z \quad (21); \qquad \varphi = \left(1 + \frac{r^2}{4}\right) \sin z \quad (21')$$

Calculul liniilor de flux ψ și echipotențiale φ din fig. 4 se exemplifică prin tabelele 6 și 7, în care se înțeleg $\psi_1 = \pi/40$; $\psi_2 = 2\pi/40$ etc., ca multiplii de $\pi/40$. Ordonata z extinsă de la $z=0$ în sus la $z=\pi/2$, cu razele:

Tabela 6

Calculul ordonatelor z a rețelei $\psi = \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{1}\right)$ cos z, la ψ și r parametric constante

r \ $\psi/(\pi/40)$	0,5	1	2	3	4	5	6	7
0,4	z=1,068	0,293	—	—	—	—	—	—
0,6	1,357	1,140	0,527	—	—	—	—	—
0,8	1,455	1,340	1,100	0,823	0,432	—	—	—
1	1,500	1,428	1,285	1,140	0,978	0,798	0,578	0,216
1,2	1,525	1,478	1,384	1,289	1,191	1,088	0,980	0,866
1,4	1,530	1,500	1,432	1,365	1,298	1,232	1,167	1,102
1,6	1,536	1,522	1,475	1,428	1,381	1,334	1,288	1,252

Tabela 7

Calculul ordonatelor z a rețelei $\varphi = \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)$ sin z, la φ și r parametric constante

r \ $\varphi/(\pi/40)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	z=0,0785	0,158	0,237	0,319	0,403	0,488	0,580	0,676	0,784
1	0,0628	0,1260	0,1895	0,254	0,319	0,386	0,454	0,526	0,599

r, dă cîmpul trasat în fig. 4, util rotorului. Cadranul de la $z=0$ în jos, la $-\pi/2$, este imaginea oglindită a fig. 4, cu axa de simetrie $z=0$ și poate fi admisă drept cîmp de scurgere printr-un aspirator drept vertical. În fig. 4 se indică prin *1e—1i—2e—2i* un rotor foarte lent și prin *Ie—Ii—IIe—IIi* unul lent normal, cu mențiunea că în gama n_s =50—150 pot fi trasate numeroase alte profile de rotoare.

Cîmpul hidrodinamic, asemănător dar mai exact decît cel din fig. 4, se obține dacă în (21—21') se introduce o serie lungă pentru r cu exponenții crescători, însă acesta constitue obiectul unui alt studiu mai laborios.

2.4. Trasarea fluxului cu funcția din aliniatul 1.3.

Intre coroanele e și i pot fi trasate linii ψ_I ψ_{II} intermediare (fig. 5) în care scop se interpolează noi origini I II între E și J, pentru care se stabilesc relațiile (21'—21''). Aci $m=3$ canale prin rotor, iar $k=1$ pentru

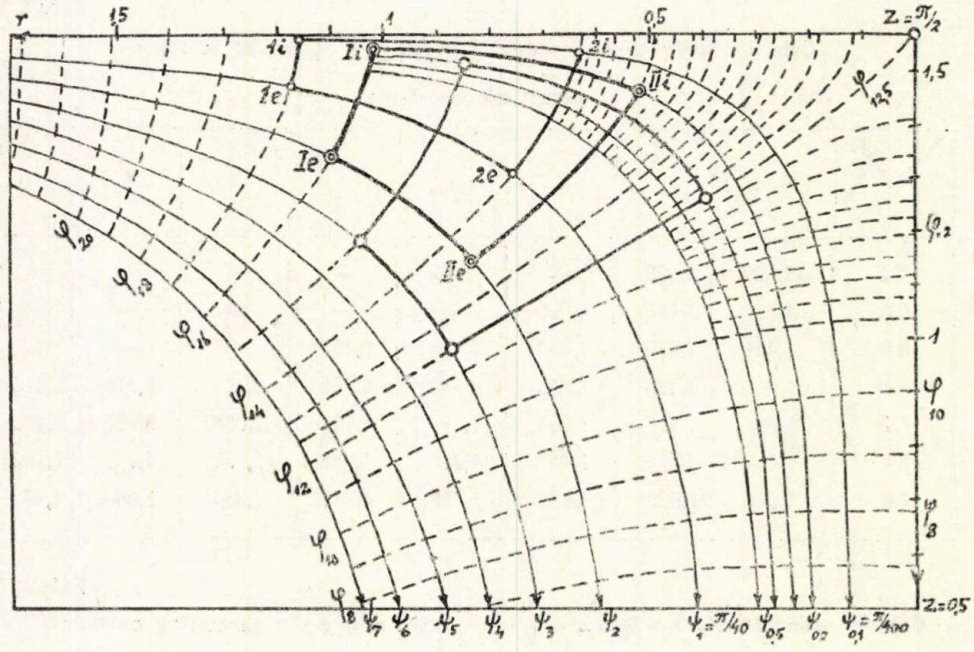


Fig. 4. Cîmpul hidrodinamic axialsimetric II.

ψ_I, $k=2$ pentru ψ_{II} permit calculul numeric asemănător celui din aliniatul 1.3 și tabela 1, anume cu:

$$r_k = \frac{k}{m} r_E + \frac{m-k}{m} r_J \; ; \quad L_k = \frac{k}{m} L_e + \frac{m-k}{m} L_i \ldots \quad (21' \ldots 22'')$$

$$r' = 0{,}885 - 0{,}00019\, n_s + \frac{58{,}3}{43{,}7 + n_s} \; ;$$

$$L' = 2{,}933 + 0{,}00567\, n_s - 0{,}00000503\, n_s^2 ;$$

$$r'' = 1{,}07 - 0{,}00038\, n_s + \frac{29{,}13}{43{,}7 + n_s} ;$$

$$L'' = 2{,}666 - 0{,}00067\, n_s + 0{,}00000073\, n_s^2 ;$$

Vitezele c_{m1} la muchia de intrare și c_{m2} la ieșire se calculează din $c_m = \frac{K}{r\Delta n}$ (fig. 5, tabela 8), în acest caz cu $K = 1{,}86$ pentru a obține la mijlocul intrării $c_{m1} = 1$.

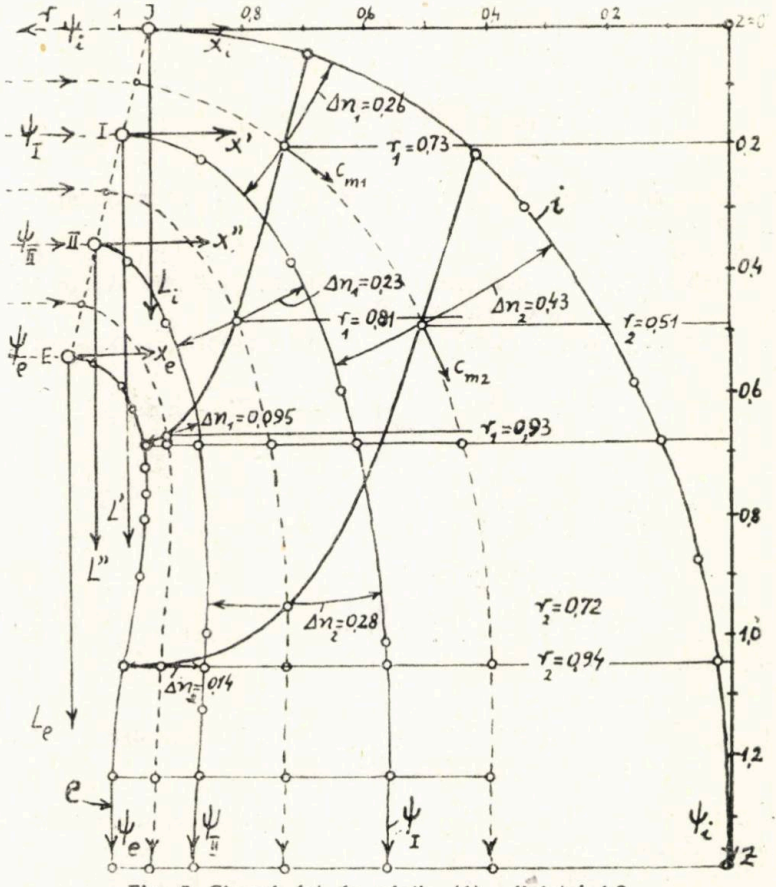


Fig. 5. Cîmpul dat de relația (1), aliniatul 1.3.

Tabela 8

Vitezele unitare după cîmpul din figura 5

Canal	Δn_1	r_1	$r_1 \Delta n_1$	C_{m1}	Δn_2	r_2	$r_2 \Delta n_2$	C_{m2}
I	0,26	0,73	1,90	0,98	0,42	0,50	0,21	0,85
II	0,23	0,81	1,86	1,00	0,28	0,72	0,209	0,92
III	0,095	0,93	0,088	2,10	0,134	0,93	0,192	0,97

2.5. Alte posibilități de trasare a cîmpurilor axialsimetrice

Ținînd seama de condițiile specifice cîmpurilor axialsimetrice, exprimate mai sus prin relațiile (15—16), care satisfac (22 ; 22′) ;

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{22′}$$

pot fi găsite și alte funcții $\psi=f(r,z)$, $\varphi=F(r,z)$, a căror tratare depășește cadrul acestui studiu.

Menționăm că D. Tașcă a propus în [4] un alt mod de rezolvare a cîmpurilor axialsimetrice, combinînd un sistem oarecare de curse punctiforme și liniforme cu un curent exterior.

Funcțiile ψ și φ sînt în cazul cîmpului prin rotoare Francis sau Kaplan :

$$\psi=Br^2z\left(1-\frac{R_0^5}{R^5}\right)-\frac{\dot{V}_l}{4\pi l}(R'-R) \tag{23}$$

$$\varphi=B\left[1+\frac{2}{3}\frac{R_0^5}{R^5}\left(z^2-\frac{r^2}{2}\right)\right]-\frac{\dot{V}_l}{4\pi l}\ln\frac{R+R'+l}{R+R'-l}. \tag{23′}$$

Prin alegerea judicioasă a razei emisferei R_0, plasate cu centrul la $z=0$ și $r=0$ și a unui debit $\dot{V}_l$ al sursei liniforme, de lungimea l de la $z=0$ în jos, în axa rotorului, pot fi obținute numeroase cîmpuri de flux ψ φ, utile proiectării turbinelor.

3. UTILITATEA CUNOAȘTERII CIMPULUI HIDRODINAMIC PRIN ROTOR

Cunoscînd funcțiile $\psi=f(r,z)$ și $\varphi=F(r,z)$, cum s-au exemplificat unele în aliniatele 2·1 la 2·4, pot fi :

— trasate coroanele și muchiile de intrare-ieșire din rotor ;

— calculate vitezele meridiane $c_m=\dfrac{\Delta\dot{V}}{2\pi r\Delta n}$, cu Δn lărgimile canalelor între două linii ψ — consecutive, în orice punct al rotorului ;

— construite triunghiurile de viteze și forma palelor pentru toate liniile de flux, între cele două coroane ale rotorului.

Față de metoda grafo-analitică de stabilire a liniilor de flux ψ prin aproximări succesive, aplicată în practică, metodele analitice, care pot fi extinse față de acest studiu, conduc la o proiectare mai exactă și mai rapidă.

Catedra de hidraulică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE:

D. Pavel: Mașini hidraulice vol. I. Ed. Energetice de Stat 1954.

D. Pavel: Beitrag zu den Auslegungsmethoden hydraulischer Turbinen. Comunicările conferinței de mașini hidraulice 1964, vol. I.

F. Prášil: Technische Hydrodynamik, Springer 1926 (pag. 60—74).

D. Tașcă: Mișcări potențiale axialsimetrice, Bul. IPB, Tom. XXVI fasc. 5.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

CHIMIE ANORGANICĂ

C.Z. : 661.42 : 547.398.6

UTILIZAREA SCHIMBĂTORILOR DE IONI ÎN ELECTROLIZA CLORURII DE SODIU

T. D. IONESCU, G. UŢĂ, G. TUDORACHE

1. Purificarea saramurii.

La fabricarea hidroxidului de sodiu prin electroliză, în electrolizoare cu diafragmă, se utilizează soluţii concentrate de clorură de sodiu, purificate în prealabil cu hidroxid şi carbonat de sodiu pentru îndepărtarea ionilor de calciu şi magneziu.

Procedeul este greoi şi nu dă rezultatele cele mai bune deoarece la temperatura de regim a electrolizei, din saramura purificată mai precipită cantităţi mici de calciu şi magneziu care cu timpul colmatează diafragmele modificîndu-le capacitatea de filtrare.

Pentru înlăturarea acestor inconveniente s-a experimentat purificarea saramurilor prin schimb ionic, obţinîndu-se soluţii de clorură de sodiu complet lipsite de ioni de calciu şi magneziu.

În literatura de specialitate există puţine date referitoare la îndepărtarea impurităţilor cationice din saramura de clorură de sodiu [1, 2, 3, 4].

Prin electroliza saramurii în electrolizoare cu diafragmă rezultă leşii caustice diluate, puternic impurificate cu clorură de sodiu şi cu cantităţi minimale de clorat, carbonat şi sulfat de sodiu.

Aceste leşii se concentrează pînă la conţinutul de 50% NaOH cînd clorura de sodiu este în cea mai mare parte îndepărtată. Totuşi, leşiile caustice cu 50% NaOH, mai conţin încă 1,0—1,5% NaCl, adică ceva mai mult decît solubilitatea NaCl în sistemul NaOH—NaCl—H_2O (la 20° tabelele indică 0,91% NaCl solubilă).

Conţinutul rezidual de clorură de sodiu face ca leşiile concentrate provenite de la electroliza cu diafragmă să fie improprii pentru fabricarea firelor şi fibrelor artificiale şi sintetice, precum şi în alte domenii. Ace-

* Lucrare comunicată în sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 22—23 februarie 1964.

sta este de fapt principalul dezavantaj al electrolizei cu diafragmă, faţă de electroliza cu catod de mercur.

Pentru eliminarea acestui inconvenient, au fost elaborate diverse procedee de purificare a leşiilor produse de electrolizoarele cu diafragmă [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Dintre acestea este recunoscută superioritatea procedeului cu amoniac lichid.

Cu cîţiva ani în urmă, în S.U.A. a fost elabort un patent [12] de purificare a leşiilor caustice cu ajutorul răşinilor schimbătoare de ioni; condiţiile de lucru cît şi aspectele tehnico-economice ale acestui procedeu, privind realizarea pe scară industrială, nu sînt cunoscute.

Lucrarea de faţă are drept scop stabilirea condiţiilor de lucru pentru purificarea saramurii şi a leşiilor caustice cu ajutorul ioniţilor şi precizarea efectului economic realizabil într-o uzină de sodă caustică electrolitică din ţara noastră.

a) *Partea experimentală.*

Pentru stabilirea condiţiilor de lucru au fost încercate în laborator mai multe răşini cationice de diferite tipuri: Allasion CS, Kastel C-300, Relite CC, Kastel C-100, Wofatit CN, Wofatit F şi Amberlite IRC-50.

Din fiecare răşină s-au luat cîte 25 grame şi după o serie de spălări prealabile s-au umflat prin ţinere în apă timp de 24 ore, apoi s-au introdus în coloane din sticlă înalte de 50 cm cu diametrul de 2,5 cm. Prin coloanele respective, cu răşinile cationice sub forma HR, s-a trecut saramura brută conţinînd 310 g NaCl/l şi 0,5 g $(Ca^{++} + Mg^{++})$/l. Viteza de scurgere a fost de 5 cm^3/minut; efluenţii s-au colectat în fracţiuni de cîte 100 cm^3, în care s-a determinat prezenţa calciului şi a magneziului.

S-a constatat că toate raşinile experimentate în forma HR nu reţin calciul şi magneziul; aceşti cationi sînt prezenţi chiar în primele fracţiuni de efluent.

Răşinile în forma HR au fost tratate cu o soluţie de clorură de sodiu 10%, dar şi în acest caz, s-a constatat existenţa calciului şi magneziului în primele fracţiuni de efluent.

În continuare, s-au făcut o serie de încercări trecînd răşinile în forma NaR prin tratare cu soluţia de clorură de sodiu 10% care conţinea urme de hidroxid de sodiu (2—5 g/l) pentru a conferi mediului o slabă bazicitate. Lucrîndu-se astfel, aşa cum reiese din tabela 1, s-au obţinut rezultate bune cu cationiţii: Relite CC, Kastel C-100, Wotafit CN, şi Amberlite IRC-50.

Rezultatele înscrise în tabela 1, arată că ioniţii puternic acizi, monofuncţionali, care conţin în structura lor numai grupe sulfonice ca: Allasion CS şi Kastel C-300, atît în forma HR cît şi în forma NaR, nu reţin ionii Ca^{++} şi Mg^{++} din saramura concentrată de clorură de sodiu. Wofatitul F bifuncţional, care conţine pe lîngă grupele sulfonice şi grupe OH fenolic, manifestă o oarecare capacitate de schimb pentru calciu şi magneziu, atunci cînd este trecut în forma sodică prin tratare cu soluţii de clorură de sodiu care conţin cantităţi mici de hidroxid de sodiu.

Reținerea cationilor Ca^{++} și Mg^{++} din soluțiile concentrate de clorură de sodiu, de către cationitul bifuncțional Wofatit F se realizează pe seama grupelor OH, care, în mediul slab bazic, schimbă ionii H^+ cu cationii respectivi din soluția alcalină.

Tabela 1

Volume de saramură purificată folosind coloane de sticlă conținînd cîte 25 g rășină cationică.

Denumirea cationitului	Forma HR prin tratare cu HCl 4% cm³	Forma NaR, prin tratare cu NaCl 10% cm³	Forma NaR prin tratare cu NaCl 10% + 0,2% NaOH cm³
Allassion CS	—	—	—
Kastel C 300	—	—	—
Kastel C 100	—	—	800
Relite CC	—	—	1100
Amberlite IRC 50	—	—	700
Wofatit F	—	—	200
Wofatit CN	—	—	1000

Tabela 2

Volumele soluțiilor de regenerare și ale apei de spălare folosite la regenerarea rășinilor care au reținut ionii Ca^{2+} și Mg^{2+} din saramura de clorură de sodiu.

Denumirea cationitului	HCl 0,5% (cm³)	Saramură cu 0,2% NaOH (cm³)	Apă de spălare (cm³)
Kastel C 100	800	1300	300
Relite CC	800	1900	300
Amberlite IRC 50	950	1900	200
Wofatit F	700	950	150
Wofatit CN	1150	1400	200

Ioniții Kastel C-100, Relite CC, Wofatit CN și Amberlite IRC-50, sînt catoiniți monofuncționali slab acizi, conținînd în structura lor grupe carboxilice, care, fiind slab disociate, pentru realizarea schimbului catiooic necesită un mediu alcalin de reacție. Cu rășinile carboxilice respective au fost obținute rezultatele cele mai bune.

Curbele de saturare ale cationiților carboxilici cu ionii Ca^{2+} și Mg^{2+}, reținuți din saramura de clorură de sodiu, sînt în general asemănătoare pentru toți cationiții încercați, concentrația în ioni de Ca^{2+} și Mg^{2+} în efluent crescînd progresiv pînă la aceea a afluentului.

După saturarea rășinilor cu ioni Ca^{2+} și Mg^{2+}, s-a realizat trecerea lor în forma HR prin tratare cu soluții de acid clorhidric de concentrații diferite, obținînu-se o regenerare totală cu soluția de 0,5% HCl.

Regenerarea se consideră terminată atunci cînd în fracțiunile de efluent nu mai există ioni Ca^{2+} și Mg^{2+}.

Pentru îndepărtarea urmelor de acid din spațiile intergranulare se trece apă distilată prin coloanele regenerate, pînă la reacția neutră a efluentului de spălare.

Pentru corelarea condițiilor de laborator cu condițiile din instalația industrială, al doilea stadiu al regenerării, care corespunde la trecerea răşnilor din forma HR în forma NaR, s-a realizat folosindu-se saramură de clorură de sodiu purificată în prealabil, la care s-au adăugat cantități mici de hidroxid de sodiu (2—5 g/l).

Saramura care iese din coloanele astfel regenerate se trimite la celulele de electroliză.

b) *Tehnologia procesului.*

Pe baza operațiilor efectuate în laborator s-a stabilit tehnologia pentru o instalație industrială de purificare a saramurii cu ajutorul cationiților, conform schemei din fig. 2.

Instalația de purificare cu cationiți se poate grefa pe actuala instalație de purificare cu sodă și hidroxid de sodiu de la uzina considerată fără modificări esențiale ale instalației respective.

Peste cationitul în forma HR din coloana 4 se trece saramură de la instalația de evaporare a leșiilor produse de electroliza cu diafragmă

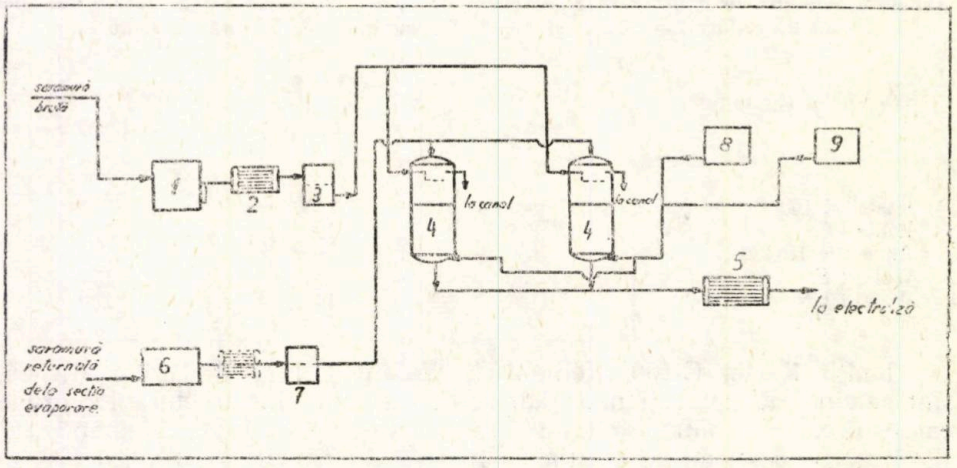


Fig. 2. Schema tehnologică pentru purificarea cu cationiți a saramurii utilizate în uzina de sodă caustică electrolitică.

LEGENDA

1 = rezervor de saramură brută ; 2 = preîncălzire la 60°C ; 3 = filtru pentru saramura brută ; 4 = coloane schimbătoare de ioni ; 5 = preîncălzire, la 90°C, a saramurii purificate ; 6 = rezervor de saramură, returnată de la instalația de evaporare a leșiilor caustice ; 7 = filtru pentru saramura returnată ; 8 = rezervor pentru soluția diluată de acid clorhidric ; 9 = rezervor pentru apă de spălare.

(stocată în rezervorul 6). In prealabil această saramură este eventual preîncălzită și apoi filtrată în filtrul 7. Datorită conținutului de hidroxid de sodiu din saramură, răsina este trecută în forma NaR Din rezervorul 1, prin preîncălzitorul 2 și filtrul 3, saramura brută de NaCl, impurificată cu ioni Ca^{2+} și Mg^{2+} se introduce în coloana 4, unde sînt reținuți ionii de calciu și magneziu. Saramura purificată este preîncălzită la 90°C în preîncălzitorul 5 și trimisă la electroliză. Din rezervorul 8, se introduce în coloana saturată cu ioni Ca^{2+} și Mg^{2+} soluția de 0,5% HCl, deșeu de la fabricarea soluțiilor de acid clorhidric de sinteză. Se elimină astfel ionii Ca^{2+} și Mg^{2+} iar răsina este trecută în forma HR. Din rezervorul 9, se introduce apă de condens în coloana 4 pentru spălarea masei de cationit. Din coloana 4, atît soluția de regenerare epuizată cît și apele de spălare sînt conduse la canal. Pentru funcționarea continuă a procesului, instalația este dotată cu două coloane identice (4a, 4b) ; una purifică saramura în timpul cînd cealaltă regenerează răsina.

c) *Aspectul economic.*

Indicii tehnico-economici principali ai instalației de purificare a saramurii cu ajutorul ioniților sînt prezentați în *tabela nr. 3* :

Desi, în general, performantele realizate în instalatiile industriale cu schimbători de ioni sînt mult mai bune decît cele obținute în laborator, indicii tehnico- economici principali au fost calculați pe baza rezultatelor din laborator (tabela III).

Calculul conduce la concluzia că se obțin economii de reactivi în valoare de 50.000 lei/an la un consum zilnic de saramură de 1250 m^3.

Cantitatea de apă necesară pentru spălarea masei de cationit, mai mică decît cantitatea utilizată pentru spălări în instalația de epurare cu sodă, nu s-a prins în calcul.

Deasemenea nu s-a calculat reducerea schemei de personal, consecință a automatizării instalației de purificare cu schimbători de ioni.

In ceea ce privește consumul de energie electrică si cheltuielile de întretinere, se poate conta că vor fi reduse substanțial față de situația actuală.

Trebuie arătat însă că efectele economice realizabile prin aplicarea procedeului de purificare a saramurii cu schimbători de ioni nu se limitează la instalația de purificare propriuzisă. Efectele realizabile prin admiterea la electroliză a unor saramuri complet lipsite de ioni Ca^{2+} și Mg^{2+}, au o importanță economică foarte mare în ceea ce privește prelungirea duratei de funcționare a diafragmelor și constanța căderii de tensiune în acestea.

In mod normal, diafragma unei celule de electroliză ar trebui să aibe o durată de funcționare de aproximativ 300 zile. Datorită însă faptului că intervine fenomenul de colmatare, cauzat de cantitățile de ioni Ca^{++} și Mg^{++} cumulate în timp, din saramura purificată, diafragma este scoasă din funcțiune după aproximativ 110 zile de lucru.

Tabela 3

Nr. crt.	Mărimea calculată sau considerată	Unitatea de măsură	Valoarea	Observații
1	2	3	4	5
1	Consum zilnic de saramură (brută plus recirculată).	m^3	1250	
2	Conținutul mediu de impurități (Ca^{2+} + Mg^{2+}) al saramurii.	g/l	0,5	
3	Capacitatea de schimb a rășinii.	$\frac{\text{g. impurit.}}{\text{Kg. rășină}}$	20	
4	Numărul de cicluri propus în 24 ore.	—	6	
5	Cantitatea de schimbători de ioni.	Kg	5700	
6	Durata de folosire a rășinii.	zile	500	Cationiții rezistă în mod normal, la peste 3000 de cicluri.
7	Consumul de rășină pe tona de produs electrolitic.	Kg	0,047	
8	Prețul unui kg de rășină.	lei	20	maximum
9	Costul rășinii pe tona de produs electrolitic.	lei	0,94	
10	Cantitatea de saramură returnată.	$\frac{m^3}{24\ h}$	562,5	45% din consumul zilnic.
11	Conținutul de hidroxid de sodiu al saramurii returnate.	g/l	3	
12	Cantitatea de hidroxid de sodiu conținută în saramura returnată zilnic.	Kg	1686	Servește parțial la eliminarea ionilor Mg^{2+}, majoritatea trebuind neutralizată cu acid clorhidric.

Tabela 3 (continuare)

1	2	3	4	5
13	Cantitatea de hidroxid de sodiu necesară pentru trecerea rășinii în forma NaR.	Kg/24 h	3686	
14	Consum de hidroxid de sodiu.	Kg/24 h	2000	Se poate menține o concentrație de NaOH mai mare de 3 g/l saramură spălînd mai puțin eficace sarea separată pe centrifugă.
15	Consum de hidroxid de sodiu pe tona de produs electrolitic.	Kg	8	
16	Costul hidroxidului de sodiu consumat pe tona de produs electrolitic.	lei	8	S-a aproximat costul hidroxidului de sodiu prelucrat numai în prima fază de evaporare.
17	Costul acidului clorhidric 0,5% necesar regenerării.	lei	0	Ape acide deșeu.
18	Sodă calcinată economisită pe tona de produs electrolitic.	Kg	8	
19	Valoarea sodei calcinate economisită pe tona de produs electrolitic.	lei	6	
20	Acid clorhidric economisit pe tona de produs electrolitic.	Kg	8	Acid clorhidric de 32%, de la operația de neutralizare (economisit în procedeul studiat).
21	Valoarea acidului clorhidric economisit pe tona de produs electrolitic.	lei	3,5	
22	Valoarea economiilor de reactivi pe tona de produs electrolitic.	lei	0,56	
23	Valoarea anuală a economiilor de reactivi.	lei	50.000	

În acest interval de timp (după 90 zile de funcționare) diafragma trebuie să fie spălată, spălarea implicînd pierderea unui fond de timp productiv de 48 ore pentru fiecare celulă.

Prin prelungirea duratei de funcționare a diafragmelor, datorită absenței ionilor Ca^{++} și Mg^{++} în saramura purificată, numai economiile de azbest crizotilic (material din import) însumează 180.000 lei anual, fără a mai ține seama de chimicalele și manopera consumate pentru schimbarea diafragmelor.

Datorită necolmatării, se poate aprecia că instalația de electroliză va funcționa cu o tensiune medie anuală, (pe electrolizor) mai mică cu 0,1—0,2 V, consecință a rezistenței ohmice scăzute, caracteristică diafragmelor necolmatate. Socotind numai o reduceree de 0,1 V, se economisesc 7,4 Kwh/tona de sodă caustică, adică 82.000 lei anual. În instalațiile actuale de electroliză se realizează leșii cu concentrația medie de 125—130 g NaOH/l, la un randament de curent acceptabil, și sub 100 g NaOH/l, la un randament bun de curent, în celulele cu diafragme în formare.

Prin schimbarea diafragmelor la intervale de timp mari, celulele de electroliză vor avea o funcționare normală în ceea ce privește concentrația leșiei caustice produse, fapt care se reflectă pozitiv în funcționarea instalației de concentrare a leșiilor.

Post calculul efectuat în urma funcționării instalației de purificare cu schimbători de ioni, va aduce argumente mult mai edificatoare asupra importanței tehnico-economice a noului procedeu, în comparație cu procedeul actual. Efortul de investiții ar atinge sau ar depăși cu puțin valoarea economiilor realizabile într-un an prin aplicarea procedeului de purificare a saramurii cu schimbători de ioni, fapt care pledează pentru oportunitatea aplicării noului procedeu în fabricile de sodă electrolitică.

În ceea ce privește aplicarea procedeului de purificare cu schimbători de ioni a saramurii utilizate în uzinele de sodă carbonat, problema comportă un studiu amănunțit, legat de condițiile locale ale uzinei considerate. Posibilitățile de procurare a acidului clorhidric ieftin constitue o condiție esențială.

2. Purificarea leșiilor caustice obținute prin electroliză în electrolizori cu diafragmă.

a) *Partea experimentală.*

Problema purificării cu ajutorul schimbătorilor de ioni a leșiilor caustice provenite de la electroliza cu diafragmă, a fost studiată în laborator și instalația pilot.

Pentru restrîngerea domeniului de cercetare, s-a avut în vedere faptul că atît leșiile electrolitice, cît și leșiile obținute după prima treaptă de evaporare, au un conținut ridicat de clorură de sodiu, care, pentru eliminare, implică imobilizarea unor cantități mari de rășini schimbătoare de ioni. Deasemenea, temperatura ridicată a acestor leșii nu convine contactării cu anioniții.

Din aceste motive, cercetările, au fost limitate la domeniul leșiilor caustice conținînd 50% NaOH. Aceste leșii sînt impurificate cu clorură

de sodiu în cantități apropiate de cele prevăzute de solubilitatea în sistemul NaOH—NaCl—H_2O iar temperatura lor, obligată de procesul tehnologic al instalațiilor de evaporare existente, nu depășește 25°C. Dealtfel, toate procedeele de purificare cunoscute, pe plan mondial, se referă numai la leșiile caustice cu 50% NaOH. Tot pentru restrîngerea domeniului de cercetare, s-a pornit de la premiza că rezultate pozitive nu pot da decît anioniții puternic bazici, de tărie comparabilă cu a hidroxidului de sodiu.

În laborator, au fost determinate performanțele a mai multor tipuri de rășini schimbătoare de ioni puternic bazice (Amberlite IRA-400, Dowex 1 X-8, Dowex I X-4, Allarsion AQ-17, Kastel A-500, Relite 3-A).

Din fiecare rășină s-au luat cîte 50 g, s-au introdus în coloane din sticlă înalte de 60 cm și cu diametrul de 2 cm. Rășinile existente în forma R-Cl au fost trecute în forma R-OH prin tratare cu soluții pure de hidroxid de sodiu 4%. Apoi, rășinile au fost tratate cu leșii caustice de concentrații apropiate de 50% luate chiar din instalația de evaporare a fabricii de sodă electrolitică. Efluenții s-au colectat în fracțiuni de cîte 25 ml, cărora li s-a determinat conținutul în clorură de sodiu. Trecerea soluțiilor de 50% NaOH prin coloane a fost întreruptă atunci cînd conținutul de clorură de sodiu în efluenți a atins 50% din conținutul în clorură de sodiu al afluenților.

Coloanele au fost apoi regenerate cu soluții pure de 4% NaOH, regenerarea considerîndu-se terminată atunci cînd în efluenți nu mai era prezent ionul Cl^-.

Rezultatele purificării leșiilor caustice cu concentrații apropiate de 50% NaOH, folosind anioniți puternic bazici, sînt înscrise în tabela 4.

Tabela 4

Tipul rășinii	Compoziția inițială a leșiei		Cantitatea de efluent colectată pentru gradul de purificare peste 90% cm^3	Conținutul de NaCl în efluent g/l	Cantitatea de efluent colectată pentru un grad de purificare peste 50% cm^3
	Na OH g/l	NaCl g/l			
Amberlite IRA-400	730,08	16,05	300	0,50	350
Dowex 1-X8	717,6	20,43	300	0,53	350
Dovew 1-X4	717,6	20,43	250	0,43	300
Allassion AQ-17	690,1	20,43	175	0,68	250
Kastell A-500	722,4	16,9	350	0,34	425
Relite 3-A	740,22	18,38	250	0,58	300

Aceste rezultate confirmă faptul că anioniții puternic bazici au un coeficient de selectivitate mult mai mare pentru ionul Cl^- decît pentru ionul OH^-, permitînd astfel purificarea soluțiilor de hidroxid de sodiu care conțin clorură de sodiu.

Trebuie menționat faptul că, în afară de clorura de sodiu determinată, afluenții au conținut și cantități minimale de clorat, sulfat, carbonat de sodiu, care se găsesc în mod obișnuit în leșiile de 50% NaOH, provenite de la electroliza cu diafragmă. Influența acestor impurități mult mai puțin jenantă sub aspect cantitativ, n-a fost determinată, ea urmînd să fie prezentată într-o lucrare viitoare.

Deasemenea se menționează că leșiile utilizate au conținut și anumite cantități de clorură de sodiu nedizolvată, prezentă în leșiile industriale sub formă de microcristale, greu separabile. Aceasta se poate vedea din compararea compoziției leșiilor, indicate în tabela 4, cu solubilitatea în sistemul NaOH-NaCl-H_2O. [13].

Dacă se are în vedere faptul că, pentru temperatura de 20°C, leșiile experimentale conțin peste 700 g apă/l soluție, se poate admite că gradul de ionizare al clorurii de sodiu dizolvate, permite schimbul ionic conform reacției: $R—OH + NaCl \rightleftarrows RCl + NaOH$, deci eliminarea clorurii de sodiu se face prin schimb ionic.

În sprijinul acestei afirmații pledează și faptul că în experimentările făcute cu leșii mai diluate care au conținut, de exemplu, 301,79 g NaOH/l +7,91 g NaCl/l, conținutul de clorură de sodiu în 450 cm^3 de efluent colectat a fost de 0,46 g/l (pentru 50 g rășină Amberlite IRA-400).

Cu fiecare rășină s-a efectuat un număr minimum de 50 cicluri constatîndu-se că rășinile menționate au o stabilitate bună față de atacul hidroxidului de sodiu.

Dificultățile apărute în cursul experimentării rășinilor în laborator au constat în faptul că datorită vîscozității leșiilor de 50% NaOH și tasării stratului de rășină, debitele de efluenți, mai ales în timpul fazei de prificare, au fost mici.

În urma experimentărilor făcute în pilot, unde debitele au putut fi reglate în limite largi, s-a constatat că procesul de purificare decurge în condiții normale la straturi de rășină înalte de 50 cm, cu diametrul de 40 cm.

b) *Calitatea sodei caustice obținute.*

Analiza sodei caustice solide provenite de la electroliza cu diafragmă purificată prin schimb anionic este indicată în tabela 5, alături de calitatea sodei caustice impusă de instalația de celofibră și vîscoză tip Mauer (Elveția).

Din examinarea rezultatelor analitice din tabelă rezultă că puritatea sodei caustice provenită prin deshidratarea leșiei purificate în instalația cu schimbători de ioni, se încadrează în parametrii solicitați de fabricarea celofibrei și vîscozei.

Tabela 5

Nr. crt.	Conținutul de:	Prevăzut la instalația Mauer	Obținut prin purificare
1	NaOH% max.	—	—
2	NaCl% max.	0,4	0,4
3	Na_2SO_4% max.	0,2	0,08
4	Na_2CO_3% max.	0,5	0,4
5	Fe_2O_3% max.	0,002	0,0009-0,0013
6	Al_2O_3% max.	0,005	0,002
7	SiO_2% max.	0,5	0,4
8	Cu% max.	0,007	0,005-0,007
9	Mn% max.	0,002	0,0003
10	CaO + mgO max.	0,02	0,02
11	Ni% max.	0,003	0,0004
12	Pb% max.	0,002	0,0075
13	Insolubile % max.	0,003	0,002

c) *Aspectul economic.*

Pe baza rezultatelor obținute în instalația pilot, s-au determinat consumurile de materii prime, auxiliare și utilități, pe tona de sodă caustică obținută din soluția purificată prin schimb anionic.

Tabela 6

Nr. crt.	Articolul de calculație	Unitatea de măsură	Valoarea
1	Sodă caustică leșie 50% exprimată în 100% NaOH	t	1,025
2	Schimbători de ioni	Kg	0,8
3	Apă industrială	m^3	10
4	Energie electrică	Kwh	10
5	Aer comprimat	m^3	60

Calculația integrală a prețului de cost a indicat că pentru o producție de 50.000 t. sodă caustică anhidră/an. de calitate superioară, se obțin beneficii de 436,61 lei per tonă.

O asemenea instalație necesită un efort de investiții de 6.000.000 lei, recuperabili în circa 3 luni.

Evident, pentru capacități de producție mai mari, prețul de cost va fi mai redus și rentabilitatea mai mare.

Concluzii.

1. Purificarea saramurii folosită la electroliza cu diafragmă se poate realiza cu ajutorul rășinilor carboxilice, trecute în forma NaR cu ajutorul saramurii de clorură de sodiu, conținînd mici adosuri de hidroxid de sodiu, pentru favorizarea disocierii grupelor inogene ale rășinii.

2. Regenerarea cationiților se face cu soluții de 0,5% HCl, obținute integral din acid clorhidric rezidual.

3. Aplicarea procedeului de purificare, cu schimbători de ioni, a saramurii conduce la îmbunătățirea procesului de electroliză și este rentabil din punct de vedere economic.

4. Purificarea leșiilor de 50% NaOH, provenite de la electroliza cu diafragmă, se poate realiza cu ajutorul anioniților puternic bazici care au un coeficient de selectivitate mult mai mare pentru ionii Cl^- decît pentru ionii OH^-.

5. Calitatea sodei caustice solide provenite prin purificarea leșiilor produse de electroliza cu diagramă corespunde fabricării celofibrei și vîscozei.

Prin aplicarea schimbului anionic la purificarea leșiilor, procedeul de electroliză cu diafragmă devine superior procedeului de electroliză cu catod de mercur.

6. Dacă se compară condițiile de purificare a leșiilor caustice cu ajutorul amoniacului lichid, cu condițiile pe care le implică în general o instalație de purificare cu schimbători de ioni, rezultă superioritatea procedeului de purificare prin schimb ionic.

Catedra de tehnologie anorganică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Czernotzki* — Acta Chemica Hungarica, 18, 167 (1959).
2. *G. I. Volcov* Himicescaia promișlenost, 4, 103 (1593).
3. Academia Nauk CCCR — Xromatografia eë teoria i primenenie 1960 pag. 33—37.
4. Ionoobmenie sorbenti promișlennosti pag. 153—159. Academia Nauc CCCR.
5. Patent german 535.951 (1930).
6. Patent german 522.676 (1928).
7. Patent german 623.876 (1933).
8. Patent S.U.A. 2.373.257 (1924).
9. Patent S.U.A. 2.622.009 (1925).
10. Patent canadian 507.749 (1954).
11. *S. I. Fainștein. P. G. Hain, S. M. Kruglii. A. G. Simon* — „Osnovnie napravlenia tehniki proizvodstna hlova", Himicescaia Promișlenost, nr. 1 pag. 61 (1958).
12. Patent S.U.A. 2.789.036 (1957).
13. *Jean Billter* — Die tehnische Electrolyse der Nichtmetalle, pag. 386. Viena 1954.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

C.Z.: 456.49 : 661.42

IDENTIFICAREA ŞI DOZAREA PIERDERILOR DE MERCUR DE LA ELECTROLIZA CLORUREI DE SODIU *

A. IANU, GR. TEODORESCU, A. DINESCU, L. COCARGEANU

Uzinele Chimice Turda, preocupate de reducerea pierderilor de mercur în cadrul procesului de electroliză, au solicitat catedrei de Chimie anorganică şi analitică, sprijin în lămurirea punctelor unde se întîmplă aceste pierderi şi în găsirea unei metode de dozare a mercurului.

În acest scop, s-au adus de la Uzinele Chimice Turda probe din diferite puncte ale procesului de fabricaţie, ex.:

1 — apă de condensare din hidrogen
2 — saramură decantată
3 — leşie hidroxid de sodiu (pile)
4 — nămol de la decantor
5 — leşie hidroxid de sodiu (stocaj)
6 — saramură epuizată (ieşire celule)
7 — apă spălare cap celulă
8 — saramură — intrare celule.

În aceste probe s-a încercat recunoaşterea mercurului prin metodele clasice calitative, unde nu s-a obţinut nici o reacţie caracteristică ionului Hg^{2+}.

S-a încercat apoi extragerea mercurului după Irving, cu o soluţie cloroformică de dithizonă, pentru fiecare din probe şi nici pe această cale nu s-a putut pune în evidenţă prezenţa mercurului.

S-a încercat apoi punerea în evidenţă a mercurului, cromatografic. S-a folosit metoda ascendentă întrebuinţînd ca developant următorul amestec: alcool butilic, acid acetic glacial, acid clorhidric 12 N, apă în raportul:

40 : 10 : 1 : 44.

Identificarea s-a făcut prin pulverizare cu o soluţie de sulfură de amoniu în apă, 1 : 1.

Prezenţa mercurului este dovedită de apariţia unei pete negre.

Deşi s-au utilizat supraspotulări, adică repetarea, în acelaşi loc, a operaţiei de punere a spoturilor, după uscarea precedentului spot, la deve-

* Manuscris predat la redacţie la 1 decembrie 1964.

lopare și identificare s-a obținut o pată foarte slabă brună-cenușie pentru proba de apă de condensare din hidrogen, cu $R_f = 0,88$.

Pete foarte foarte slabe, de culoare brune cu $R_f = 0,86 — 0,88$ au mai fost obținute la probele de saramură decantată, nămol de la decantor și saramura epuizată. Cum indicațiile obținute prin cromatografie nu au fost categorice s-a urmărit scoaterea mercurului din complecsii cu sodiu, pentru punerea lui în evidență.

In acest scop s-au luat probe care s-au tratat cu 0,5 g clorat de potasiu și HCl 10 n și s-au ținut pe baie de apă în flacon închis pus în legătură printr-un tub de sticlă cu o eprubetă cu apă distilată, destinată să condenseze eventualele urme de clorură mercurică care ar putea fi antrenate de o degajare prea abundentă de clor.

După încetarea degajării de clor, (aproximativ 15 minute) apa din eprubetă este trecută cantitativ în flaconul cu proba și s-a îndepărtat excesul de clor cu ajutorul vidului, practic pînă la decolorarea soluției. Această operație a durat cca. 2 ore, pentru a se îndepărta ori ce urmă de clor s-au adăugat cîteva picături de soluție 2 n de sulfit acid de sodiu.

S-a procedat apoi la extracție cu eter etilic, pentru a se izola ionul mercuric ; S-au executat 3 extracții succesive. Extractele reunite s-au evaporat la cca. 37°, pînă la cîteva zecimi de ml și s-au spotulat pe hîrtie cromatografică. Acestea au fost developate ca în cazul precedent. S-au obținut rezultate identice primelor cromatograme.

Deci nici ionizarea eventualilor ioni mercurici nu a dat rezultate categorice prin cromatografie.

S-au luat apoi cîte 100 ml din fiecare probă și s-au evaporat la uscare pe baie de apă, iar rezidiile uscate au fost cercetate la spectrograf. Din toate probele analizate numai proba din apa de condensare din hidrogen a pus în evidență spectrul mercurului ; în ea s-a găsit aproximativ $1 . 10^{-2}$% Hg, în rezidu, ceea ce dă în soluție un titru de $1,8 . 10^{-6}$ g. Hg.

La toate celelalte probe nu au apărut liniile mercurului.

Pentru dozarea exactă a mercurului, în proba de apă de condensare din hidrogen s-a folosit determinarea lui fotocolorimetrică cu ajutorul dimetilaminobenzilidenrodanin-ei. Culoarea galbenă este dată de o soluție coloidală a mercurului legat de reactiv.

Pentru protejarea acestui coloid s-a folosit o soluție de gelatină 1%.

S-a utilizat următorul mod de lucru :

— s-au luat 10 ml soluție din apa de condensare din hidrogen și s-au introdus într-un balon cotat de 250 ml.

— s-a diluat pînă la cca. 200 ml. cu apă distilată

— s-au adăugat 10 ml soluție de gelatină 1%.

— s-a agitat fără a se răsturna balonul.

— s-au introdus 5 ml soluție de colorant dimetilaminobenziliden-rodanină, 0,04 g sare în 200 ml acetonă. Colorantul se introduce cu o pipetă, înmuiată adînc în probă, în porțiuni mici și sub agitare.

— s-au adăugat 10 ml HNO_3 1,5 normal

— s-a adus la semn, s-a agitat.

— s-a trecut apoi la fotocolorimetrare.

Culoarea se menține cca. 2 ore de la adăugarea soluției de reactiv.

Curba de etalonare la fotocolorimetru s-a trasat cu ajutorul unei soluții etalon de $HgCl_2$. S-a preparat o soluție de $HgCl_2$ cu un conținut de 1% mercur și din aceasta s-au luat porțiuni care s-au diluat corespunzător cu nevoile dozărilor.

Colorimetrarea s-a efectuat conform modului de lucru dat mai sus, folosind aceleași volume de gelatină, reactiv și acid azotic pentru probele cu ajutorul cărora s-a stabilit curba de etalonare.

S-au făcut în același timp, nu în zile diferite, ridicarea curbei de etalonare și dozarea probei.

Atragem atenția că rezultatele obținute nu sînt precise și perfect reproductibile decît cu condiția să fie respectată întocmai: diluția, ordinea de adăugare a substanțelor și colorimetrarea în intervalele de timp prescrise.

Folosind această metodă de dozare, s-a găsit că proba de apă de condensare din hidrogen conține 0,000002 g Hg la 1 ml, rezultat în bună concordanță cu cel obținut spectrografic.

Pentru celelalte probe, prin această metodă colorimetrică, nu s-a putut obține nici un rezultat.

S-a mai încercat reducerea cu hidrogen și cu formaldehidă a restului probelor luate în studiu cu scopul de a putea pune în evidență mercurul.

După reducere îndelungată, probele s-au acidulat puternic și s-a trecut hidrogen sulfurat. S-a căutat să se identifice mercurul.

Nu s-a obținut nici o reacție caracteristică acestuia.

In concluzie, prin metodele folosite s-a putut pune în evidență și doza pierderea de mercur la apa de condensare din hidrogen. In celelalte probe, prezența mercurului nu a putut fi pusă în evidență; posibil ca aici cantitățile de mercur să fie mult sub $2 \cdot 10^{-6}$ g Hg pe ml, așadar practic imposibil de evidențiat prin mijloacele folosite.

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *B. Lange* — Analyse colorimetrique.
2. *T. Nașcuțiu* — Cromatografia pe hîrtie a substanțelor anorganice ed. Academiei R.P.R. 1961.
3. *Clement Duval* — Traité de micro-analyse minérale. Tome III — P.S.I. Paris 1956.
4. *Gerhardt Jangg* — Die Bestimmung geringer mengen Quecksilber — Zeitschrift für Analytische Chemie 1961 Bul. 83(255—62).
5. *R. Pribil, E. Koros and L. Barcza* — Determination of mercury in mercury compounds. Pharm. Zentralhalle 100 522 — 6 (1961).
6. *F. A. Mitchenko* — Volumetric determination of mercury Farm. Zhur. (Kiev) 16 No. 3, 20—7 (1961).
7. *Joar Kobal Junior* — A new semimicro identification of mercury (I) and mercury (II) Bul. Quim. Escola Politechnica (Univ. Sao Paolo) 1960 Nr. 15.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

CHIMIA MACROMOLECULARĂ

C.Z.: 547.759.32 : 546.133.3

POLIMERIZAREA N-VINIL-CARBAZOLULUI CU SOLUŢII APOASE DE ACID PERCLORIC DILUAT *

O. F. SOLOMON, N. COBIANU, I. Z. CIUTA

Acidul percloric anhidru este cunoscut ca un catalizator eficace în polimerizarea monomerilor vinilici.

Pepper şi Reilley polimerizează stirenul cu $HClO_4$ anhidru în solvenţi cloruraţi alifatici (1), afirmînd ca polimerizarea decurge după un mecanism cationic şi că un exces mare de apă inhibă reacţia.

Analizînd comportarea la polimerizare a N-vinil-carbazolului cu percloraţi de litiu şi magneziu hidrataţi (2), am presupus că acţiunea soluţiilor diluate de acid percloric în apă trebuie să fie analoagă.

Am constatat că la concentraţii între 0,1—1% HClO, N-vinil-carbazolul polimerizează spontan.

Partea experimentală

S-a folosit acid percloric de provenienţă Merck de concentraţie 20%, care a fost diluat pînă la concentraţia sub 0,1% cu apă distilată sau cu solventul reacţiei.

Pregătirea reactanţilor s-a făcut conform metodicei folosite într-o lucrare anterioară (3).

La amestecarea soluţiei de monomer cu cea de catalizator apare o coloraţie slab-gălbenă, fapt care a mai fost semnalat şi în cazul polimerizărilor cu percloraţi (4) şi nitro derivaţi (5).

S-a lucrat cu concentraţii de monomer: 0,47, 0,76 şi 1,25 moli/l în funcţie de solventul folosit, iar ale catalizatorului: $1{,}82 \cdot 10^{-4}$ şi $1{,}82 \cdot 10^{-3}$ moli/l; temperatura de reacţie: 30°C.

Pînă la o conversie de 30—40%, reacţia decurge în mediu omogen, după care apare o opolescenţă, datorită precipitării polivinilcarbazolului. În cazul folosirii acetonei, metiletilcetonei şi acetatului de etil, polimerul s-a dizolvat în toluen, după care s-a precipitat cu metanol.

În cazul folosirii toluenului ca solvent operaţia de dizolvare nu a mai fost necesară.

*) Lucrarea a fost comunicată în sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din Bucureşti — 22—23 februarie 1964.

Pentru îndepărtarea monomerului înglobat în polimer și în acest caz, s-a recurs la extracții cu metanol la cald.

Alături de polimer s-au separat, prin cristalizare din soluția mamă, produși cristalini sub forma unor cristale aciculare cu puncte de topire de 190°—193°C.

Rezultatele experimentale

a. Rapiditatea reacției.

Reacția de polimerizare a N-vinilcarbazolului cu soluții de 0,1—1% $HClO_4$ decurge spontan cu o degajare mare de căldură, produsul de reacție precipitînd imediat.

La concentrații de catalizator mai mici de 0,1% reacția decurge cu viteză mai mică.

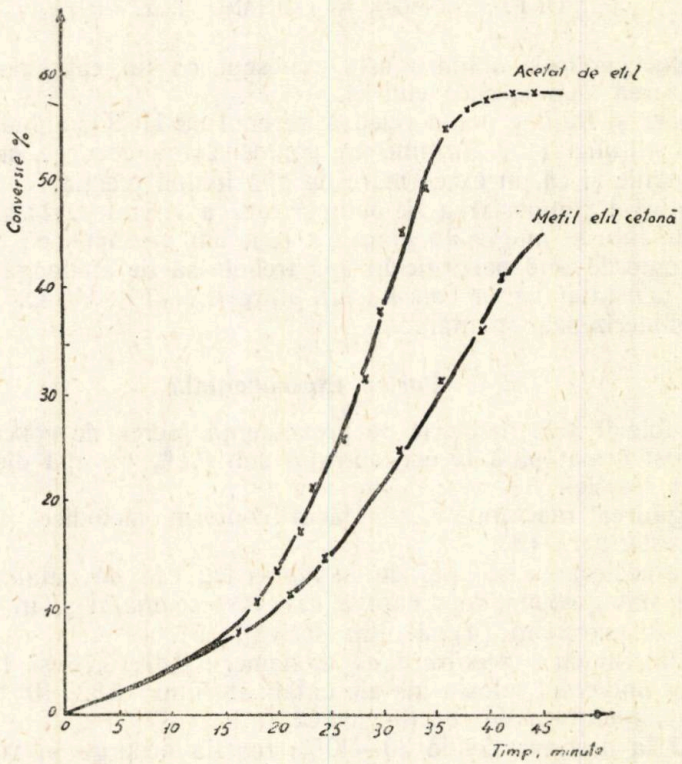


Fig. 1

b. Polimerizarea N-vinilcarbazolului cu $HClO_4$ în diferiți solvenți.

Evoluția conversiei, în cazul polimerizării N-vinilcarbazolului în acetat de etil sau metiletilcetonă în prezența $HClO_4$ diluat pentru concentrații ale monomerului de 1,25 moli/l și concentrații ale catalizatorului de $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ moli/l este dată în figura nr. 1.

Din figura nr. 1 se vede că la polimerizarea N-vinilcarbazolului cu $HClO_4$ există o perioadă inițială în care conversia crește foarte lent, urmată de o creștere rapidă pînă la o valoare unde practic devine constantă.

În general, alura acestor curbe este diferită de cea de la polimerizările cu perclorați hidratați.

Dacă polimerizarea se execută în soluție de toluen + acetonă, raport volumetric 9 : 1, temperatura 30° C, după o perioadă de inducție mică de 2—14 min, reacția are loc rapid, polimerul precipitînd imediat din mediul de reacție.

Concentrațiile de monomer cu care s-a lucrat în acest caz sînt mai mici decît în cazul precedent și anume 0,47 sau 0,76 moli/l pentru concentrații ale catalizatorului între $0{,}244 \cdot 10^{-4}$ — $4{,}42 \cdot 10^{-4}$ moli/l. Reacția decurge cu o exotermă mare. În acest caz temperatura a crescut în timp de 2′ între 4 și 10°C.

Din reprezentarea grafică a conversiei în funcție de timp pentru cazul $HClO_4$-toluen $|M| = 0{,}47$ moli/l (fig. 2) se vede că după o perioadă de inducție, de 90—120 minute polimerizarea are loc brusc.

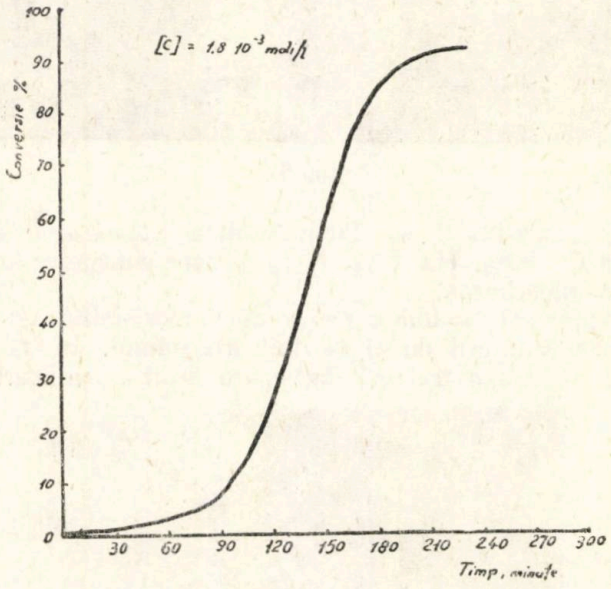


Fig. 2

C. *Caracterizarea produșilor obținuți*

Produșilor obținuți la polimerizare li s-au determinat punctele de topire, greutatea moleculară prin metoda crioscopică, folosind ca solvent benzenul și li s-a făcut analiza roentgenografică.

Aceleași determinări și analize au fost făcute și pentru produșii cristalini obținuți simultan cu polimerul.

Punctele de topire sînt între 210—214° C pentru polimeri și 190—193° C pentru produșii cristalini.

Diagrama de raze X a monomerului este reprezentată în fig. 3, iar pentru produşii cristalini obţinuţi la polimerizarea N-vinilcarbazolului cu $HClO_4$ în fig. 4.

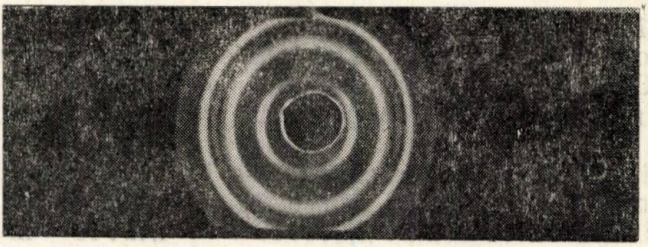


Fig. 3

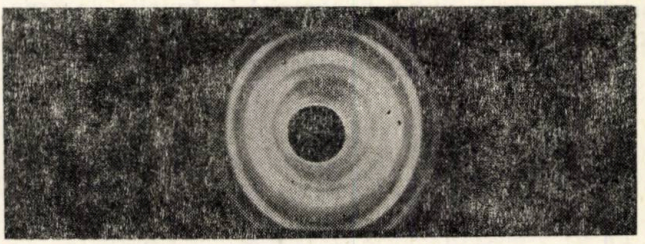


Fig. 4

Produşilor cristalini li s-a făcut analiza elementară şi s-a obţinut un conţinut de C: 82%, H: 12%, N: 7% care concordă cu valorile teoretice pentru vinilcarbazol.

Faptul că punctele de topire ale produşilor cristalini sînt 190—193°C., spectrul de raze X diferit de al N-vinilcarbazolului, iar greutatea moleculară este de două sau trei ori mai mare decît a vinilcarbazolului, iar

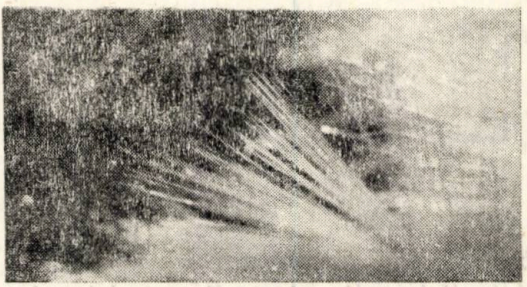


Fig. 5

compoziţia chimică identică cu cea a N.V.C. ne-a dus la concluzia că aceşti produşi cristalini sînt dimeri şi trimeri cristalini ai vinilcarbazolului, similari celor obţinuţi şi în cazul folosirii percloraţilor de Li sau Mg drept catalizatori la polimerizare. Fig. 5.

Concluzii.

Analizînd datele experimentale, se poate afirma că în reacția de polimerizare a N-vinilcarbazolului în prezența soluțiilor apoase diluate de acid percloric se pot forma și oligomeri cristalini de tipul dimerului sau trimerului N-vinilcarbazolului.

Acidul percloric diluat în soluție apoasă este ionizat sub forma ionilor $(ClO_4)^-$ $(H_3O)^+$

Monomerul care are o densitate mare de electroni π la dubla legătură reacționează după un mecanism cationic, datorită ionului de H^+ pus în libertate de acidul percloric, într-un mediu de solvenți polari (acetonă, acetat de etil, metiletilcetonă).

Mecanismul reacției de polimerizare se poate reprezenta astfel:

Reacția de inițiere:

$$(H_3O)^+ (ClO_4)^- + CH_2=\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}} \rightarrow CH_3-\overset{+}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}} \quad ClO_4^-$$

Reacția de propagare

$$C_3H-\overset{+}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}} + n(CH_2=\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}) \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-(CH_2-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_n^+ \; ClO_4^-$$

Reacția de încetare a creșterii lanțului poate avea loc prin transferul spontan al protonului.

$$1.\quad CH_3-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-(CH_2-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_{n-1}-CH_2-\overset{+}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}} \xrightarrow{-H^+}$$

$$\rightarrow \quad CH_3-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}(CH_2-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_{n-1}-CH=\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}} + (ClO_4)^-(H_3O)^+$$

sau printr-o reacție de transfer cu monomerul

$$2.\quad CH_3-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-(CH_2-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_{n-1}\,CH_2-\overset{+}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}} + CH_2=\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}} \rightarrow CH_3-\overset{+}{\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}} +$$

$$+\,CH_3-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}-(CH_2-\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_{n-1}-CH=\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}}.$$

Formarea dimerilor sau trimerilor cristalini cu aceeași structură ca și a celor obținuți la folosirea percloraților, are loc după același mecanism.

Trebuie admis că viteza reacției de încetare în cazul formării dimerilor este mai mare decît viteza reacției de creștere a lanțului.

Laboratorul de chimia compușilor macromoleculari
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *D. C. Pepper* și *P. J. Reilly* — Proc. of chem. Soc. iunie 1961 pag. 200.
2. *O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu* și *M. Georgescu* — Buletinul Institutului politehnic București. Tom. XXVII fasc. 1/1965.
3. *O. F. Solomon, I. Z. Ciută N. Cobianu* — J. of Polymer B. 2.311 1964.
4. *O. F. Solomon M. Dimonie* — J. of Polym. Sci. c. 4. 969 1964.
5. *O. F. Solomon, M. Dimonie, Tomescu M.* — Makromoleculare Chemie 56.1.1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z.: 539.3

DEFORMAȚIA ABSOLUTĂ A ȚEVII INCHISE LA CAPETE ȘI SUPUSĂ LA PRESIUNE INTERIOARĂ ȘI EXTERIOARĂ*

I. ZAMFIRESCU

1. Introducere

Printre cele mai frecvente întrebuințări ale țevilor se întîlnește și aceea în care țevile sînt solicitate la o presiune interioară, o presiune exterioară și un efort axial.

În general, studiul rezistenței unui organ de mașină constă în stabilirea modului în care variază eforturile unitare și deformațiile specifice corespunzătoare, în vederea dimensionării sau în vederea verificării dimensiunilor, după ce acestea au fost determinate.

Spre deosebire de cazul general [1] în cele ce urmează, am luat în considerație deformația absolută a țevii, care în unele împrejurări prezintă importanță deosebită și a cărei variație diferă de deformația specifică.

Într-adevăr, în cazul deformației pe direcția axei, avem

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

de unde

$$w = \int \varepsilon_z \, dz$$

în care ε_z este deformația specifică pe direcția axială, dz este lungimea elementară a unei porțiuni din țeavă pe direcția axei iar w este deformația acestei lungimi sub acțiunea unui efort axial, uniform distribuit pe secțiunea normală a țevii.

În cazul deformației specifice pe direcția razei, avem

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr} \tag{1}$$

de unde

$$v = \int \varepsilon_r \, dr \tag{2}$$

iar pe direcția tangentei

$$\varepsilon_t = \frac{v}{r} \tag{3}$$

* Manuscris predat la redacție la 10 octombrie 1964.

[1] În prezentul articol, prin deformația absolută a țevii într-un punct oarecare al peretelui său, se înțelege deplasarea acestui punct în timpul solicitării.

de unde

$$v = \varepsilon_t \cdot r \tag{4}$$

în care dv este deformația pe direcția razei, a porțiunii elementare dr din rază.

Cunoscînd pe v, cunoaștem atît deformația absolută pe direcția razei care este chiar v, cît și deformația absolută pe direcția tangentei care este $2\pi rv$.

Variațiile deformațiilor absolute v și w sînt variații ale integralelor funcțiilor ε_r și ε_t și sînt deci diferite de variațiile acestora.

Deaceea, adîncirea cunoașterii modului în care se deformează țeava solicitată în condițiile arătate, necesită mai mult decît cunoașterea deformațiilor specifice.

Din prezentul studiu va rezulta justețea acestei afirmații.

In cele ce urmează am considerat țeava închisă la capete și supusă numai la presiunea interioară p_i și presiunea exterioară p_e.

S-au presupus cunoscute formulele care dau deformațiile specifice ε_r, ε_t, pe direcția razei, respectiv tangentei.

Notațiile sînt cele obișnuite: r_i, r_e, p_i, p_e razele și presiunile interioară, respectiv exterioară, $a = \frac{r_e^2}{r_i^2}$, $u = \frac{r^2}{r_i^2}$ unde

$$a > u > 1 \quad \text{și} \quad r_e > r > r_i .$$

Expresiile mai frecvent întîlnite, ale deformației specifice pe direcția razei, sînt următoarele:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{3E\left(r_e^2 - r_i^2\right)}\left[p_i r_i^2 - p_e r_e^2 - \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2}\right] \tag{5}$$

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3E\left(r_e^2 - r_i^2\right)}\left[p_i r_i^2\left(1 - \frac{4 r_e^2}{r^2}\right) - p_e r_e^2\left(1 - \frac{4 r_i^2}{r^2}\right)\right] \tag{6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{-p_e}{3E(a-1)}\left[\frac{p_i}{p_e}\left(\frac{4a}{u} - 1\right) + a\left(1 - \frac{4}{u}\right)\right]. \tag{7}$$

Expresiile frecvent întîlnite în practică, ale deformației specifice pe direcția tangentei, sînt:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E\left(r_e^2 - r_i^2\right)}\left[p_i r_i^2 - p_e r_e^2 + \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2}\right]$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E\left(r_e^2 - r_i^2\right)}\left[p_i r_i^2\left(1 + \frac{4 r_e^2}{r^2}\right) - p_e r_e^2\left(1 + \frac{4 r_i^2}{r^2}\right)\right]$$

$$\varepsilon_t = \frac{p_e}{3E(a-1)}\,\frac{p_i}{p_e}\left[\left(1 + \frac{4a}{u}\right) - a\left(1 + \frac{a}{u}\right)\right].$$

Ținînd seama de relația (2), se obțin următoarele expresii pentru deformația absolută v, corespunzătoare expresiilor precedente ale deformației ε_r și ε_t

$$v = \frac{1}{3E(r_e^2 - r_i^2)} \left[r(p_i r_i^2 - p_e r_e^2) + \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r} \right] \tag{8}$$

$$v = \frac{r}{3E(r_e^2 - r_i^2)} \left[p_i r_i^2 \left(1 + \frac{4 r_e^2}{r^2}\right) - p_e r_e^2 \left(1 + \frac{4 r_i^2}{r^2}\right) \right] \tag{9}$$

$$v = \frac{r p_e}{3E(a-1)} \left[\frac{p_i}{p_e} \left(1 + \frac{4a}{u}\right) - a\left(1 + \frac{4}{u}\right) \right]. \tag{10}$$

Pentru a se constata diferența de variație între deformația absolută v și deformațiile specifice pe direcția razei (ε_r) și pe direcția tangentei (ε_t) am prezentat în cadrul lucrării în același timp și variația, de altfel cunoscută [7], [8], a acestor deformații specifice.

Modul de tratare al acestora este însă adaptat modului de tratare al deformației absolute, în vederea conservării unui aspect unitar al întregei lucrări.

Ca parametri variabili s-au considerat, ca și în lucrările menționate, raza r, a unui punct oarecare din peretele țevii și raportul $\frac{p_i}{p_e}$ al presiunilor care solicită țeava, care, așa cum s-a arătat, permite posibilitatea dezvăluirii întregii game de variație a deformațiilor.

2. Elemente caracteristice

2.1. *Relații între elementele deformației absolute* v

Pentru deformația absolută v, vom folosi expresia (10)

$$v = \frac{r p_e}{3E(a-1)} \left[\frac{p_i}{p_e} \left(1 + \frac{4a}{u}\right) - a\left(1 + \frac{4}{u}\right) \right].$$

Natura acestei deformații este condiționată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} v &\gtrless 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &\gtrless \frac{a(u+4)}{u+4a} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Particularizînd

$$\left.\begin{aligned} v &= 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &= \frac{a(u+4)}{u+4a} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pe fața interioară a țevii, ($r = r_i$, $u = 1$), natura deformației v este condiționată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} v &= v_i \gtrless 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &\gtrless \frac{5a}{1+4a} = \mu_3 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

care, în cazul anulării, devin

$$\left.\begin{aligned} v_i &= 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &= \mu_3 . \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Pe suprafața exterioară ($r = r_e$, $u = a$), condițiile (11) devin

$$\left.\begin{aligned} v &= v_e \gtrless 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &\gtrless \frac{4+a}{5} = \nu_3 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

iar în cazul anulării

$$\left.\begin{aligned} v_e &= 0 \\ \frac{p_i}{p_e} &= \nu_3 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Se observă că

$$\frac{a(u+4)}{u+4a} > 1 \tag{17}$$

de unde rezultă că pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, avem totdeauna $v < 0$.

Se mai observă că avem

$$1 < \mu_3 < \nu_3 . \tag{18}$$

Comparația acestor valori caracteristice ale lui $\frac{p_i}{p_e}$ se poate reprezenta grafic ca în schema de poziție din fig. 1.

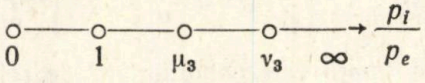


Fig. 1

Deoarece v este o funcție continuă de r, ținînd seama de cele arătate mai sus, natura sa (alungire sau scurtare, adică pozitivă sau negativă) se poate reprezenta schematic ca în Fig. 2.

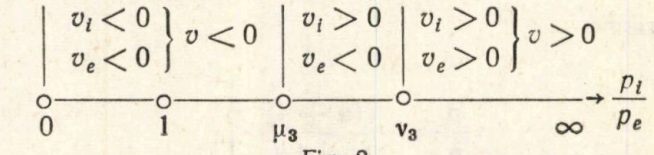


Fig. 2

2.2. *Relații între elementele funcției* $\frac{dv}{dr} = \varepsilon_r$.

Pentru derivata funcției $v(r) \equiv v(u)$ adică $\frac{dv}{dr} = \varepsilon_r$, folosim formula (7)

$$\frac{dv}{dr} = \varepsilon_r = \frac{-p_e}{3E(a-1)}\left[\frac{p_i}{p_e}\left(\frac{4a}{u}-1\right)+a\left(1-\frac{4}{u}\right)\right]$$

care, ca și v, este o funcție continuă de r.
Natura acestei funcții este condiționată de relațiile

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r \gtrless 0\\&\frac{p_i}{p_e} \leqslant -\frac{a(u-4)}{4a-u}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Pe fața interioară, aceste condiții devin

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r = \varepsilon_{ri} \gtrless 0\\&\frac{p_i}{p_e} \leqslant \frac{3a}{4a-1} = \alpha_3.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

În cazul particular al anulării, rezultă

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ri} = 0\\&\frac{p_i}{p_e} = \alpha_3\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Pentru fața exterioară, condițiile sînt

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r = \varepsilon_{re} \gtrless 0\\&\frac{p_i}{p_e} \leqslant \frac{4-a}{3} = \beta_3\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

iar în cazul anulării

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{re} = 0\\&\frac{p_i}{p_e} = \beta_3\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Se constată că

$$-\frac{a(u-a)}{4a-u} < 1 \tag{24}$$

Comparînd cantitățile α_3, β_3, 1 și 0, rezultă

$$0 < \beta_3 < \alpha_3 < 1. \tag{25}$$

Cele de mai sus conduc la schema valorilor caracteristice ale raportului $\frac{p_i}{p_e}$, dată în Fig. 3

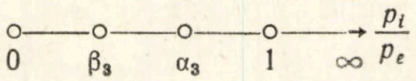


Fig. 3

Ţinînd seama de cele precedente, natura deformaţiei ε_r se poate sintetiza că în schema din Fig. 4

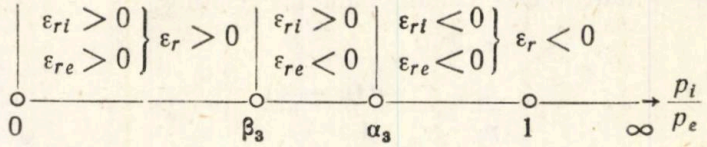


Fig. 4

2.3. *Relaţii între elementele deformaţiei specifice* ε_t.

Pentru deformaţia ε_t folosim formula

$$\varepsilon_t = \frac{p_e}{3E(a-1)}\left[\frac{p_i}{p_e}\left(1+\frac{4a}{u}\right) - a\left(1+\frac{4}{u}\right)\right]. \tag{26}$$

Avem în acest caz

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_t \gtrless 0 \\ &\frac{p_i}{p_e} \gtrless \frac{a(u+4)}{u+4a} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

şi se vede că al doilea şir de relaţii este acelaşi ca în cazul deformaţiei absolute v, (11), deoarece relaţiile (10) şi (26) nu diferă decît prin factorul r.

Celelalte caracteristici ale funcţiei ε_t sînt aceleaşi ca pentru funcţia v iar corespondenţa lor cu ε_t este dată în tabela nr. 1.

Tabela nr. 1

Corespondenţa între natura deformaţiei ε_t şi elementele sale caracteristice

ε_t	$\gtrless 0$	$=0$	$\varepsilon_{tu} \gtrless 0$	$\varepsilon_{tu} = 0$	$\varepsilon_{te} \gtrless 0$	$\varepsilon_{te} = 0$
$\frac{p_i}{p_e}$	$\gtrless \frac{a(u+4)}{u+4a}$	$= \frac{a(u+4)}{u+4a}$	$\gtrless \mu_3 = \frac{5a}{1+4a}$	$= \mu_3$	$\gtrless \nu_3 = \frac{4+a}{5}$	$= \nu_3$

Schema naturii acestei deformații rezultă, ținînd seamă de cele precedente, ca în Fig. 5.

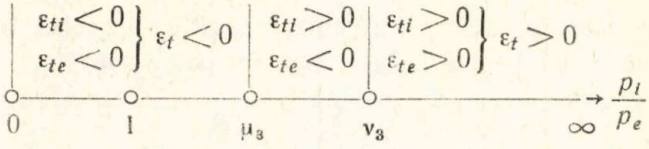


Fig. 5

2.4. *Relații între elementele funcțiilor* v, ε_t *și* ε_r.

Elementele funcțiilor v și ε_t sînt aceleași. Elementele funcțiilor v și ε_r, comparate între ele, conduc la schema din Fig. 6.

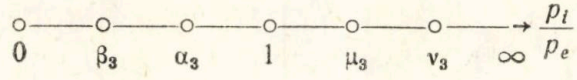


Fig. 6

3. Variația deformației absolute v.

Rezultatele obținute mai sus servesc la reprezentarea grafică. Pentru această reprezentare se folosesc și derivatele funcțiilor respective. Aceste derivate sînt următoarele:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{d\varepsilon_r}{dr} = \frac{8 a r_i^2 p_e}{3 E (a-1)} \left(\frac{p_i}{p_e} - 1 \right) \frac{1}{r^3} \tag{28}$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_r}{dr^2} = -\frac{8 a r_i^2 p_e}{E (a-1)} \left(\frac{p_i}{p_e} - 1 \right) \frac{1}{r^4} \tag{29}$$

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = -\frac{8 a r_i^2 p_e}{3 E (a-1)} \left(\frac{p_i}{p_e} - 1 \right) \frac{1}{r^3} \tag{30}$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_t}{dr^2} = -\frac{8 a r_i^2 p_e}{E (a-1)} \left(\frac{p_i}{p_e} - 1 \right) \frac{1}{r^4} \tag{31}$$

Reprezentările grafice sînt date de Fig. 7.

4. Observații și concluzii

a. Valoarea absolută cea mai mare a deformației v are loc pe fața exterioară pentru

$$\alpha_3 < p_i/p_e < \mu_3 \tag{32}$$

și este o scurtare a razei; pe fața interioară, valoarea cea mai mare are loc fie pentru $\frac{p_i}{p_e} < \beta_3$ și este tot o scurtare, fie pentru $\nu_3 < \frac{p_i}{p_e}$, cînd este o alungire.

b. Din relațiile (19) rezultă că dacă $u > 4$, raportul $\frac{p_i}{p_e}$ este negativ ceea ce nu se poate și deci ε_r nu poate fi pozitiv; în consecință, variația lui ε_r din diagrama 7 pentru $p_i/p_e < \beta_3$, nu poate avea loc.

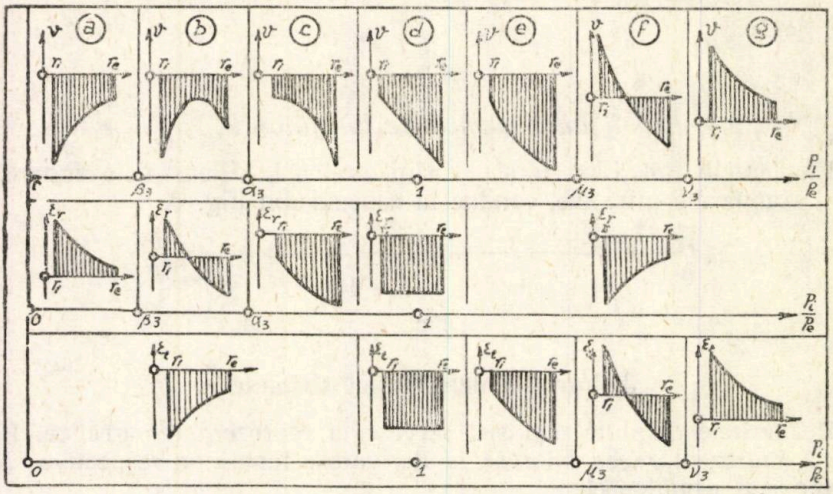


Fig. 7

Deci pentru țevile închise la capete, supuse la presiune interioară și exterioară, nu se poate obține scurtarea maximă pe fața interioară și minimă pe cea exterioară dacă dimensiunile transversale sînt legate prin relațiile

$$r_e > 2\,r_i \quad \text{sau} \quad e > r_i \tag{33}$$

unde cu e am notat grosimea peretelui țevii.

c. Deformația absolută radială v se anulează (Fig. 7f) pentru

$$u_0 = \frac{4\,a\,(p_i - p_e)}{a\,p_e - p_i} \tag{34}$$

sau

$$r_0^2 = \frac{4\,r_i^2\,r_e^2\,(p_i - p_e)}{r_e^2\,p_e - r_i^2\,p_i^2}. \tag{35}$$

Condiția de existență ($u > 1$, $r^2 > 0$) este $\frac{p_i}{p_e} < a$ și este satisfăcută, deoarece avem

$$\nu_3 < \frac{p_i}{p_e} < \nu_3 < a. \tag{36}$$

d. Deformația absolută v poate fi egală cu zero pe oricare din fețele țevii, conform relațiilor (14) și (16). Aspectul variației este arătat în Fig. 8 a, 8 c. În Fig. 8 b este arătat și aspectul general al anulării deformației.

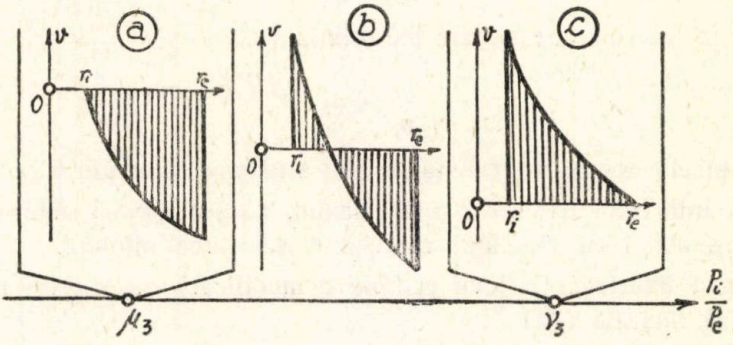


Fig. 8

e. Funcția $v(r) \equiv v(u)$ prezintă un maxim, (Fig. 7 b), pentru

$$u_m = \frac{4a\,(p_i - p_e)}{p_i - a\,p_e} = \frac{4a\left(\frac{p_i}{p_e} - 1\right)}{p_i/p_e - a} \tag{37}$$

sau

$$r_m = \frac{4\,r_i^2\,r_e^2\,(p_i - p_e)}{r_i^2\,p_i - r_e^2\,p_e}. \tag{38}$$

Condiția de existență este $\frac{p_i}{p_e} < a$ care este satisfăcută deoarece avem

$$\beta_3 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha_3 < a. \tag{39}$$

f. Valoarea maximului este

$$v_m = \frac{8\,r_e\,p_e}{3\,E\,(a-1)}\sqrt{(X-1)\,(X-a)} \tag{40}$$

în care s-a făcut notația

$$X = \frac{p_i}{p_e}.$$

g. Expresia precedentă se anulează pentru $X = 1$ și $X = a$ dar introducînd aceste valori în expresia lui u_m se găsește

$$\left.\begin{aligned} u_m &= u_0 = 0 \\ \text{și respectiv} \\ u_m &= u_0 = \infty \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

adică, practic, maximul nu poate fi egal cu zero.

h. Maximul poate avea loc pe fața interioară dacă este îndeplinită condiția (21) :

$$\frac{p_i}{p_e} = \alpha_3$$

sau pe fața exterioară, cînd are loc relația (23) :

$$\frac{p_i}{p_e} = \beta_3 .$$

În ambele cazuri, reprezentările sînt analoage celor din Fig. 9.

i. În intervalul în care v este maxim, natura acestei deformații este o scurtare astfel că maximul reprezintă scurtarea minimă.

j. Raza interioară a țevii rămîne nemodificată dacă presiunile p_i și p_e satisfac relațiile (14) :

$$v_i = 0$$

$$\frac{p_i}{p_e} = \mu_3 .$$

k. Raza exterioară a țevii nu se modifică dacă sînt satisfăcute relațiile (16)

$$v_e = 0$$

$$\frac{p_i}{p_e} = \nu_3 .$$

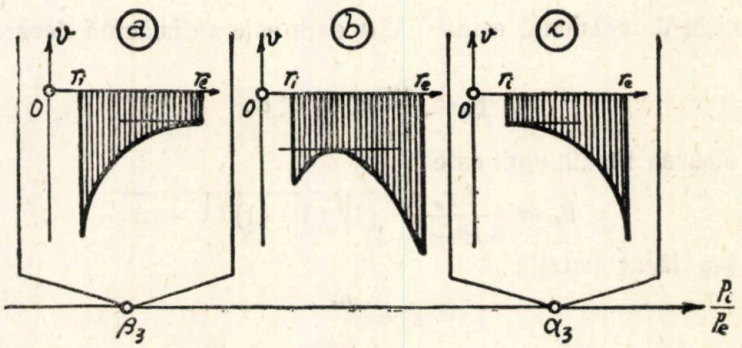


Fig. 9

5. Variația grosimii peretelui țevii

a. În cazul considerat al țevii închise, variația grosimii peretelui țevii se obține din expresiile deformației absolute pe fețele peretelui ca în tabela 2 de mai jos.

Tabela nr. 2

Expresii ale deformației absolute v și variației grosimii peretelui țevii

$v_i = \frac{1}{3E(r_e^2 - r_i^2)} [r_i(p_i r_i^2 - p_e r_e^2) + 4 r_i r_e^2 (p_i - p_e)]$
$v_e = \frac{1}{3E(r_e^2 - r_i^2)} [r_e(p_i r_i^2 - p_e r_e^2) + 4 r_i^2 r_e (p_i - p_e)]$
$\delta = v_e - v_i = \frac{p_e}{3E(r_i + r_e)} \left[r_e(4r_i - r_e) - \frac{p_i}{p_e} r_i (4r_e - r_i) \right]$

b. Din relația

$$\delta = v_e - v_i = \frac{p_e}{3E(r_i + r_e)} \left[r_e(4r_i - r_e) - \frac{p_i}{p_e} r_i (4r_e - r_i) \right] \tag{42}$$

se deduce

$$\left.\begin{aligned} &\delta \gtrless 0 \\ &\frac{p_i}{p_e} \lessgtr \frac{r_e(4r_i - r_e)}{r_i(4r_i - r_e)} = k_3 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

care, pentru cazul $p_i/p_e < k_3$, impune

$$4 r_i > r_e \tag{44}$$

și deci variația δ poate fi pozitivă, adică țeava își mărește grosimea, (Fig. 10), numai dacă razele țevii satisfac relația precedentă care se mai scrie

$$3 r_i = r_e - r_i = e$$

ce conduce la constatarea deosebit de interesantă că δ *poate fi pozitivă numai dacă grosimea peretelui țevii este inferioară triplului semicalibrului* (r_i).

Din contră, δ poate fi negativă pentru orice valori ale razelor.

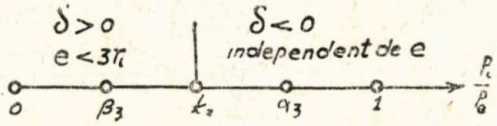


Fig. 10

Variația δ poate fi egală cu zero în condițiile

$$\left.\begin{aligned} &\delta = 0 \\ &\frac{p_i}{p_e} = \frac{r_e(4r_i - r_e)}{r_i(4r_e - r_i)} = k_3 \\ &e < 3r_i . \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Aria secțiunii transversale a peretelui țevii se micșorează totuși în acest caz cu valoarea

$$\Delta\Phi = 2\pi v e .$$

Într-adevăr, aria secțiunii transversale a peretelui țevii sub solicitare este

$$\Phi_s = \pi[(r_e + v)^2 - (r_i + v)^2] = \pi[r_e^2 - r_i^2 + 2v(r_e - r_i)] .$$

Făcînd notația

$$\Phi_0 = \pi(r_e^2 - r_i^2)$$

care este aria secțiunii înainte de solicitare, variația ariei secțiunii rezultă:

$$\Delta\Phi = \Phi_s - \Phi_0 = 2\pi v e .$$

d. În cazul țevii închise, solicitată în modul considerat, avem

$$\frac{r_e(4r_i - r_e)}{r_i(4r_e - r_i)} = k_3 < 1 . \tag{46}$$

e. Expresia variației δ este o funcție de $X = \frac{p_i}{p_e}$, liniară în raport cu X, al cărei coeficient unghiular este

$$-\frac{p_e r_i(4r_e - r_i)}{3E(r_i + r_e)} \tag{47}$$

care este totdeauna negativ și deci δ descrește cînd X crește.

f. Reprezentarea grafică este dată în Fig. 11.

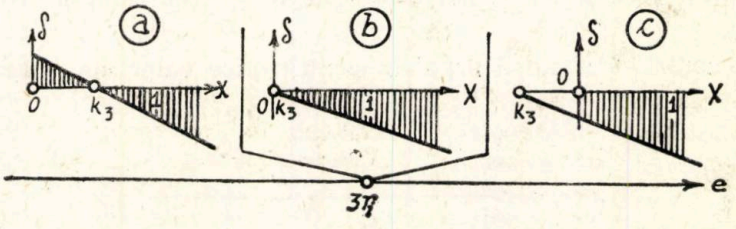


Fig. 11

g. — Dacă în expresia (42) punem condiția

$$4r_i = r_e \quad \text{sau} \quad e = 3r_i, \tag{48}$$

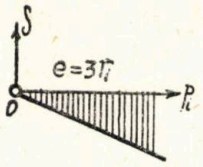


Fig. 12

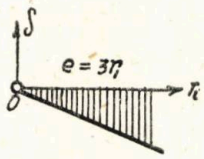


Fig. 13

se obține

$$\delta = -\frac{p_i r_i}{E} \tag{49}$$

care conduce la constatarea foarte interesantă că *în cazul țevii închise, la care avem* $e = 3r_i$, *variația grosimii peretelui țevii este totdeauna o subțiere proporțională cu calibrul* $(2r_i)$ *și cu presiunea interioară, fiind independentă de presiunea exterioară.*

Diagramele respective sînt arătate în Fig. 12 și 13.

h. Dacă $p_i = 0$, expresia (42) devine

$$\delta = \frac{p_e r_e (4r_i - r_e)}{3E(r_i + r_e)} \tag{49 a}$$

deci δ este proporțională cu p_e.

Coeficientul unghiular al dreptei $\delta(p_e)$ este pozitiv sau negativ după cum avem:

$$\left.\begin{aligned} 4r_i - r_e &\gtrless 0 \\ e &\lessgtr 3r_i \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Diagramele corespunzătoare sînt arătate în Fig. 14.

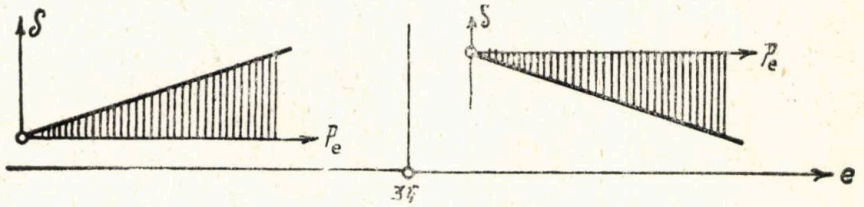


Fig. 14

i. Dacă în (49 a) facem, ca mai înainte,

$$4r_i = r_e \quad \text{sau} \quad e = 3r_i$$

atunci δ se anulează, ceea ce permite și în acest caz, concluzia foarte interesantă: *țeava închisă, la care grosimea peretelui este egală cu triplul semicalibrului, supusă numai la presiune exterioară, nu-și modifică grosimea peretelui sub acțiunea acestei presiuni adică această grosime rămîne independentă de valoarea presiunii.*

6. Concluzii finale

Din cele arătate în această lucrare, rezultă că problema deformațiilor absolute prezintă aspecte mai variate decît problema deformațiilor specifice la țeava închisă, supusă la p_i și p_e.

Aceste aspecte indică proprietăți deosebit de interesante, dintre care menționăm pe următoarele:

— scurtarea sau alungirea cea mai mare a razei țevii (v) poate avea loc în orice punct al peretelui țevii;

— valoarea sa poate fi egală cu zero în orice punct al țevii;

— curba de variație respectivă admite un extrem care nu poate fi egal cu zero;

— nu se poate realiza o astfel de solicitare, în care deformația v să fie constantă în toată grosimea peretelui țevii;

— grosimea peretelui țevii poate să nu se modifice dar peretele în întregime se deplasează, modificîndu-se aria secțiunii peretelui precum și volumul interior și exterior al țevii;

— țevile care au grosimea peretelui egală cu 3 semicalibre nu se deformează decît prin subțierea peretelui iar această subțiere este independentă de presiunea exterioară p_e ceea ce constituie, aparent, un paradox.

— dacă asemenea țevi sînt supuse numai la presiune exterioară, nu-și modifică grosimea peretelui, oricare ar fi valoarea acestei presiuni, ceea ce constituie al doilea paradox aparent.

Proprietățile de mai sus prezintă importanță teoretică căci sînt proprietăți caracteristice ale rezistenței țevii la presiune.

Importanța lor are și aspect practic căci, referindu-se la volumul interior, afectează debitul unei conducte, funcționarea unui cilindru cu piston sub presiune, etanșeitatea obturației unui tub, soliditatea legăturii dintre două tuburi etc.

Dacă ne referim la modificarea volumului exterior al țevii, importanța practică rezultă din variația de comportare mecanică față de mediul exterior în care este plasată, ca și din punct de vedere al legăturilor în prelungiri, reducții, ramificații etc.

Catedra de mecanică I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *N. M. Beliaev* — Rezistența materialelor. Trad. din limba rusă, Ed. tehnică, 1956.
2. *Gh. Buzdugan și colab.* — Curs de Rezistența materialelor, Ed. tehnică, 1957.
3. *Gh. Buzdugan și colab.* — Culegere de probleme de Rezistența materialelor, Ed. tehnică, 1955.

4. *M. M. Filonenco Borodici și colab.* — Curs de Rezistența materialelor, Trad. din limba rusă, Ed. tehnică 1952.

5. *K. E. Lerman* — Proiectarea gurilor de foc, Traducere din limba rusă, Inst. doc. Tehnice, 1950.

6. *K. D. Ponomarev și colab.* Bazele metodelor moderne de calcul în construcția de mașini, Ed. Masghiz, Moscova, 1952.

7. *I. Gh. Zamfirescu* — Unele aspecte ale rezistenței țevilor, Buletinul Institutului politehnic București, pag. 113 Nr. 6/1963.

8. *I. Gh. Zamfirescu* — Alte aspecte ale rezistenței țevilor, Buletinul Institutului politehnic București, Nr. 3/1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

TERMOTEHNICĂ

FORSCHUNGSMITTEILUNGEN DES LEHRSTUHLES
„TERMOTEHNICA ȘI MAȘINI TERMICE"

C.Z.: 621.1.01

IV

KREISSPROZESSE DIE MIT ENDLICHER GESCHWINDIGKEIT DURCHLAUFEN WERDEN *

L. STOICESCU, S. PETRESCU

In einer früheren Arbeit [1]) schlugen wir einen neuen Ausdruck für den ersten Grundsatz der Thermodynamik vor, der durch Vermittlung eines Faktoren, $\delta_m = (1 \pm aw/c)$, der Irreversibilität von Vorgängen die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden, Rechnung trägt; wir benannten ihn *„augenblicklicher Faktor der Irreversibilitäts-Entstehung"*. Sein realer Eingriff in die Irresversibilität dieser Vorgänge hängt mit dem Gesetz der Zustandsänderung, mit der Bewegung des Kolbens und mit der mittleren Molekelngeschwindigkeit zusammen.

Aus dem neuen Ausdruck des ersten Grundsatzes, indem wir die Bedingungen auferlegen, die den Thermodynamischen Zustandsänderungen eigen sind, ergeben sich, nach der Integration der sie darstellenden Differentialgleichng, die Gesetze der irreversiblen Adiabate, Polytrope, Isotherme, Isobare [2]). Im Laufe der Integration wird bei der Adiabate aus dem augenblicklichen Faktor der Irreversibilitäts-Entstehung δ_m ein Irreversibilität kumulierender Faktor der Adiabate:

$$\delta = \left[\frac{1 \pm \frac{aw}{c_1}}{1 \pm \frac{aw}{c_2}}\right]^2 .$$

Dieser wird so genannt, da er die unter Paragraph 1—5 (siehe unten 2) angegebenen Verluste erfasst (Reibungsverluste ausgeschlossen).

---

* Diese Arbeit lief bei der Redaktion am 17-ten Oktober 1964 ein,

[1] Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu — Der erste Grundsatz der Thermodynamik für tehnische Prozesse die mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Stromung verlaufen. — Buletinul Institutului politehnic București nr. 5 — 1964.

[2] Siehe: Die gleichen. Thermodynamische Zustandsänderungen, u. so w. Buletinul Institutului politehnic București nr. 6 — 1964. — Gleichungen 41, 44, 44 a, 115, 116, 117.

Mittels erwähnter Gleichungen [2], können alle den Kreisprozess darstellenden irreversiblen Zustandsänderungen punktweise konstruiert werden. Man erhält so den irreversiblen mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Kreisprozess, dessen thermischen Wirkungsgrad η_{tir} wir berechnen wollen. Dieser muss, wie wir wissen, kleiner als der tehrmische Wirkungsgrad η_{tr} des reversiblen Kreisprozesses sein. Dabei nehmen wir uns vor η_{tir} als Funktion von η_{tr} festzustellen.

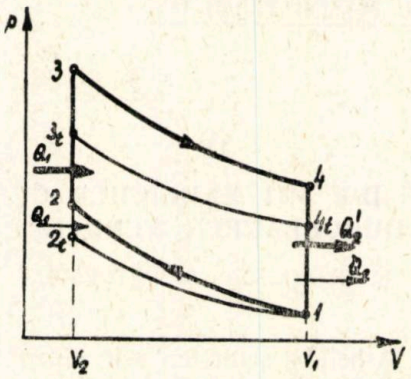


Fig. 1

Der betrachtete reversible Kreisprozess (Abb. 1) bestehe z.B. aus den folgenden reversiblen Zustandsänderungen: adiabate Verdichtung $1-2_t$, isochore Verbrennung 2_t-3_t, adiabate Ausdehnung 3_t-4_t, isochore Gasentladung 4_t-1. Dem reversiblen mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Kreisprozess $1\ 2_t\ 3_t\ 4_t$ entspricht der irreversible 1 2 3 4 dessen Zustandsänderungen 1 2 und 3 4 irrevesible mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufene Adiabaten sind. Es handelt sich also um den Ottoprozess wie auch um einen Gleichraum-Dieselprozess im p, V Schaubild, die mit endlicher Geschwindigkeit stattfinden. Von 1 ausgehend, werden die irreversiblen Zustandsänderungen punktweise konstruiert, wobei man den irreversiblen Kreisprozess 1-2-3-4 erhält. Wir nehmen auch an, dass die Warmezufuhr Q_1, für beide Prozesse (reversibel, und irreversibel), die gleiche ist. Definitionsgemäss

$$\eta_{tr} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \tag{1}$$

$$\eta_{tir} = 1 - \frac{|Q_2'|}{Q_1} \tag{2}$$

Die klassische Thermodynamik gibt, für den reversiblen Kreisprozess,

$$\eta_{tr} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \tag{3}$$

an. ε = Verdichtungsgrad $= \frac{V_1}{V_2}$ (Abb. 1), für beide Kreisprozesse gleich.

[2] Siehe Seite 1, unten.

Um den Ausdruck des thermischen Wirkungsgrades des irreversiblen Kreisprozesses zu bestimmen, müssen wir die entsprechende Wärmezu- und-abfuhr berechnen (Q_1, Q_2'). Dazu brauchen wir die Temperaturen T_1, T_2, T_3, T_4 in 1, 2, 3, 4 (Abb. 1). Gegeben sind: T_1, ε, 1—2 = irreversible, 1—2 = reversible Verdichtungsadiabate. Nach Gleichung 41, für Verdichtung (Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu — „Thermodynamische Zustandsänderungen....., Gleicung 41, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti — nr. 6 — 1964), *im Punkt 2*,

$$T_2 = \delta_c T_1 \varepsilon^{k-1} = \delta_c T_{2_t}, \tag{4}$$

worin

$$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} \text{ und } T_{2_t} = T_1 \varepsilon^{k-1}$$

T_{2_t} = Temperatur im Endzustand der adiabaten reversiblen Verdichtung;

$$\delta_c = \left[\frac{1 + \frac{aw}{c_1}}{1 + \frac{aw}{c_2}}\right]^2 = \text{Irreversibilität kumulierender Faktor der Verdichtungs-Adiabate;}$$

c_1 = mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln im Anfangszustand 1.

c_2 = mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln im Endzustand 2.

w = konstante Kolbengeschwindigkeit

$w = a_1 w_{med}$, wenn die Kolbengeschwindikgeit veränderlich ist.

(Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu — „Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher veränderlicher Geschwindigkeit... Buletinul Institutului politehnic Bucureşti Nr. 1 1965).

a = Koeffizient des Irreversibilität bestimmenden Verhältnisses w/c_{med} *

Im Punkt 3. Mit Bezug auf Abb. 1, ergibt sich für T_3:

$$\lambda = \frac{p_{3_t}}{p_{2_t}} = \frac{T_{3_t}}{T_{2_t}} \tag{5}$$

$$\lambda' = \frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2} \tag{6}$$

$$T_3 = \lambda' T_2 = \lambda' \delta_c T_{2_t}. \tag{7}$$

Da die Wärmezufuhr Q_1 für beide Kreisprozesse die gleiche ist,

$$G(T_3 - T_2) c_v = G(T_{3_t} - T_{2_t}) c_v$$

$$T_2(\lambda' - 1) = T_{2_t}(\lambda - 1). \tag{8}$$

---

* L. Stoicescu u. S. Petrescu — Erster Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse die mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti 1964, Nr. 5.

Mit Rücksicht auf (4):

$$\frac{T_2}{T_{2t}} = \frac{\lambda - 1}{\lambda' - 1} = \delta_c \; ; \tag{9}$$

es ergibt sich also

$$\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\delta_c} + 1 \; . \tag{10}$$

Im Punkt 4. Indem wir Gleichung (41) (Thermod. Zustandsänderungen... Bul. Inst. politehnic Bucureşti nr. 6 — 1964), benützen, erhailten wir allmählich:

$$T_4 = T_3 \delta_a \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} = T_3 \delta_a \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = T_{2t} \lambda' \delta_c \delta_a \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \; . \tag{11}$$

$$T_4 = T_1 \varepsilon^{k-1} \lambda' \delta_c \delta_a \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} = T_1 \lambda' \delta_c \delta_a \; , \tag{12}$$

worin

$$\delta_a = \left[\frac{1 - \frac{aw}{c_3}}{1 - \frac{aw}{c_4}}\right]^2 = \text{Irreversibilität kumulierender Faktor bei adiabater}$$

Entspannung.

c_3 = mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln im Anfangszustand 3.

c_4 = mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln im Endzustand 4.

a und w haben dieselbe Bedeutung wie im Falle der Verdichtung, für δ_c.

Nun ergeben sich die Wärmezu-und-abfuhr, Q_1 und Q_2' wie es folgt:

$$|Q_2'| = G c_v (T_4 - T_1) = G c_v T_1 \left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right) = c_v T_1 G (\lambda' \delta_c \delta_a - 1) \tag{13}$$

$$Q_1 = G c_v (T_{3t} - T_{2t}) = G c_v T_{2t} \left(\frac{T_{3t}}{T_{2t}} - 1\right) = G c_v T_1 \varepsilon^{k-1} (\lambda - 1) \tag{14}$$

Mit Bezug auf (2), ergibt sich, für den thermischen Wirkungsgrad des irreversiblen Kreisprozesses:

$$\eta_{tir} = 1 - \frac{|Q_2'|}{Q_1} = 1 - \frac{\lambda' \delta_c \delta_a - 1}{\varepsilon^{k-1} (\lambda - 1)} = 1 - \frac{\left(\frac{\lambda - 1}{\delta_c} + 1\right) \delta_c \delta_a - 1}{\varepsilon^{k-1} (\lambda - 1)} \tag{15}$$

$$\eta_{tir} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \left[\delta_a + \frac{\delta_a \delta_c - 1}{\lambda - 1}\right] . \tag{16}$$

Da die Klammer dieser Gleichung immer grösser wie 1 ist,

$$\eta_{tir} < \eta_{tr} \; . \tag{17}$$

Irreversibilitätszahl eines gegebenen Kreisprozesses, $\eta_{irev.}$

Gleichung (16) ermöglicht die Bestimmung einer die Irreversibilität schätzende Grösse $\eta_{irev.}$, wenn man δ_c und δ_a als Funktion vom Verdichtungs- bzw. Ausdehnungsgrad (ε) ausdrückt. Kennzeichnend für die Irreversibilität sind die Parameter der Bewegung c und w, die Parameter des Kreisprozesses ε und λ, sowie die Gasart (durch k = adiabater Exponent). In (Paragraph 1.5) einer unserer Arbeit (siehe: Thermodynamische Zustandsänderungen... Buletinul Institutului politehnic Bucureşti Nr. 6 — 1964) sahen wir, dass man, mit genügender Annäherung, für die irreversible Adiabate,

$$\delta_a = \left[\frac{1 - \frac{aw}{c_3}}{1 - \frac{aw}{c_4}}\right]^2 \approx 1 + \frac{2aw}{c_3}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1\right) \tag{18}$$

annehmen kann, worin die mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln

$$c_3 = \sqrt{\frac{3KT_3}{m}} = \sqrt{3gRT_3} \tag{19}$$

ist. Aus (7) erhält man

$$T_3 = \lambda' \delta_c T_{2_t} .$$

Da

$$T_{2_t} = T_1 \varepsilon^{k-1}$$

und aus (10)

$$\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\delta_c} + 1 ,$$

ergibt sich

$$T_3 = \left(\frac{\lambda - 1}{\delta_c} + 1\right) \delta_c T_{2_t} = [(\lambda - 1) + \delta_c] T_1 \cdot \varepsilon^{k-1} . \tag{20}$$

Man setzt T_3 in (19) ein und so erhält man

$$c_3 = c_1 [(\lambda - 1) + \delta_c] \varepsilon^{\frac{k-1}{2}} . \tag{21}$$

Somit, mit Rücksicht auf (18), ergibt sich der Irreversibilität kumulierende Faktor der adiabaten Ausdehnung:

$$\delta_a = 1 + \frac{2aw}{c_1} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1}{[(\lambda - 1) + \delta_c]^{1/2} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{2}}} . \tag{22}$$

Dem oben erwähnten Paragraphen 1.5 einer unserer Arbeit (Zeitschrift nr. 6 — 1964), entnehmen wir den Ausdruck

$$\delta_c = \left[\frac{1+\frac{aw}{c_1}}{1+\frac{aw}{c_2}}\right]^2 \approx 1 + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \tag{23}$$

des Irreversibilität kumulierenden Faktors den wir in die Klammer der Gleichung (22), einsetzen, wonach diese folgende Form annimmt;

$$D_1 = [(\lambda - 1) + \delta_c]^{-\frac{1}{2}} = \left[\lambda + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lambda^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{2aw}{\lambda c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$D_1 = \lambda^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2aw}{\lambda c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) + \dots\right]. \tag{24}$$

Damit ändert sich die Form der Gleichung (22), wobei wir auch die Faktoren zweiter Potenz beseitigen, folgendermassen:

$$\delta_a = 1 + \frac{2aw}{c_1}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right). \tag{25}$$

Somit ist das Produkt $\delta_a \cdot \delta_c$ durch (23) und (25) bestimmt, und zwar:

$$\delta_a \cdot \delta_c = \left[1 + \frac{2aw}{c_1}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\right]\left[1 + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\right]$$

$$\delta_a \cdot \delta_c \approx 1 + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + 1\right) + \dots \tag{26}$$

Wir kommen jetzt auf (16) zurück:

$$\eta_{tir} = 1 - \frac{\delta_a + \frac{\delta_a \cdot \delta_c - 1}{\lambda - 1}}{\varepsilon^{k-1}} = 1 - \frac{X}{\varepsilon^{k-1}} \tag{27}$$

worin

$$X = 1 + \frac{2aw}{c_1} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) + \frac{1 + \frac{2rw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}} + 1\right) - 1}{\lambda - 1}$$

$$X = 1 + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \cdot \frac{\lambda^{1/2} + 1}{\lambda - 1}. \tag{28}$$

Nach Einsetzen von (28) in (27), erhalten wir schliesslich den thermischen Wirkungsgrad des irreversiblen Kreisprozesses:

$$\eta_{tir} = 1 - \frac{1 + \frac{2aw}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2} - 1}}{\varepsilon^{k-1}}, \tag{29}$$

oder

$$\eta_{tir} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\right)\left[1 - \frac{2aw}{c_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)\left(\lambda^{1/2} - 1\right)}\right] = \eta_{tr} \cdot \eta_{irev} \tag{30}$$

wobei

$$\eta_{irev} = 1 - \frac{2aw}{c_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)\left(\lambda^{1/2} - 1\right)} \tag{31}$$

die Irreversibilitätszahl ist. Diese ist immer kleiner wie 1, wenn die Geschwindigkeit w grösser wie Null ist. Wenn Reversibilität zulässig, d. h. $w = 0$, ergibt sich $\eta_{irev} = 1$ und $\eta_{tir} = \eta_{tr}$. Es wird dabei festgestellt dass es eine maximale Geschwindigkeit w_{max} gibt, und zwar

$$w_{max} = \frac{c_1}{2a}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\lambda^{1/2} - 1\right), \tag{32}$$

für welche die Irreversibilitätszahl Null ist, also $\eta_{tir} = 0$.
Wird der Kreisprozess mit einer solchen Geschwindigkeit durchlaufen, ist er nicht mehr Arbeiterzeugend. Diese Feststellung bestätigt die Grundlagen des neuen von uns aufgestellten mathematischen Ausdruckés des ersten Grundsatzes der Thermodynamik und veranlasst uns den eingeschlagenen Weg zur Ausarbeitung einer Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in den thermischen Maschinen weiter zu beschreiten.

Im Falle der Kolbenmaschinen mit veränderlicher Kolbengeschwindigkeit (siehe unsere in Nr. 1 — 1965 erschienene Arbeit), ergibt sich die mittlere maximale Geschwindigkeit aus:

$$w_{med\ max} \cdot a_1 = w_{max} \tag{33}$$

also

$$w_{med\ max} = \frac{c_1}{2\,a\,a_1}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)\cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{2}}\,(\lambda^{1/2} - 1). \qquad (34)$$

Wie uns Gleichung (31), zeigt, die Irreversibilitätszahl (η_{irev}) ändert sich linear mit der Geschwindigkeit w, wenn Verdichtungs-oder Ausdehnungsgrad ε, adiabater Exponent k, und Druckverhältins der Isochoren λ konstant bleiben (Abb. 2).

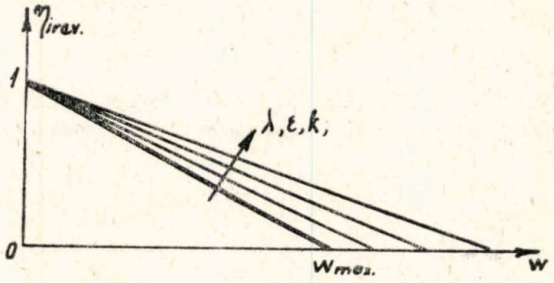


Fig. 2

Zahlenbeispiel

Es soll $w_{max\,med}$ und η_{irev} für einen Ottoprozess, unter folgenden Voraussetzungen, bestimmt werden:

Verdichtungsgrad $\varepsilon = 7$
Druckverhältins $\lambda = 3$
Mittlere Geschwindigkeit der Gasmolekeln $c_1 = 500$ m/s.
Koeffizient $a = 4{,}24$ *
Abweichungszahl $a_1 = 1{,}15$
Adiabater Exponent $k = 1{,}4$
Diese Werte werden in (34) eingesetzt. Also:

$$w_{max\ med} = \frac{500}{2\cdot 4{,}24\cdot 1{,}15}\left(7^{\frac{0{,}4}{2}} + 1\right)7^{\frac{0{,}4}{2}}\cdot\left(3^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 135\ \text{m/s}$$

$$w_{max\ med} = 135\ \text{m/s}.$$

Nun wollen wir η_{irev} in der Voraussetzung bestimmen dass die mittlere Kolbengeschwindigkeit zwischen Null und 135 m/s liegt, und zwar: $w_{med} = 20$ m/s.
Wir benützen (31), wo wir $w = a_1 w_{med}$ sinsetzen. Also:

$$\eta_{irev} = 1 - \frac{2\,a\,a_1\,w_{med}}{c_1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} + 1\right)\left(\lambda^{\frac{1}{2}} - 1\right)}$$

$$\eta_{irev} = 1 - \frac{2\cdot 4{,}24\cdot 1{,}15\cdot 20}{500}\cdot\frac{1}{7^{\frac{1}{5}}\left(7^{\frac{1}{5}} + 1\right)\left(3^{\frac{1}{2}} - 1\right)} = 0{,}852.$$

Für $w_{med} = 10$ m/s, findet man $\eta_{irev} = 0{,}926$.

* Unseren letzten theoretischen Ergebnissen gemäss $a = 4{,}05$.

Für die oben angeführten Werte von ε, λ, c_1 a, a_1, k, können die Werte η_{irev}, für verschidene zwischen Null und $w_{max.med}=135$ m/s liegende Geschwindigkeiten w, dem Diagramm Abb 3 entnommen werden.

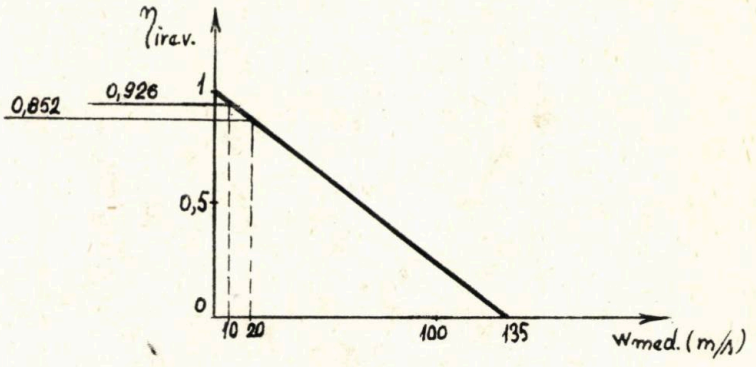


Fig. 3

Schlussbemerkung. Der neue Ausdruck des ersten Grundsatzes für irreversible Prozesse, ermöghichte uns die Gleichungen der irreversiblen Zustandsänderungen sowie den Ausdruck des thermischen irreversiblen Wirkungsgrades eines Kreisprozesses aufzustellen. Gleichung 30 ist derart aufgebaut dass sie zugleich auch einen Vergleich der beiden irreversiblen und reversiblen Wirkungsgrade zum Ausdruck bringt. Ebenso berechtigt sie die Einführung einer neuen Grösse η_{irev} die wir Irreversibilitätszahl benennen wollen. Sie ist im Einklang mit allen unseren bisherigen Anschauungen über die Grundlagen einer neuen technischen Thermodynamik der thermischen Maschinen.

Der thermische reversible Wirkungsgrad ist den thermischen Maschinen wesensfremd, denn wo er auftritt hört der Kreisprozess auf (da $w=0$), er ist also eine Endstation des Geschehens in den thermischen Maschinen und darum ungerecht streng als Gütegrad des Prozesses. Man sollte sich also nach der Irreversibilitätszahl η_{irev} richten, und w, ε, λ derart annehmen dass sie der Einheit zustrebt.

Lehrstuhl für Thermotechnik
und thermische Maschinen
Politechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bukarest

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

C.Z.: 621.1.01

V

EXPERIMENTALE ÜBERPRÜFUNG DES NEUEN AUSDRUCKES DES ERSTEN GRUNDSATZES, FÜR THERMODYNAMISCHE PROZESSE MIT ENDLICHER GESCHWINDIGKEIT *

L. STOICESCU, S. PETRESCU

Es ist nicht möglich, auf direckte Wege, die experimentale Überprüfung der Richtigkeit des neuen Ausdruckes des ersten Grundsatzes [1], für Prozesse mit endlicher Entwiklungs - Geschwindigkeit, zu bewerkstelligen. Wir können aber die Folgen, die sich daraus ergeben, quantitativ berechnen und experimental, durch Messungen, feststellen. Wenn die sich rechnerisch ergebenden mit den gemessenen Folgen übereinstimmen so spricht das für die neue, die irreversiblen Vorgänge in den thermischen Maschinen kennzeichnende Form des ersten Grundsatzes.

Diesem Vorsatz gemäss unternahmen wir die Richtigkeit der Gleichung der irreversiblen Adiabate, die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird [2], experimental zu überprüfen.

Ein solcher Versuch ist grundsätzlich leicht aufzufassen: es wird ein Gas vom Anfangsvolumen V_1 auf das Endvolumen V_2 verdichtet, wobei die Endtemperatur T_2 gemessen wird. Diese sollte mit der sich rechnerisch aus der Gleichung der irreversiblen Adiabate ergebenden übereinstimmen. Is das der Fall, so hat die fragliche Gleichung ihre Richtigkeit, sowie der neue von uns bewiesene Ausdruck des ersten Grundsatzes für irreversible Vorgänge, die in den thermischen Maschinen stattfinden. In einem solchen Versuch ist die Schwierigkeit eine Verdichtungsadiabate zu erhlaten, wesentlich.

---

* Vorhandene Arbeit lief bei der Redaktion am 17-ten Oktober 1964 ein.

[1] Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu — Erster Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse die mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung varlaufen — Buletinul Institutului politehnic Bucureşti Nr. 5 — 1964.

[2] Siehe: Dieselben — Thermodynamische Zustandsänderungen mit endlicher konstanter Geschwindigkeit. — Buletinul Institutului politehnic Bucureşti Nr. 6 — 1964.

Unter den mannigfaltigen Schwierigkeiten des Versuches nennen wir die Erreichnung einer vollkommenen Kolbenverdichtung und die Ausschliessung seiner Reibung, da diese den Einfluss der Geschwindigkeit verfälschen kann. Diese Schwierigkeiten zwangen uns den Kolben durch eine Membran zu ersetzten.

Die Aufschluss gebenden Versuche konnten wir, bis jetzt, nur auf Grund der Tatsache erzielen, dass die irreversible adiabate Ausdehnung einer komprimierten Gasmenge oberhalb der irreversiblen Verdichtungsadiabte zu liegen kommt (wenn die Gasmenge gleichbleibt), wie in Abb. 1 und 2 zu sehen ist.

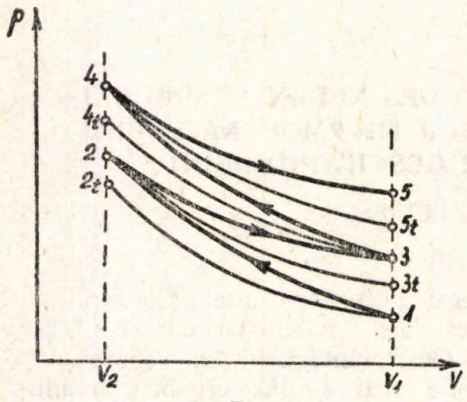


Fig. 1

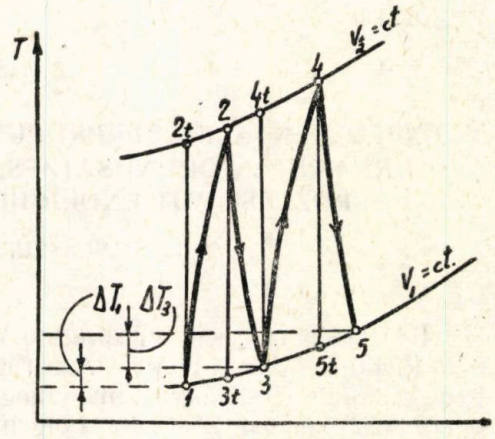


Fig. 2

(siehe unsere Arbeit Nr. 6 — 1964 — Der Grundsatz der adiabaten Erreichbarkeit der irreversiblen Vorgänge).

In diesen Abbildungen sind: $1—2_t$ die reversible, 1—2 die irreversible Verdichtungsadiabate, während $2—3_t$ die reversible, 2—3 die irreversible Entspannungsadiabate. Bei jedem Doppelhub, d.h. in 1, 3, 5, 7 ..., der Druck und die Temperatur sind grösser wie bei dem vorangehenden:

$$T_1 < T_3 < T_5 < T_7 < T_9 \ldots$$

Da $\Delta T_1 \approx \Delta T_3 \approx \Delta T_5 \ldots$ ergibt sich, nach „n" Umdrehungen, eine Temperaturzunahme ΔT_{tot}, von der Anfangstemperatur T_1 auf T_{2n+1}, vie folgend:

$$T_{2n+1} - T_1 = \Delta T_{tot} = n \cdot \Delta T_r .$$

Darin T_{2n+1} = Gastemperatur nach n nacheinander folgenden Kompressionen und Ausdehnungen (vobei sich die Membran in der Anfangsstellung befinden muss).

Ebenso ΔT_{tot} = Gesamteffekt für n Umdrehungen und ΔT_r = spezifischer Effekt (pro Umdrehung).

Folglich, indem sich aus der Differenz der ersten und letzten gemessenen Temperatur ΔT_{tot} ergibt, kann, durch Division mit den in der Zeitdauer zwischen der ersten und letzten Temperaturmessung erfolgten Umdrehungen, ΔT_r erhalten werden. Damit ergibt sich die Endtemperatur T_3 der irreversiblen adiabaten Ausdehnung 2—3, aus $T_3 = T_1 + \Delta T_r$. Diese muss mit der sich aus der Gleichung der irreversiblen adiabaten Entspannung 2—3 ergebenden Temperatur T_3 übereinstimmen. Zu bemerken ist, dass die Temperatur T_2 aus der Gleichung der irreversiblen adiabaten Verdichtung 1—2 auszurechenen ist.

Diese Vorgangsweise schliesst eine Reihe von Mängeln aus, die vom Kolben herrühren, und zwar:

— Die Messung findet nicht bei hoher Temperatur statt, da nicht T_2 sondern die Temperatur T_{2n+1} gemessen wird, die in der Nähe der Umgebungstemperatur T_1 liegt.

— man kann mit einem sehr kleinen spezifischen Effekt arbeiten, da die Möglichkeit gegeben ist die Versuchszeit zu verlängern und damit die Gesamtzahl der Umdrehungen n grösser werden zu lassen; zugleich mit n, *wird auch* ΔT_{tot} gross genug um messbar zu sein.

Das bedeutet so viel, dass weder unannehmbar grosse Geschwindigkeit, noch übermässig grosse Verdichtungsgrade erzielt werden müssen. Damit fallen die Vorrichtungen, im Bau und Betrieb, einfacher aus.

Abb. 3 stellt das Schema einer Anlage dar die uns zur Überprüfung der Übereinstimmung unserer Ableitungen mit dem wahren Tatbestand diente. Eine elastische Membran, wie wir scoh oben erwähnten, ermöglicht die Kompression und die Ausdehnung.

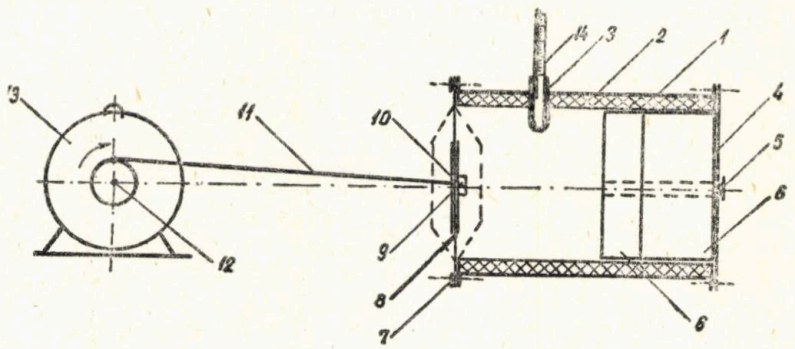


Fig. 3

1 = metallischer Zylinder;
2 = Asbest;
3 = Thermometerhülse;
4 = Deckel;
5 = Pfropfen;
6 = wechselbarer Holzzylinder zur Veränderung des Kompressionsgrades;
7 = Flanschbefestigung;
8 = Membran;
9 = Verstärkung;
10 = Mutter;
11 = Pleuelstange;
12 = Exzenter;
13 = Elektrischer Motor;
14 = Thermometer.

1. *Die Durchführung der Versuche.*

Nach Einführung des Arbeitsgases (Luft), wird der Zylinder mit dem Pfropfen 5 dicht verschlossen. Dabei muss die Membranstellung die abgebildete sein. Man wartet bis das Gas die Temperatur der Umgebung annimmt. Das ist nur dann möglich wenn die ganze Anlage dieselbe Temperatur besitzt (T_1).

Der Motor wird angelassen, wobei die Membran sich zwischen den gestrichelten Stellungen (Abb. 3) hin und her bewegt; dabei wird das Gas komprimiert und entspannt. Nach einer gewissen Zeit, Δt, wird der Motor abgestellt und die Temperatur abgelesen. Gleich danach nimmt diese auf T'_{2n+1} zu, bleibt dann 30 bis 60 Sekunden konstant, um dann langsam abzunehmen. Dieses Temperaturverhalten deuten wir folgendermassen:

Im Betrieb befindet sich das Gas nicht im Temperatur-Gleicgewicht mit der metallischen Thermometerhülse. Bei der Abstellung, ist die Gastemperatur groösser wie die der metallischen, nicht-isolierten Thermometerhülse und Membran. Infolgedessen setzt die Wärmeabgabe an sie rasch fort, bis zum Egalisieren, wonach der Wärmeaustausch des Ganzen mit der Umgebung allmählich einsetzt und sehr langsam vor sich geht, da (mit Ausnahme der Thermometerhülse und der Membran) alles isoliert ist.

Die Versuche wurden bei zwei Verdichtungsgraden (ε_1 und ε_2) und bei zwei verschiedenen Umdrehungszahlen (n' und n") durchgeführt, derart dass sich bei einer Versuchsdauer von 30 Sek, (Tabelle 1), die entsprechenden Werte ($\Delta T'_{tot_1}$, $\Delta T'_{tot_2}$ und $\Delta T''_{tot_1}$, $\Delta T''_{tot_2}$) des Gesamteffektes ergaben:

Tabelle 1

Gesamteffekt in Graden = $\Delta T_{tot\ exp.}$

n \ ε	$\varepsilon_1 = 1{,}155$	$\varepsilon_2 = 1{,}118$
$n' = 2860$	0,8	0,53
	0,86	0,5
	0,86	0,56
	0,84	0,52
Mittel	$\Delta T'_{tot_1} = 0{,}84$	$\Delta T'_{tot_2} = 0{,}528$
$n'' = 1460$	0,22	0,13
	0,21	0,12
	0,2	0,15
	0,21	0,14
Mittel	$\Delta T''_{tot_1} = 0{,}21$	$\Delta T''_{tot_2} = 0{,}135$

Mit Bezug auf die Zeitdauer von 30 Sek, erhält man Tabelle 2.

Tabelle 2

Spezifischer Effekt in Graden $= \Delta T_{r.\,exp.}$

ε / n	$\varepsilon_1 = 1{,}155$	$\varepsilon_2 = 1{,}118$
$n' = 2860$	$\Delta T'_{r_1} = 0{,}588 \cdot 10^{-3}$	$\Delta T'_{r_2} = 0{,}369 \cdot 10^{-3}$
$n'' = 1460$	$\Delta T''_{r_1} = 0{,}288 \cdot 10^{-3}$	$\Delta T''_{r_2} = 0{,}185 \cdot 10^{-3}$

Um einen Vergleich mit dem theoretisch ermittelten Effekt zu ziehen, müsste die in der Anlage durchgeführte irreversible Adiabate eine vollkommene sein. Das ist nur dann möglich wenn die Irreversibilität kennzeichnende Wärme im Gasraum bleibt.

Da die Thermometerhülse und die Membran nicht isoliert und die Isolation der übrigen Wände keine vollkommene sein kann, so ist diese Bedingung nicht erfüllt. Die kurze Zeitdauer des Versuches ist dazu berufen diese Umstände zu mildern. Bei der experimentalen Bestimmung des Effektes ΔT, der mit dem theoretisch ermittelten zu vergleichen ist, darf die durch die nichtisolierten Bestandteile eingespeicherte Wärme nicht ausser acht gelassen werden.

Wir bezeichnen:

T_1 = Gemeinsame Anfangstemperatur des Gases und der nichtisolierten Teile;

T'_{2n+1} = Gemeinsame Endtemperatur des Gases und der nichtisolierten Teile

$$\Delta T_{exp} = T'_{2n+1} - T_1$$

T_{2n+1} = Endtemperatur des Gases in der Voraussetzung einer vollkommenen Isolation

$$\Delta T = T_{2n+1} - T_1 .$$

Die aus dem Irreversibilitätseffekt der Adiabate herrührende Wärme, die im Fall einer vollkommenen Isolation das Gas einspeichern würde ist:

$$G_g c_v \Delta T = G_g c_v \Delta T_{exp} + \Sigma G_i c_i \Delta T_{exp} . \qquad (1)$$

Die Faktoren der rechten Seite stellen die vom Gas, beziehungsweise von den unisolierten Bestandteile während der Durchführung des Versuches eingespeicherte Wärme dar. In der Gleichung (1) sind:

G_g = Gasgewicht
c_v = spezifische Wärme des Gases bei gleichbleibendem Volumen
G_i = Gewicht der nichtisolierten Bestandteile
c_i = spezifische Wärme der nicht isolierten Bestandteile.

Aus (1) finden wir den Irreversibilitäts — Effekt ΔT:

$$\Delta T = \Delta T_{exp}\left(1 + \frac{\Sigma G_l c_l}{G_g c_v}\right) = \Delta T_{exp} \cdot f, \tag{2}$$

der mit theoretisch ermittelten zu vergleichen ist.

2. *Bestimmung des theoretischen Irreversibilitätseffektes*

Die Gleichung der mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Adiabate ist[1]

$$\frac{T_2}{T_1} = \delta \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}, \tag{3}$$

wo, für die Kompression, beziehungsweise für die Entspanung,

$$\delta_c = \left(\frac{1 + a\frac{w}{c_1}}{1 + a\frac{w}{c_2}}\right)^2 \approx 1 + \frac{aw}{c_1} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) > 1 \tag{4}$$

$$\delta_a = \left(\frac{1 - a\frac{w}{c_2}}{1 - a\frac{w}{c_3}}\right)^2 \approx 1 + \frac{aw}{c_3} \cdot 2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) > 1. \tag{5}$$

Die Abb. 4 u. 5 stellen den Prozess pro Umdrehung dar. Wir nehmen uns vor den Irreversibilitäts-Effekt der mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Adiabate zu ermitteln, welcher durch die Erhöhung der Gastemperatur offenbart wird, und zwar

$$\Delta T_r = \Delta T_1 + \Delta T_2. \tag{6}$$

Aus Abb. (5) ergibt sich:

$$\Delta T_1 = T_{3_t} - T_1. \tag{7}$$

T_{3_t} kann als Funktion von T_1 ausgedrückt werden, indem wir die Gleichung der reversiblen Adiabate $2—3_t$ (Abb. 4 u. 5) und die Beziehung (3) benützen:

$$T_{3_t} = T_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = T_1 \delta_c \tag{8}$$

$$T_2 = T_1 \delta_c \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}. \tag{9}$$

[1] Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu: Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher konstanter Geschwindigkeit verlaufen — Buletinul Institutului politehnic Bucureşti 1964 — nr. 6, Gl. 41, 46, 47.

Setzen wir T_{3_t} aus (8) in (7) ein, so ergibt sich

$$\Delta T_1 = T_1 \delta_c - T_1 = T_1 (\delta_c - 1). \tag{10}$$

ΔT_2 wird analog bestimmt:

$$\Delta T_2 = T_3 - T_{3_t}. \tag{11}$$

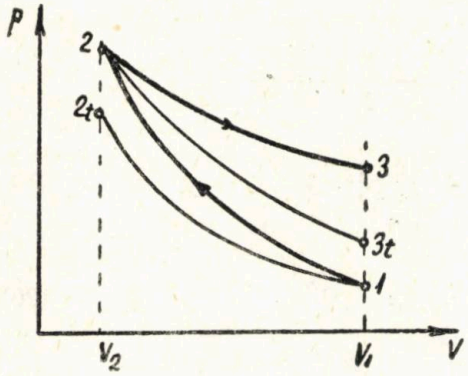


Fig. 4

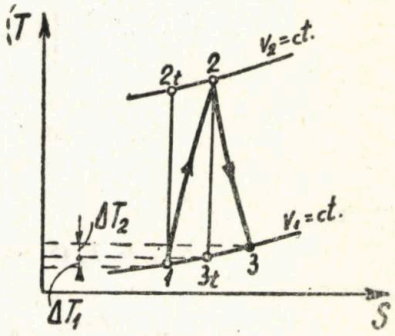


Fig. 5

T_3 wird als Funktion von T_{3_t}, mit Hilfe der irreversiblen 2—3 und der reversiblen Adiabate 2—3_t, wie folgt ermittelt:

$$T_3 = T_2 \delta_a \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} = T_{3_t} \cdot \delta_a \tag{12}$$

$$T_3 = T_{3_t} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}. \tag{13}$$

(12) wird in (11) eingetragen, wobei:

$$\Delta T_2 = T_{3_t} \cdot \delta_a - T_{3_t} = T_{3_t} (\delta_a - 1). \tag{14}$$

Mit Rücksicht auf (8)

$$\Delta T_2 = T_1 \cdot \delta_c \cdot (\delta_a - 1). \tag{15}$$

Setzen Wir (10) und (15) in (6) ein, so erhalten wir:

$$\Delta T_r = \Delta T_1 + \Delta T_2 = T_1 (\delta_c - 1) + T_1 \delta_c (\delta_a - 1). \tag{16}$$

Im Ausdruck vom δ_a kann man $c_3 \approx c_1$ annehmen. Wir können nach (5), tatsächlich schreiben:

$$\delta_a = 1 + \frac{2aw}{\sqrt{3gRT_3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right); \quad c_3 = \sqrt{3gRT_3}. \tag{17}$$

Aber, da

$$T_3 = T_1 + \Delta T_1 ; \quad \sqrt{3gRT_3} = \sqrt{3gRT_1} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta T_1}{T_1}} ,$$

ergibt sich

$$\delta_a = 1 + \frac{2aw}{\sqrt{3gRT_1}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta T_1}{T_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \tag{18}$$

$$= 1 + \frac{2aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta T_1}{T_1} + \ldots\right)$$

$$\delta_a \approx 1 + \frac{2aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \approx \delta_c . \tag{19}$$

Somit

$$\Delta T_r = T_1 (\delta_c - 1) (1 + \delta_c) = T_1 (\delta_c^2 - 1) . \tag{20}$$

Aber:

$$\delta_c^2 = 1 + \frac{4aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) + \frac{a^2 w^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)^2$$

und, indem wir die Klammer 2-ter Ordnung vernachlässigen:

$$\delta_c^2 \approx 1 + \frac{4aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right),$$

woraus

$$\delta_c^2 - 1 \approx \frac{4aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right). \tag{21}$$

Tragen wir dies in (20) ein, so ergibt sich schliesslich

$$\Delta T_r = T_1 \frac{4aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right). \tag{22}$$

3. *Vergleich zwischen Versuch und Theorie.*

Aus der Beziehung (22) erbit sich, dass bei derselben Temperatur: T_1, demselben Gas und Verdichtungsgrad, der sperzifische Irreversibilitäts-effekt mit der mittleren Kolbengeschwindigkeit direkt proportional ist.

Dieser theoretische Schluss kann sofort, den experimentalen Ergebnissen (Tabelle 2) gemäss, überprüft werden.

Für $\varepsilon_1 = 1{,}155$:

$$\frac{w'}{w''} = \frac{n'}{n''} = \frac{2860}{1460} = 1{,}95$$

und

$$\frac{\Delta T'_{r\,exp}}{\Delta T''_{r\,exp}} = \frac{0{,}0588 \cdot 10^{-3}}{0{,}288 \cdot 10^{-3}} = 2{,}04 .$$

Für $\varepsilon_2 = 1{,}118$:

$$\frac{w'}{w''} = 1{,}95$$

und

$$\frac{\Delta T'_{r\,exp}}{\Delta T''_{r\,exp}} = \frac{0{,}369 \cdot 10^{-3}}{0{,}185 \cdot 10^{-3}} = 1{,}99 .$$

Für beide Verdichtungsgraden ergibt sich, mit gemügender Annäherung, dass:

$$\frac{w'}{w''} = \frac{T'_{r\,exp}}{T''_{r\,exp}} , \tag{23}$$

in überraschend guter Übereinstimmung mit der theoretischen Schlussfolgerung. Es muss bemerkt werden, dass bei, der Bestimmung des Verhältnisses der spezifischen Effekte, im Laufe der Rechnungen, die Grösse „a" weg fällt.

Die experimentale Bestimmung dieser Grösse verlangt strenge Einhaltung der bei der Durchführung einer Aidabate nötigen Bedingungen. Darin bestehen die hauptsächlichen Schwierigkeiten unseres Versuches, die wir an Hand von Gleichung 2 zu überwinden trachten.

Mit Hilfe vom (22) kann auch eine Überprüfung der Grössen-Ordnung des Irreversibilitätseffektes ΔT_r unternommen werden.

Diese wollen wir für $\varepsilon_1 = 1{,}155$ und $n'' = 1460$ ausführen, Versuchsgemäss wurde $\Delta T''_{r\,exp} = 0{,}288 \cdot 10^{-3}$.

Nach (2), ergibt sich im unseren Fall:

$$f = 1 + \frac{\Sigma\, G_i \cdot c_i}{G_{\text{Luft}} \cdot c_{\text{Luft}}} = 926 , \tag{24}$$

wie auch der Irreversibilitäts-Effekt:

$$\Delta T = f \cdot \Delta T''_{r\,exp} = 926 \cdot 0{,}288 \cdot 10^{-3} = 0{,}267 \text{ Grade.}$$

Diesen wollen wir mit dem theoretischen vergleichen. Dazu brauchen wir die mittlere Kolbengeschwindigkeit:

$$w_{med} = \frac{sn}{30} = \frac{0{,}03 \cdot 1460}{30} = 1{,}46 \text{ m/s.}$$

Da der Versuch bei einer Umgebungstemperatur $T_1 = 293°\text{K}$ durchgeführt wurde, die entsprechende mittlere scheinbare Molekelngeschwindigkeit für Luft wird sein:

$$c_1 = \sqrt{\frac{3\,R \cdot 9{,}81 \cdot T_1}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 848 \cdot 9{,}81 \cdot 293}{28{,}96}} = 500 \text{ m/s.}$$

Indem wir diesen Wert in Beziehung 22 eintragen, erhalten wir den theoretischen Irreversibilitätseffekt:

$$\Delta T_r = T_1 \frac{4\,a w_{med}}{c_1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)$$

$$\Delta T_r = 293\,\frac{4 \cdot a \cdot 1.46}{500}\left(1 - \frac{1}{1{,}155^{\frac{0.4}{2}}}\right)$$

$$\Delta T_r = 0{,}0924 \cdot a\,.$$

Schreiben wir Gleichheit zwischen den beiden Effekten vor (theoretisch u. experimental bestimmt), d.h.

$$\Delta T_r = \Delta T\,,$$

ergibt sich

$$0{,}0924\,a = 0{,}267\,,$$

woraus

$$a = \frac{0{,}267}{0{,}0924} = 2{,}9\,. \qquad (25)$$

Da theoretisch [1] a = 4,24 *, die oben erwähnten Schwierigkeiten, bei der Durchführung der Adiabate vor Augen haltend, erachten wir, dass theoretische und experimentale Ergebnisse mit befriedigender Annäherung übereinstimmen. Wir glauben die bestehende Diferenz 1,34 * (31%) * wie folgend rechtfertigen zu können:

— Die Berechnung von „a" [1] wurde für eine Kolbenmaschine durchgeführt, während im vorhandenen Versuch eine Membran den Kolben ersetzt.

— Bei der Bestimmung von f, wurde die der Isolation zugeführte Wärme vernachlässigt.

Obwohl wir keinen Zweifel über die qualitative und, mit annehmbarer Annährung, auch quantitative Richtigkeit der Theorie hegen, sind wir doch überzeugt, dass unsere technischen Versuchsmittel der Vervollkommnung bedürfen.

Lehrstuhl für Thermotechnik
und thermische Maschinen
Politechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej:
Bukarest

[1] Siehe: L. Stoicescu u. S. Petrescu: Erster Grundsatz der Thermodynamik für technische Probesse die mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen — Buletinul Institutului politehnic Bucureşti — nr. 5 — 1964.

* Unseren letzten theoretischen Ergebnissen gemäss ist a = 4,05 und die entsprechende Differnz 1,15 (28,4%).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

C.Z. : 621.45 : 621—63

CONTRIBUŢII LA APLICAREA SIMILITUDINII LA MOTOARELE RACHETĂ CU COMBUSTIBIL LICHID. *

CONST. ŢURCANU

Pentru realizarea unui motor rachetă de dimensiuni noi sînt necesare numeroase experienţe de punere la punct a motorului, iar în cazul modificării dimensiunilor unui tip de motor cunoscut se modifică corespunzător caracteristicilor termodinamice şi energetice ale motorului. În scopul micşorării eforturilor economice şi în acelaş timp în scopul micşorării duratei de punere la punct a noului motor în ultimii ani au apărut cîteva încercări teoretice de stabilire a relaţiilor de similitudine, pentru motorul rachetă.

Cunoaşterea factorilor de scară ai similitudinii ar permite să se evite importanta perioadă de calcul de proiectare, iar pe de altă parte similitudinea permite examinarea unui număr mare de variante constructive dintre care se poate alege varianta optimă scopului propus.

Lucrările publicate [1] [2] [3] studiază similitudinea motoarelor rachetă sub diferite aspecte (presiunea în camera de ardere constantă, temperatura gazelor aceleeaşi etc.).

Prin considerarea criteriilor de similitudine utilizate în studiul pulverizării se pot obţine noi relaţii de similitudine pentru motorul rachetă, relaţii care consideră schimbarea tensiunii superficiale şi a densităţii combustibilului lichid.

Procesele care au loc în motorul rachetă cu combustibil chimic lichid, din momentul pătrunderii combustibilului în camera de ardere şi pînă la ieşirea produselor de ardere prin ajutaj, sînt complexe, conţinînd fenomene chimico-termo-gazo-dinamice. Funcţionarea motorului poate fi în regim staţionar sau nestaţionar, cu sau fără transfer de căldură prin pereţii camerei de ardere, după cum motorul este răcit sau nu.

---

* Lucrare comunicată în sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, 22—23 februarie 1964.

Pentru stabilirea relaţiilor de similitudine se consideră următoarele criterii adimensionale [1] [2] [3].

— numărul Mach $M = \frac{v}{a}$

— numărul Reynolds $R_e = \frac{\varrho \cdot v \cdot l}{\mu}$

— numărul Prandtl $P_r = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$

— numărul Schmidt $S_c = \frac{\mu}{\varrho \cdot D_v}$

— raportul căldurilor specifice $K = \frac{C_p}{C_v}$

— primul raport Damköhler $D_I = \frac{t_r}{\tau}$

— al doilea raport Damköhler $D_{II} = \frac{\Delta h}{I}$

unde s-a notat : v — viteza fluidului ; a — viteza sunetului locală ; ϱ — densitatea fluidului ; μ — viscozitatea absolută ; λ — coeficientul conductibilităţii termice ; D_v — coeficientul de difuzie ; t_r — timpul de staţionare a combustibilului în camera de ardere ; Δh — cantitatea de căldură, degajată de reacţia chimică în condiţii standard ; I — entalpia totală a combustibilului înainte de reacţie ; l — lungimea caracteristică procesului dat ; iar τ — este timpul total de pregătire şi transformare a combustibilului în camera de ardere (pulverizare, vaporizare, difuzie, ardere etc.).

Dacă admitem că temperatura în camera de ardere a modelului şi respectiv a motorului, este aceeaşi, rezultă că vor fi aceleaşi : viteza sunetului, raportul căldurilor specifice, numărul Prandtl, numărul Schmidt şi al doilea raport Damköhler. De asemenea numărul Mach în camera de ardere fiind mic (de ordinul 0,1) în regim staţionar în primă aproximaţie, se poate neglija. Numărul M poate deveni important în cazul cînd vitezele sînt mari, ceea ce are loc în procesele oscilatorii. Astfel, similitudinea la schimbarea dimensiunilor principale ale motorului este asigurată prin egalarea numerelor Re şi D_I.

Notăm prin n_i raportul i/i_M unde i este un parametru al motorului şi i_M acelaşi parametru însă al modelului. Prin n_d notăm factorul de scară al similitudinii geometrice pentru care alegem ca dimensiuni de comparat diametrele secţiunilor transversale ale camerelor de ardere $n_d = \frac{d}{d_M}$ (cu excepţia orificiilor de injecţie se poate considera că simi-

litudinea geometrică se conservă pentru toate celelalte dimensiuni ale camerei de ardere).

Pentru obținerea relațiilor de similitudine, dificultatea principală constă în stabilirea legăturii dintre timpul caracteristic τ și parametrii motorului.

Se poate considera [3] că timpul de transformare τ este determinat de diametrul D al particolelor de combustibil pulverizat și presiunea din camera de ardere.

$$\tau = D^{-\delta} \cdot p^{-m} \tag{1}$$

unde δ și m sînt parametrii ce trebuiesc determinați experimental. De asemenea se consideră că în general raportul dintre diametrul particolelor pulverizate și diametrul orificiului injectorului D_{inj} este o funcție de numărul Weber și numărul Reynolds.

$$\frac{D}{D_{inj}} \approx (W_e)^{-\alpha} \cdot (R_e)^{-\beta} \approx \left(\frac{D_{inj} \cdot \Delta p}{\sigma}\right)^{-\alpha} \cdot (p \cdot v \cdot D_{inj})^{-\beta} \tag{2}$$

unde Δp este diferența între presiunea din injector și respectiv camera de ardere, σ tensiunea superficială, α și β coeficienți care se obțin empiric.

La relațiile de mai sus, asociem criteriile de similitudine utilizate în studiul pulverizării. Dacă prin l notăm dimensiunile caracteristice, atunci forțele care se consideră în procesul pulverizării [4] vor fi forțele aerodinamice ale lichidului ($\approx \varrho_e \cdot v_e^2 l^2$) și ale gazului ($\approx \varrho_g \cdot v_g^2 \cdot l^2$), forțele de viscozitate ($\approx \cdot v \cdot l$) și forțele de tensiune superficială ($\approx \sigma \cdot l$). În afara criteriilor R_e unul din criteriile de similitudine va fi numărul care determină ordinul de mărime al forțelor de tensiune superficială în raport de exemplu cu forțele aerodinamice $\frac{\sigma}{\varrho_e \cdot v^2 \cdot l}$ precum și combinația adimensională $\mu^2/\sigma \cdot \varrho \cdot l$ care intră în formula lui Reley după care desfacerea jetului în particole are loc cînd raportul ;

$$l/D = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{1 + 3\sqrt{\frac{\mu^2}{\varrho \cdot \sigma \cdot D}}}$$

depășește, o valoare determinată. Întrucît realizarea pulverizării jetului este o condiție necesară vom considera egalitatea criteriului adimensional

$$\left(\frac{\mu^2}{\varrho \cdot \sigma \cdot l}\right) = \left(\frac{\mu^2}{\varrho \cdot \sigma \cdot l}\right)_M . \tag{3}$$

La numere R_e mari influența forțelor de viscozitate este mică și de asemenea la rapoarte ϱ_l/ϱ_g mari, influența diferențelor dintre valorile forțelor aerodinamice ale lichidului și gazului este neglijabilă, astfel încît pulverizarea jetului este descrisă de ecuația simplificată.

$$\frac{d}{l} = f\left(\frac{\sigma}{\varrho \cdot v^2 \cdot l}\right)$$

unde d este diametrul mediu al jetului.

Dimensiunile particolelor se pot determina presupunînd că desfacerea picăturilor mari are loc cînd forţele de rezistenţă devin egale cu tensiunea superficială

$$\sigma \cdot \pi \cdot D = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\varrho_l \cdot v^2}{2} C_x$$

de unde

$$\frac{\sigma}{\varrho_l \cdot v^2 \cdot D} = \frac{C_x}{A} = \frac{f(R_e)}{A} \; ; \; (A = \text{const.})$$

Experienţele arată că la limita de sus a stabilităţii, (mărunţire 100%) $A = 5{,}6$ iar la limita de jos (mărunţire 10%) $A = 4{,}0$. Considerînd dependenţa $C_x = f(R_e)$ pentru picături de formă sferică şi presupunînd că mărunţirea este completă se obţine:

$$\frac{\sigma}{\varrho_l \cdot v^2 \cdot D} = 0{,}09 - 0{,}072 = K$$

sau

$$D = \frac{\sigma}{\varrho_l \cdot v^2 \cdot K}$$

şi introducînd în (1) avem:

$$\tau = \left(\frac{\sigma}{\varrho \cdot v^2 \cdot k}\right)^{-\delta} \cdot p^{-m}. \tag{4}$$

Dacă notăm cu L lungimea camerii de ardere obţinem:

$$\frac{t_r}{t_{r_M}} = \frac{L/V}{L_{M/V_M}} = \frac{n_d}{n_v}. \tag{5}$$

Considerînd egalitatea primului număr Damköhler avem:

$$\frac{t_r}{t_{r_M}} = \frac{\tau}{\tau_M} = \frac{n_d}{n_v}. \tag{6}$$

De asemenea din egalitatea (3) obţinem:

$$n_\sigma = n_\varrho \cdot n_v^2 \cdot n_D. \tag{7}$$

Inlocuind (4) în (6) se obţine:

$$\frac{n_d}{n_v} = \frac{\tau}{\tau_M} = \frac{\left(\frac{\sigma}{\varrho \cdot v^2 \cdot K}\right)^{-\delta}}{\left(\frac{\sigma}{\varrho \cdot v^2 \cdot K}\right)_M^{-\delta}} \cdot \left(\frac{p}{p_M}\right)^{-m} = n^{-\delta} \cdot n_p^{-m} \cdot n_v^2 \cdot n_\varrho^{\delta}$$

de unde:

$$n_d = n^{-\delta} \cdot n_p^{-m} \cdot n_v^{2\delta+1} \cdot n_\varrho. \tag{8}$$

În studiile aerotermochimice cînd se admite egalitatea numerelor R_e și D_l se obțin următoarele relații între factorii de scară:

Din $p \cdot v \cdot L = (p \cdot v \cdot L)_M$ și $\frac{L}{v \cdot \tau} = \left(\frac{L}{v \cdot \tau}\right)_M$

rezultă

$$n_d = \frac{1}{n_p \cdot n_v} \tag{9}$$

$$n_d / n_v = n_\tau \tag{10}$$

și deci

$$n_\tau = \frac{1}{n_p \cdot n_v^2}. \tag{11}$$

Folosind relația 9 și 8, obținem:

$$n_d^{2\delta+2} = n_\sigma^{-\delta} \cdot n_p^{-m-1-2\delta} \cdot n_\rho^{\delta}. \tag{12}$$

Cînd este necesar se poate folosi factorul de scară care consideră viteza de scurgere, înlocuind în (8) factorul n_p dedus din (9).

$$n_d^{-m+1} = n_\sigma^{-\delta} \cdot n_v^{-m+2\delta+1} \cdot n_\rho^{\delta}. \tag{13}$$

Relația între factorul de scară geometric n_d și factorul de scară al tracțiunii n_t se obține considerînd ecuația de continuitate

$$\frac{p \cdot v \cdot d^2}{(p \cdot v \cdot d^2)_M} = n_t$$

de unde

$$n_p \cdot n_v \cdot n_d^2 = n_t.$$

Avînd în vedere relația 9 rezultă

$$\frac{1}{n_d} \cdot n_d^2 = n_t \quad \text{sau} \quad n_d = n_t \tag{14}$$

care arată că factorii de scară geometric și de tracțiune sînt identici. În această examinare s-a neglijat componenta forței de tracțiune care provine din diferența dintre presiunea gazelor la ieșirea din ajutajul reactiv și presiunea mediului înconjurător.
Evident avem:

$$n_t = n_\sigma^{-\delta} \cdot n_p^{-m} \cdot n_v^{2\delta+1} \cdot n_\rho^{\delta} \tag{15}$$

Pentru orificiul injectorului, păstrînd numărul de injectoare se obține relația:

$$\frac{v \cdot D_{inj}^2}{(v \cdot D_{inj}^2)_M} = n = n_d$$

și deci

$$n_v \cdot n^2_{Dinj} = n_d . \tag{16}$$

Înlocuind aici n_v dedus din (8) se obține

$$n_{Dinj} = n_d^{\frac{\delta+1-m}{2\delta+1-m}} \cdot n_\sigma^{\frac{-\delta}{2(2\delta+1-m)}} \cdot n_\rho^{\frac{\delta}{2(2\delta+1-m)}} \tag{17}$$

Factorul de scară pentru viteza din camera de ardere, dependent de factorii n_d, n_σ, n_ρ se obține din relația 8 și 9.

$$n_v = n_d^{\frac{1-m}{2\delta+1+m}} \cdot n_\sigma^{\frac{\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_\rho^{-\frac{\delta}{2\delta+1+m}} . \tag{18}$$

Factorul de scară pentru presiunea din camera de ardere scos din relațiile 8 și 9 este

$$n_p = n_\sigma^{\frac{-\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_\rho^{\frac{\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_d^{\frac{-2\delta-2}{2\delta+1+m}} . \tag{19}$$

Cînd este admisibilă neglijarea influenței schimbării tensiunii superficiale și a densității combustibilului obținem relațiile:

$$\begin{aligned} n_p &= n_d^{\frac{-2\delta-2}{2\delta+1+m}} \\ n_v &= n_d^{\frac{1-m}{2\delta+1+m}} \end{aligned} \tag{20}$$

Dacă considerăm cazul cînd numerele R_e și M se păstrează, avem $v = v_M$ și deci $n_v = 1$, iar:

$$\frac{p_M}{p} = n_d . \tag{21}$$

Condiția (21) se îndeplinește dacă în relațiile 20, $\delta = \infty$.

Dacă considerăm acum cazul cînd presiunea în camera de ardere a motorului și a modelului sînt egale avem $n_p = 1$ și $n_d^{-1} = n_v$ ceea ce are loc cînd $m = \infty$. Cele două cazuri de mai sus reprezintă cazuri limită a legii generale exprimate de relațiile (20).

Valorile parametrilor δ și m sînt dependente de combustibil și de sistemul de injecție. În cazul injectoarelor cu jet la care cele două componente ale combustibilului se intersectează, experiențele [1] dau valorile $\delta = 1{,}5$ și $m = 0{,}3$.

Luînd $\delta = 0$ se obține legea de similitudine dată de Crocco.

Este important de evaluat corecția impusă de considerația schimbării tensiunii superficiale și a masei specifice a combustibilului. Pentru valorile $\delta = -1{,}5$ și $m = 0{,}3$ relațiile (18) și (19) devin:

$$\begin{aligned} n_v &= n_d^{\frac{0{,}7}{-1{,}7}} \cdot n_\sigma^{\frac{-1{,}5}{-1{,}7}} \cdot n_\rho^{\frac{1{,}5}{1{,}7}} \\ n_p &= n_d^{\frac{1}{1{,}7}} \cdot n_\sigma^{\frac{+1{,}5}{-1{,}7}} \cdot n_\rho^{\frac{-1{,}5}{1{,}7}} \end{aligned} \tag{22}$$

sau

$$n_v = n_d^{\frac{0,7}{-1,7}} \cdot n_\sigma^{0,882} \cdot n_\rho^{0,882} = n_d^{\frac{0,7}{-1,7}} \cdot (n_\sigma \cdot n_\rho)^{0,882}$$

$$n_p = n_d^{\frac{1}{1,7}} \cdot n_\sigma^{-0,882} \cdot n_\rho^{-0,882} = n_d^{\frac{1}{1,7}} \cdot (n_\sigma \cdot n_\rho)^{-0,882}$$

Pentru aceste valori ale lui m și δ indiferent de valoarea factorilor de scară n_σ și n_ρ, acțiunea considerării schimbării tensiunii superficiale și a densității combustibilului asupra factorilor de scară ai presiunii și vitezei este astfel încît atunci cînd factorul de scară a presiunii este amplificat, factorul de scară al vitezii este micșorat și invers.

Considerînd că n_σ variază între 0,5 și 2,0 (tabelul 1) iar n_ρ variază între 0,7 și 1,5, obținem pentru valorile $m = 0,3$ și $\delta = -1,5$ corecția $(n_\sigma \cdot n_\rho)^{0,882} \approx 0,3 - 2,6$, respectiv $(n_\sigma \cdot n_\rho)^{-0,882} = 0,38 - 3,33$.

Tabelul 1

Valorile tensiunii superficiale și a densității unor componenți

Componentul	Tensiunea superficială σ în dyn/cm	Densitatea ϱ în g/cmc	Observații
apa la 4°C	față de aer 75	0,999973	
apa la 30°C	față de aer 71	0,995646	
apa la 100°C	față de aer 58	0,95838	
apa la 250°C		0,794	
acid azotic la 15°C (conținut diferit de HNO_3 și N_2O_5)		1,000 1,520	în raport cu densitatea apei la 4°C
Hidrazină în apă		1,0002 1,047 1,011	cu 1% pt. hidrazină cu 60% hidrazină cu 100% hidrazină
alcool metilic în apă la 15°C	23 față de aer la 15°C	0,99727 0,82396	cu 1% pînă la 90% alcool metilic
alcool etilic	31 6 față de N_2 la −70°C	0,9999 0,7942	cu 1% pînă la 100% alcool în apă
anilină la 20%	43,4 față de vaporii proprii		

Factorii de scară

După Crocco	După Barrer	După Penner	Din lucrare
$n_p = n_d^{\frac{-2}{1+m'}}$	$n_p = n_d^{\frac{-2(1-r')}{1-2r'+m'}}$	$n_p = n_\sigma^{\frac{2\alpha\cdot\delta}{2(1+m')-\delta(1+3\alpha-\beta)}} \cdot n_d^{\frac{2\delta(\alpha+1)-4}{2(1+m')-\delta(1+3\alpha-\beta)}}$	$n_p = n_\sigma^{\frac{-\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_\rho^{\frac{\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_d^{-\frac{2\delta+2}{2\delta+1+m}}$
$n_v = n_d^{\frac{1-m'}{1+m'}}$	$n_v = n_d^{\frac{1-m'}{1-2r'+m'}}$	$n_v = n_\sigma^{\frac{2\alpha\delta}{\delta(1+3\alpha-\beta)-2(1+m')}} \cdot n_d^{\frac{2(1-m')-\delta(1-\alpha-\beta)}{2(1+m')-\delta(1+3\alpha-\beta)}}$	$n_v = n_d^{\frac{1-m}{2\delta+1+m}} \cdot n_\sigma^{\frac{\delta}{2\delta+1+m}} \cdot n_\rho^{\frac{-\delta}{2\delta+1+m}}$
$n_{Dinj} = n_d^{\frac{m'}{1+m'}}$	$n_{Dinj} = n_d^{\frac{m'-r'}{1-2r'+m'}}$	$n_{Dinj} = n_\sigma^{\frac{\delta\cdot\alpha}{2(1+m')-\delta(1+3\alpha-\beta)}} \cdot n_d^{\frac{2m'-\delta(2\alpha-\beta)}{2(1+m')-\delta(1+3\alpha-\beta)}}$	$n_{Dinj} = n_d^{\frac{\delta+1-m}{2\delta+1-m}} \cdot n_\sigma^{\frac{-\delta}{2(2\delta+1-m}} \cdot n_\rho^{\frac{\delta}{2(2\delta+1-m)}}$

Acest studiu arată că la aplicarea similitudinii în motorul rachetă cu combustibilul lichid, trebuie să se considere schimbarea densității lichidului și a tensiunii superficiale. În condițiile admise în această lucrare, această considerare este cuprinsă în relațiile de calcul prezentate cu numerele (8), (15), (17), (18), (19), pentru factorul de scară geometric, factorul de scară al tracțiunii, factorul de scară al diametrului injectorului și pentru factorii de scară ai vitezii și presiunii din camera de ardere. Continuînd analog se pot determina factorii de scară pentru dimensiunile ajutajului reactiv, pentru sistemul de răcire, precum și pentru cazul mai dificil al arderii pulsatorii cu frecvență înaltă sau joasă.

Pentru compararea rezultatelor obținute, în tabelul 2, sînt prezentate expresiile analitice ale factorilor de scară enumerați mai înainte, date de Penner, Crocco, Barrer și respectiv cele determinate în această lucrare.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Barrer, Jamot, Veber, Vandenkerkhov* — Racketnîie dvigatelii. Oboronghiz 1962.
2. *Crocco* — Consideration on the problem of scaling racket motors, Selected combustions Problems II. London, 1956.
3. *S. S. Penner and Fuhs.* — On Generalised Scaling Procedures for Liquid, Fuel Rokket Engines. Combustion and Flame. Vol. I, nr. 2, 1957.
4. *A. N. Borisenko* — Gazovaia dinamica dvigatelei. Oboronghiz 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

C. Z.: 621.57 : 621.54

IMPORTANȚA EXERGIEI PENTRU STUDIUL PROCESELOR REALE DIN MAȘINILE FRIGORIFICE CU COMPRESIE DE VAPORI*

MARIETA GRIGORIU

Procesele reale care au loc în instalațiile frigorifice, ca toate procesele reale, sînt însoțite de pierderi datorită ireversibilității; energia primită în instalația frigorifică nu este folosită în întregime pentru a crea un efect util, ci o parte se pierde datorită fenomenelor ireversibile ce au loc în procesul de funcționare al instalației (de exemplu laminarea în ventilul de reglaj sau schimbul de căldură la temperatură varabilă în condensator).

Eficacitatea instalațiilor frigorifice cu compresie de vapori se apreciază în prezent după valoarea puterii frigorifice specifice $K_e = \frac{Q_o}{N_e}$ Kcal/Kwh sau, ceea ce în fond reprezintă același lucru, după valoarea coeficientului frigoric $\varepsilon = \frac{q_o}{Al_e}$. Însă acești coeficienți nu pot da o idee clară asupra calității mașinii, deoarece nu sînt randamente și nu caracterizează gradul de perfecțiune a instalației. Puterea frigorifică specifică K_e și coeficientul frigorific ε pot servi numai la compararea instalațiilor frigorifice între ele sau la compararea cu ciclul Carnot inversat dar numai cînd instalațiile frigorifice comparate lucrează în aceleași limite de temperaturi, iar schimbul de căldură are loc la temperatură constantă. Valoarea coeficientului frigorific ε pentru mașinile frigorifice cu compresie de vapori, de exemplu, este în general $\varepsilon > 1$ și limita sa superioară variază în funcție de valorile temperaturilor de vaporizare și condensare. Coeficienții K_e și ε nu pot da deasemenea indicații asupra elementelor separate ale instalației frigorifice, asupra pierderilor și cauzelor ce le condiționează.

Același lucru se poate spune și despre coeficientul frigorific al instalațiilor frigorifice cu absorbție sau cu ejecție de abur.

Deaceea a apărut necesitatea unei metode care să permită nu numai de a stabili pierderile și cauzele lor dar și de a determina atît randamentul instalației în global cît și randamentul proceselor separate ce au loc în diferitele elemente ce compun instalația frigorifică.

Aceste cerințe pot fi satisfăcute pe baza unei metode de analiză termodinamică, ce s-a desvoltat în ultimul timp utilizînd noțiunea de „exergie".

* Manuscris predat la redacție la 2 noiembrie 1964.

Pe baza legii de conservare a energiei toate formele de energie sînt echivalente însă posibilitatea nelimitată de transformare a unei forme de energie în alta, inclusiv căldura, corespunde numai principiului I al termodinamicii. Spre exemplu, pe baza principiului al doilea al termodinamicii, transformarea căldurii în lucru mecanic este legată de anumite condiții limitatoare și care precizează că niciodată nu se poate efectua în întregime această transformare. Explicația constă în faptul că, spre deosebire de energia mecanică (sau electrică), care se prezintă sub o formă ordonată de energie, căldura reprezintă o formă de energie dezordonată și de aceea cînd se examinează simultan aceste forme de energie, transformarea nelimitată este posibilă numai în direcția de la o formă ordonată către o formă dezordonată de energie, adică din lucru mecanic în căldură.

Astfel, din punct de vedere tehnic, aceeași cantitate de energie poate avea o „valoare" diferită, la anumite condiții ale mediului ambiant, în funcție de forma de energie și de parametrii respectivi.

Această „valoare" este determinată — pe baza principiului al doilea al termodinamicii — de cantitatea maximă de energie mecanică, electrică sau o altă formă de energie complet transformabilă în alte forme de energie, care poate fi obținută dintr-o cantitate anumită de energie.

Dacă, spre exemplu, o cantitate oarecare de energie internă a unei substanțe se transmite altei substanțe, forma de transmitere fiind căldura, în acest caz „valoarea" acestei energii, la o anumită temperatură a mediului ambiant, este determinată nu numai de cantitatea sa ci și de temperatura la care se transmite. Capacitatea de lucru a acestei energii (cantitatea maximă de energie mecanică care ar putea fi obținută din ea) va fi cu atît mai mare cu cît temperatura la care se transmite va fi mai mare față de temperatura mediului ambiant.

Altfel spus „capacitatea de lucru" a energiei interne a unui fluid — „valoarea" acestei energii — este determinată de existența unei diferențe între parametrii fluidului de lucru și parametrii mediului ambiant. Dacă presiunea și temperatura fluidului sînt egale cu ale mediului ambiant, atunci evident că energia sa internă nu poate fi utilizată pentru obținerea unui efect tehnic util și „capacitatea sa de lucru" va fi nulă. Este necesară deci o diferență oarecare de potențial (Δp sau Δt) pentru a putea obține o cantitate de energie mecanică (sau electrică) pe seama energiei interne a unui fluid în cazul acțiunii reciproce reversibile a fluidului cu mediul ambiant.

Ca aplicare pentru frigotehnică aceasta înseamnă că o cantitate de căldură extrasă de la mediul răcit, (sursă rece) la o temperatură mai mică decît temperatura mediului ambiant, este cu atît mai „valoroasă" cu cît temperatura este mai scăzută, adică cu cît diferența de temperatură față de mediul ambiant este mai mare.

De aceea analiza termodinamică a mașinii frigorifice trebuie să se facă nu după cantitatea de energie extrasă de la sursa rece, măsurată ca Q_0 Kcal de căldură extrasă, ci după „capacitatea de lucru", după „valoarea" acestei călduri. Aceasta va fi, în cazul mașinii frigorifice, cantitatea de energie mecanică sau electrică care trebuie cheltuită în procesul ideal (reversibil) pentru extragerea acestei cantități de căldură Q_0 la temperatura

dată. Cu cît temperatura la care are loc extragerea căldurii este mai scăzută, cu atît se cheltuiește o cantitate de energie mecanică (sau electrică) mai mare, deci „capacitatea de lucru", „valoarea" căldurii extrase este mai mare.

Pentru aprecierea eficacității mașinii frigorifice este deci necesar a se determina această „capacitate de lucru" a căldurii Q_0 extrase și să se raporteze această „capacitate de lucru" a căldurii extrase la energia consumată real în instalația frigorifică.

Exergia

Din cele expuse mai sus rezultă că fiecărei cantități de energie, de o formă sau alta, îi corespunde în anumite condiții ale mediului ambiant o anumită cantitate maximă de energie mecanică (sau altă formă de energie complet transformabilă) denumită mai sus „capacitate de lucru" sau „valoare" a formei de energie respective.

Pentru această „capacitate de lucru" a unei anumite forme de energie Planck a propus termenul internațional de „exergie" (de la particola latină „ex"=din, afară și cuvîntul grec „ergon"=lucru, lucru mecanic).

Expresia, ca și valoarea exergiei, depinde de forma energiei respective. Este evident că pentru forme de energie complet transformabile (energie mecanică, electrică) exergia este egală cu însăși energia.

Exergia căldurii sau exergia unui fluid în curgere continuă nu sînt egale cu energia și trebuie să se calculeze după o metodică corespunzătoare fiecărui caz.

Pentru studiul mașinii frigorifice în ansamblul ei interesează îndeosebi exergia fluidului în curgere continuă denumită și „exergia masei". De aceea în cele ce urmează se va prezenta numai metodica cu privire la stabilirea expresiei și valorii „exergiei masei" a unui fluid în curgere continuă.

Pentru a putea calcula energia mecanică maximă ce se poate obține de la un anumit fluid ce se află la o anumită stare definită prin presiunea p_1 și temperatura t_1, trebuie să se considere o succesiune de transformări reversibile de la starea inițială (p_1, t_1) pînă la o stare finală în echilibru cu mediul ambiant (p_{amb}, t_{amb}).

În cursul acestor transformări nu se dispune decît de o sursă, presupusă infinită, la temperatura t_{amb} și schimbul de temperatură se face numai la temperatura t_{amb}.

În aceste condiții nu se poate merge din starea inițială (p_1, t_1) la starea finală (p_{amb}, t_{amb}) decît urmînd transformările indicate în fig. 1-a în coordonate T-s, respectiv în fig. 1-b în coordonate p-v. Astfel 1 Kg de fluid se aspiră în cilindrul de lucru la presiunea p_1 = const. (linia a-1 în diagrama p-v). Urmează o destindere adiabatică pînă la temperatura mediului ambiant T_{amb} (punctul 2), apoi printr-o destindere izotermică se atinge presiunea mediului ambiant p_{amb} (punctul 3) — în această fază a procesului avînd loc un schimb de căldură de la mediul ambiant

către fluid $Q = Q_{2\text{-}3}$ — Fluidul, utilizat complet pentru obținerea de lucru mecanic, se evacuează din cilindru la presiunea constantă $= p_{amb}$ (linia 3-*b* în diagrama *p-v*).

Datorită proceselor complet reversibile se produce astfel un lucru mecanic maxim posibil, corespunzător suprafeței *a*—1—2—3—*b* din diagrama *p*—*v* determinată de integrala:

$$l_{max} = -\int_1^3 v\, dp. \tag{1}$$

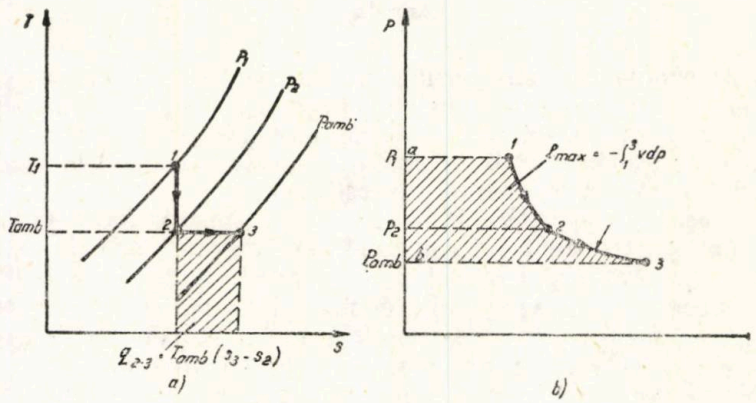


Fig. 1

Conform principiului întîi al termodinamicii.

$$dq = di - Av\, dp$$

sau

$$q_{1-3} = i_3 - i_1 - A\int_1^3 v\, dp.$$

Ținînd seama de relația (1)

$$q_{1-3} = i_3 - i_1 - Al_{max}. \tag{2}$$

Intrucît schimb de căldură se produce numai după izoterma 2—3, se poate scrie:

$$q_{1-3} = q_{2-3} = T_{amb}\,(s_3 - s_2). \tag{3}$$

Deoarece destinderea 1—2 este izentropă:

$$s_1 = s_2.$$

Deci din relația (2) și (3) se obține:

$$Al_{max} = i_1 - i_3 - T_{amb}\,(s_1 - s_3).$$

În general, considerînd starea inițială de parametri (i, s) :

$$Al_{max} = i - i_{amb} - T_{amb}\,(s - s_{amb}) \tag{4}$$

sau

$$Al_{max} = i - T_{amb}\,s - (i_{amb} - T_{amb}\,s_{amb}) \tag{4'}$$

Aceasta este expresia energiei utilizabile disponibile sau a „capacității de lucru mecanic" a unui fluid în curgere continuă pentru care Planck a propus termenul de „exergie".

$$ex = Al_{max} = i - T_{amb}\,s - (i_{amb} - T_{amb}\,s_{amb}) \tag{5}$$

Se vede din expresia (5) că „exergia" fluidului este nulă atunci cînd parametrii de stare ai fluidului de lucru sînt egalii cu parametrii mediului ambiant.

Sensul fizic al exergiei poate fi formulat în funcție de natura procesului de transformare. Dacă în proces se obține lucru mecanic pe seama variației parametrilor fluidului de lucru, atunci exergia reprezintă lucrul mecanic maxim al trecerii reversibile a fluidului dintr-o anumită stare la starea de echilibru cu mediul ambiant. Dacă, invers, în proces se cheltuiește lucru mecanic pentru a realiza trecerea fluidului de lucru dintr-o stare în alta, atunci exergia este determinată ca lucrul mecanic minim necesar pentru trecerea reversibilă a 1 Kg de fluid (în curgerea continuă) din starea de echilibru cu mediul ambiant în starea dată.

Din cele expuse rezultă că lucrul mecanic minim (sau maxim), care e necesar a fi cheltuit (sau care poate fi obținut) în cazul trecerii reversibile (în proces de curgere continuă) a unui fluid dintr-o stare inițială dată într-o stare finală dată este egal cu diferența „exergiilor fluidului" în aceste stări, ceea ce se poate exprima prin relația (scrisă pentru cazul ce interesează mașinile frigorifice) :

$$Al_{minim} = \Delta ex = ex_2 - ex_1 = i_2 - i_1 - T_{amb}\,(s_2 - s_1) \tag{6}$$

Randamentul exergetic

Noțiunea de exergie devine astfel foarte comodă pentru a examina gradul de perfecțiune a diferitelor procese în raport cu transformarea energiilor determinîndu-se variațiile exergiei în timpul procesului respectiv.

Cunoscînd valorile exergiei primite de un sistem și a exergiei extrase din sistem se poate determina un randament exergetic al procesului respectiv, ca raport al valorilor exergiei extrase Ex^- și primită Ex^+ de sistemul examinat, $\eta_{ex} = \dfrac{Ex^-}{Ex^+}$.

Dacă procesul decurge complet reversibil atunci exergia total introdusă în sistemul respectiv trebuie să fie egală cu exergia extrasă (cheltuită) în timpul procesului.

In cazul proceselor ireversibile, conform principiului al doilea al termodinamicii, entropia crește, ceeace conduce la scăderea exergiei (conform relației 5), exergia extrasă din sistem este mai mică decît exergia introdusă și această micșorare a exergiei este o măsură directă a pierderilor care se produc în timpul procesului respectiv datorită ireversibilității.

Randamentul exergetic poate fi stabilit pentru un proces de transformare studiat separat precum și pentru un ciclu de transformări ce au loc în ansamblul unei instalații anumite.

Randamentul exergetic are valoarea 1 numai în cazul procesului fără pierderi (complet reversibil), cînd exergia extrasă din sistem este egală cu exergia primită. In cazul cînd $\eta_{ex} = 0$, înseamnă că întreaga exergie primită Ex^+ se pierde, exergia extrasă $Ex^- = 0$, Ca un exemplu al unui astfel de proces este încălzirea apei în răcitoarele compresoarelor, considerată ca un proces examinat separat, în care caz căldura transmisă apei de răcire nu este folosită pentru a produce vreun efect util.

In cazul general $0 < \eta_{ex} < 1$ și procesele reale pot fi numite parțial reversibile deoarece ocupă o poziție intermediară între procesul complet reversibil și complet ireversibil.

Ca aplicare la instalațiile frigorifice cu compresie de vapori de exemplu, randamentul exergetic al mașinii frigorifice în ansamblu va fi determinat de raportul dintre exergia extrasă — respectiv variația de exergie corespunzătoare procesului de vaporizare la sursa rece a instalației — și exergia introdusă, corespunzătoare lucrului mecanic consumat de compresor, deoarece efectul util se obține la sursa rece iar exergie nu se primește decît prin lucrul mecanic al compresorului instalației.

Randamentul exergetic al mașinii frigorifice va fi maxim ($\eta_{ex} = 1$) numai pentru cazul ideal al mașinii frigorifice funcționînd după ciclul Carnot (complet reversibil). Pentru toate cazurile reale randamentul exergetic $\eta_{ex} < 1$ ceea ce se va demonstra în cele ce urmează.

Pentru a calcula deci randamentul exergetic al unui proces separat sau al unei instalații în ansamblu trebuie să se calculeze variația exergiei între diferite stări ale fluidului de lucru.

Valorile entalpiei (i) și a entropiei (s), necesare pentru calculul exergiei conform relației (5), pot fi obținute din tabelele de proprietăți termodinamice ale fluidului respectiv sau după datele obținute prin utilizarea diagramelor entropice (în coordonate T-s sau i-s) existente.

Dacă se dispune de diagrama i-s a fluidului respectiv exergia poate fi determinată foarte simplu după construcția grafică indicată în fig. 2, în care punctul A reprezintă starea fluidului cu parametrii p_{amb}, T_{amb}, iar punctul B reprezintă o stare oarecare a fluidului cu parametrii p, T.

Prin punctul A se duce o dreaptă cu panta $\frac{d_i}{d_s} = T_{amb}$ denumită în termodinamică „dreapta mediului ambiant". Segmentul BC exprimă în acest caz valoarea exergiei fluidului la starea (p, T), ceea ce rezultă direct din relația (4) deoarece

$$BD = i - i_{amb}$$

și

$$CD = T_{amb}\,(s - s_{amb})$$

Se observă că, dacă punctul B, care reprezintă o anumită stare a fluidului, se găsește sub dreapta mediului ambiant exergia va fi negativă.

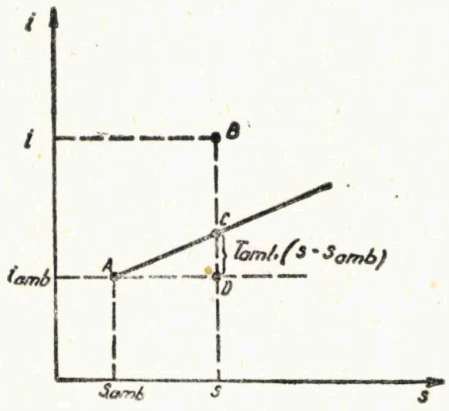


Fig. 2

adică este necesar un consum de lucru mecanic pentru a aduce fluidul din starea de echilibru cu mediul ambiant la starea dată.

Pentru determinarea variațiilor exergiei este însă și mai comod să se utilizeze o diagramă specială, exergie — entalpie. Pentru studiul mașinilor frigorifice cu compresie de vapori, utilizînd o astfel de diagramă, se pot determina cu ușurință variațiile de exergie(necesare pentru analiza perfecțiunii proceselor ce au loc în mașina frigorifică) și variațiile de entalpie (care intervin într-o serie de calcule ca : determinarea cantității de căldură primită sau cedată într-un proces izobar, determinarea lucrului mecanic consumat pentru o comprimare adiabatică sau reprezentarea procesului de laminare în care variația de entalpie este nulă).

Diagrama exergie-entalpie

Diagrama exergie-entalpie (*ex-i*) se poate construi în mod analog cu diagrama i-s. Dispoziția axelor de coordonate este însă alta : valorile entalpiilor pe abscisă iar exergiile pe ordonată.

In literatura de specialitate s-au publicat deja diagrama (*ex-i*) pentru cîteva fluide printre care : amoniac și freonul *F*-12, principalii agenți frigorifici utilizați în instalațiile frigorifice.

Intrucît în țara noastră se fabrică și compresoare pentru clorura de metil (la întreprinderile „Frigocom"-București și „Tehnofrig"-Cluj) am considerat necesar a elabora diagrama ex-i pentru acest agent frigorific.

In fig. 3 este reprezentată diagrama exergie-eutalpie pentru CH_3Cl. Diagrama a fost trasată prin puncte, ale căror coordonate au fost calculate pe baza valorilor proprietăților termodinamice ale clorurii de metil.

Diagrama este calculată considerînd temperatura mediului ambiant $t_{amb} = 20°C$, la care corespunde pentru clorura de metil o presiune de saturație $p_{amb} = 4{,}993$ ata iar entalpiile și entropiile lichidului și vaporilor saturați uscați la această stare a mediului ambiant sînt respectiv:

$$i'_{amb} = 107{,}54 \text{ Kcal/Kgf}, \quad i''_{amb} = 198{,}9 \text{ Kcal/Kgf}$$

$$s'_{amb} = 1{,}0267 \text{ Kcal/Kgf, }^{0}\text{K}, \quad s''_{amb} = 1{,}3383 \text{ Kcal/Kgf, }^{0}\text{K}.$$

În tabela 1 sînt redate valorile exergiei lichidului și vaporilor saturați uscați calculate pentru diferite valori ale temperaturii la starea de saturație, considerînd temperatura mediului ambiant de 20 C.

Tabela 1

Proprietățile termodinamice ale clorurii de metil

(Valorile exergiei au fost calculate pentru $t_{amb} = 20°C$)

t	p	i'	i''	s'	s''	ex'	ex''
°C	ata	Kcal/Kgf	Kcal/Kgf	Kcal/Kgf, °K	Kcal/Kgf, °K	Kcal/Kgf	Kcal/Kgf
— 60	0,159	78,47	188,46	0,9110	1,4271	+ 4,8301	— 36,4584
— 50	0,286	81,94	189,95	0,9270	1,4111	+ 3,6121	— 30,2804
— 40	0,484	85,45	191,41	0,9425	1,3969	+ 2,5806	— 24,6598
— 30	0,783	89,03	192,83	0,9575	1,3843	+ 1,7656	— 19,5480
— 20	1,212	92,64	194,21	0,9720	1,3732	+ 1,1271	— 14,9157
— 10	1,808	96,29	195,54	0,9862	1,3633	+ 6,6185	— 10,6850
— 0	2,609	100,00	196,75	1,0000	1,3542	+ 0,2831	— 6,8087
+ 10	3,655	103,75	197,87	1,0135	1,3459	+ 0,0776	— 3,2568
+ 20	4,993	107,54	198,90	1,0267	1,3383	0,0000	0,0000
+ 30	6,658	111,38	199,82	1,0395	1,3312	+ 0,0896	+ 3,0003
+ 40	8,690	115,27	200,63	1,0521	1,3247	+ 0,2880	+ 5,7148
+ 50	11,14	119,20	201,34	1,0645	1,3187	+ 0,5850	+ 8,1828
+ 60	14,03	123,17	201,93	1,0766	1,3130	+ 1,0093	+ 10,4429

În diagrama *ex-i* (fig. 3) curba *A-B* reprezintă curba limită de saturație a lichidului iar curba *C-D* reprezintă curba limită de saturație a vaporilor.

În domeniul vaporilor umezi izobarele—izoterme reprezintă un fascicol de drept tangente la curba lichidului (de titlu *x-o*) — la fel ca și în diagrama *i-s* — și care diverg spre curba limită a vaporilor (de titlu $x = 1$); izoterma corespunzătoare temperaturii mediului ambiant este o orizontală.

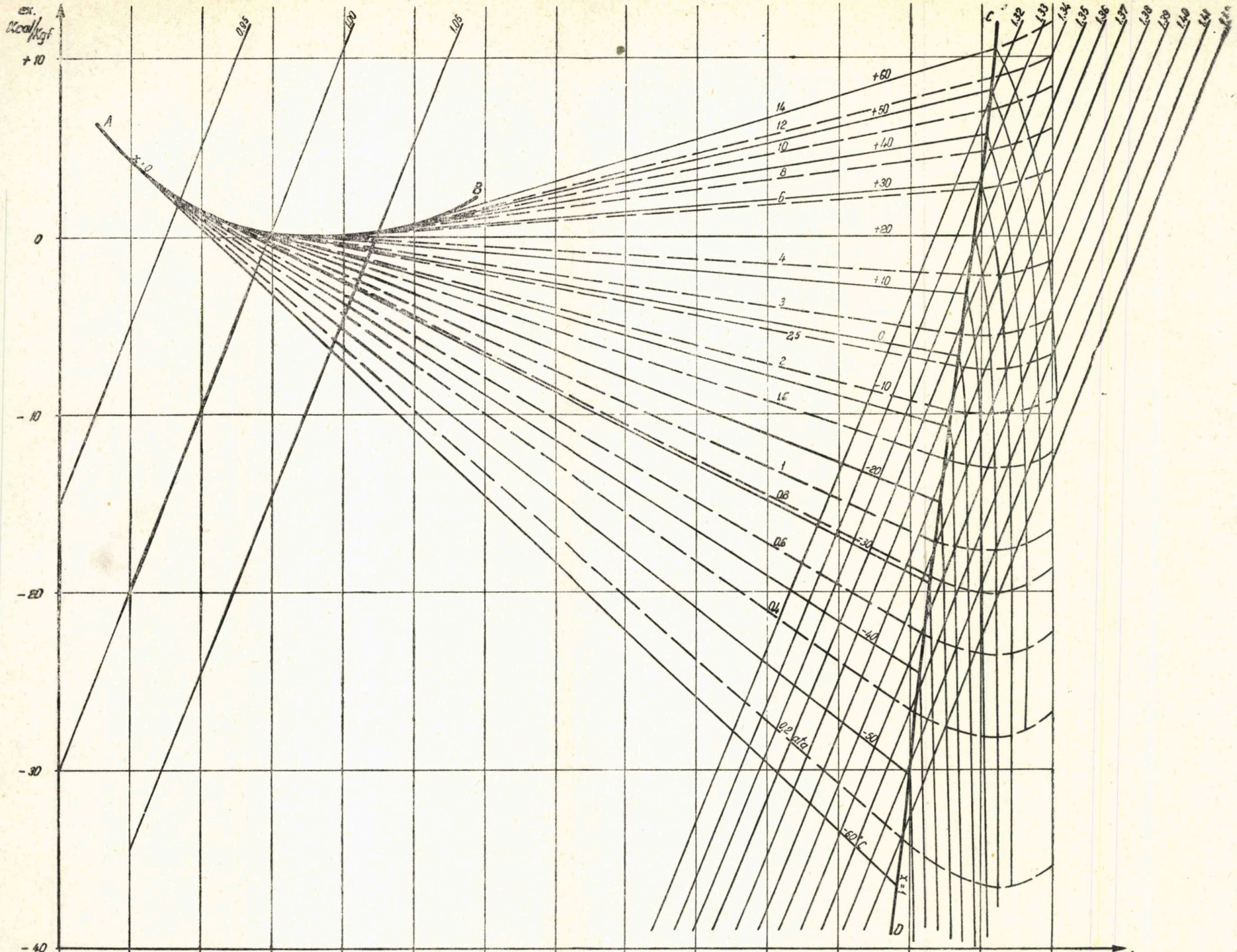


Fig. 3

Diagrama ex - i pentru CH_3Cl

În domeniul vaporilor supraîncălziți izotermele și izobarele nu mai coincid. Izotermele devin niște curbe căzătoare ce se apropie de verticală pe măsura scăderii presiunii, iar izobarele au forma unor curbe ce prezintă un minim în punctele de intersecție cu izoterma t_{amb} pentru care s-a construit diagrama exergiei. (În cazul diagramei din fig. 3 se consideră $t_{amb} = 20°C$). Cu cît crește temperatura izobarele au alura din ce în ce mai accentuată spre ridicare.

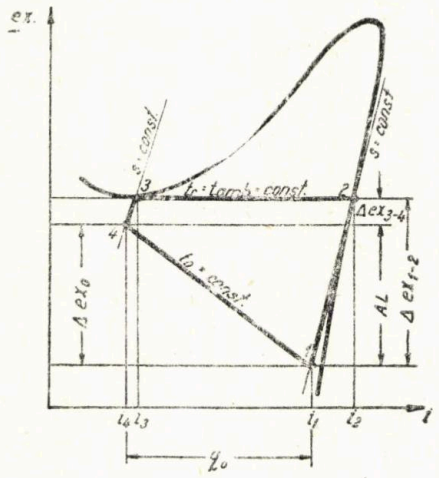


Fig. 4

Izentropele reprezintă în diagrama ex-i niște drepte înclinate.

Diagrama ex-i poate fi utilizată deci ca și diagramele cunoscute *t-s*, *i-s* sau p-i pentru determinarea parametrilor termodinamici de stare: *p*, *t*, *s*, *i*. În afară de aceasta pentru orice stare poate fi citită direct pe ordonată valoarea exergiei.

Diferența ordonatelor în diagrama ex-i, $\triangle ex$, reprezentînd variația exergiei între două puncte oarecari, indică valoarea lucrului mecanic reversibil în cazul trecerii dintr-o stare în alta. Dacă un proces de transformare oarecare este însoțit de creșterea exergiei, atunci în acest proces se consumă lucru mecanic. În cazul în care $\triangle ex < O$ (exergia scade) în procesul respectiv se produce lucru mecanic. În cazul în care $\triangle ex = O$ (punctele inițial și final sînt așezate pe o orizontală) nu există schimb de lucru mecanic (în cazul transformării reversibile).

Ținînd seama de alura curbelor de transformare în diagrama ex-i, s-a reprezentat în fig. 4 ciclul Carnot al mașinii frigorifice ideale cu compresie de vapori. Comprimarea adiabatică reversibilă în compresor are loc după izentropa 1-2. În acest caz lucrul mecanic consumat pentru comprimare poate fi determinat după diferența entalpiilor sau exergiilor în punctul inițial și final al procesului de comprimare

$$Al_{ad_{1-2}} = \Delta i_{1-2} = \Delta ex_{1-2}$$

Condensarea în condensator are loc după o izobară — izotermă de la 2-3, orizontală deoarece se consideră în cazul ideal că procesul de condensare are loc chiar la temperatura mediului ambiant.

Cantitatea de căldură cedată la condensator este determinată de diferența entalpiilor respective Δi_{2-3} iar variația exergiei este nulă.

Destinderea în mașina de expansiune, considerată în cazul ciclului ideal, are loc după izentropa 2-4, lucrul mecanic produs prin destindere fiind egal cu diferența entalpiilor sau exergiilor.

$$Al_{ad_{3-4}} = \Delta i_{3-4} = \Delta ex_{3-4}$$

Vaporizarea în vaporizator se produce după izoterma-izobară 4-1 în domeniul vaporilor umezi. Cantitatea de căldură extrasă de la mediul răcit este determinată de diferența entalpiilor Δi_{4-1} iar capacitatea de lucru a acestei călduri este egală cu diferența exergiilor Δex_{4-1}. Această mărime este importantă pentru analiza funcționării mașinii frigorifice.

Analiza eficacității mașinii frigorifice pe baza randamentului exergetic

După cum s-a arătat mai sus randamentul exergetic al mașinii frigorifice cu compresie de vapori poate fi definit ca raportul dintre variația exergiei în procesul de vaporizare — efectul util pentru mașina frigorifică — și variația exergiei corespunzătoare lucrului mecanic consumat în instalație.

$$\eta_{ex} = \frac{\Delta ex_0}{Al_c} \tag{7}$$

Pentru ciclul Carnot, conform notațiilor din fig. 4,

$$\Delta ex_0 = ex_4 - ex_1 \tag{8}$$

$$Al_c = Al_{1-2} - Al_{3-4} = ex_2 - ex_1 - (ex_3 - ex_4)$$

Intrucît pentru ciclul Carnot ideal condensarea 2—3 se face la temperatura mediului ambiant, deci 2—3 este orizontală

$$ex_2 = ex_3$$

Rezultă :

$$Al_c = ex_4 - ex_1$$

Deci :

$$\eta_{ex_c} = \frac{\Delta ex_0}{Al_c} = 1,$$

Randamentul exergetic al ciclului Carnot este maxim, reprezentînd limita superioară spre care poate tinde o instalație reală.

In fig. 5 s-a reprezentat ciclul mașinii frigorifice reale cu compresie de vapori în coordonate exergie-entalpie. În acest caz comprimarea, considerată adiabatică reversibilă are loc după izentropa 1—2, lucrul mecanic consumat pentru comprimare putînd fi determinat după diferența entalpiilor sau exergiilor între starea finală și inițială.

$$Al_{ad_{1-2}} = \Delta i_{1-2} = \Delta ex_{1-2} = ex_2 - ex_1 \qquad (9)$$

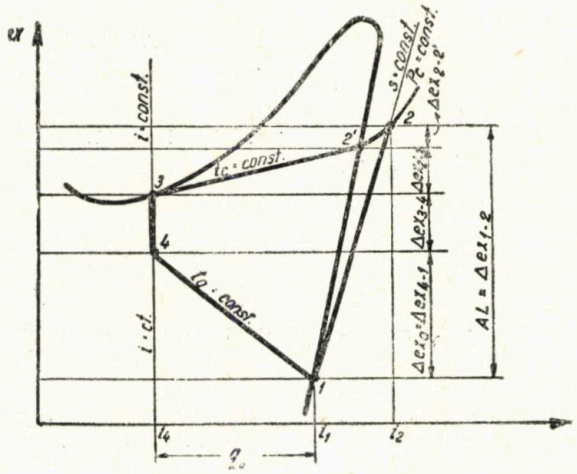


Fig. 5

Răcirea vaporilor comprimați în condensator pînă la temperatura de saturație corespunzătoare presiunii de condensare se face după izobara 2—2′ la presiunea p_c = const.

Condensarea în condensator are loc după o izobară-izotermă, dela 2′—3, care nu mai este o orizontală (ca la ciclul Carnot), deoarece procesul de condensare nu se poate face în mod real la o temperatură egală cu temperatura mediului ambiant ci la $t_c > t_{amb}$. Cantitatea de căldură cedată la condensator este determinată de diferența entalpiilor respective Δi_{2-3} iar variația exergiilor Δex_{2-3} corespunde pierderilor datorită ireversibilității procesului de condensare din ciclul real, pe deoparte datorită răcirii de la 2—2′ în care schimbul de căldură are loc la temperatură variabilă iar pe de altă parte datorită condensării dela 2′ la 3 în care schimbul de căldură are loc la temperatură constantă dar la o temperatură mai mare decît temperatura mediului ambiant.

Laminarea în ventilul de laminare (care înlocuiește în mașina frigorifică reală mașina de expansiune considerată în ciclul Carnot) fiind un proces de transformare izoentalpic are loc după verticala 3—4 ($\Delta i_{3-4} = 0$) Variația de exergie Δex_{3-4} corespunde pierderilor datorită ireversibilității procesului de laminare.

Vaporizarea în vaporizator se produce după izoterma-izobară 4—1 în domeniul vaporilor umezi. Cantitatea de căldură extrasă dela mediul răcit este determinată de diferența entalpiilor respective Δi_{4-1} iar „capacitatea de lucru" a acestei călduri extrase este egală cu diferența exergiilor Δex_{4-1}, mărime „care poate fi numită" capacitate frigorifică specifică redusă a instalației.

Randamentul exergetic al ciclului real al mașinii frigorifice, reprezentat în fig. 5 va fi deci:

$$\eta ex = \frac{\Delta ex_0}{Al} = \frac{ex_4 - ex_1}{ex_2 - ex_1} \tag{10}$$

Întrucît $ex_4 - ex_1 < ex_2 - ex_1$ rezultă că randamentul exergetic al ciclului real al mașinii frigorifice

$$\eta_{ex} < 1$$

Aceasta se explică tocmai prin pierderile datorită ireversibilității: $\Delta ex_{2-2'}$ datorită răcirii vaporilor supraîncălziți dela 2—2', $\Delta ex_{2'-3}$ datorită condensării la $t_c > t_{amb}$ și Δex_{3-4} datorită laminării în ventilul de laminare.

Pentru a exemplifica se calculează în cele ce urmează randamentul exergetic al unei instalații frigorifice cu compresie de vapori de clorură de metil (tip „Frigocom") pentru următoarele condiții date:

temperatura de vaporizare $t_o = -10°C$
temperatura de condensare $t_c = +30°C$
temperatura mediului ambiant $t_{amb} = +20°C$.

Cu ajutorul diagramei ex-i pentru clorura de metil (fig. 3) și a tabelei 1 se determină pentru ciclul mașinii frigorifice reale (fig. 5):

punctul		1	2	3	4
temperatura	°C	— 10	+ 75	+ 30	— 10
presiunea	ata	1,808	6,658	6,658	1,808
entalpia	Kcal/Kgf	195,54	210,7	111,38	111,38
exergia	Kcal/Kgf	— 10,6850	+ 4,4	0,0896	— 1,2

Conform relației (10) rezultă:

$$\eta_{ex} = \frac{\Delta ex}{Al} = \frac{ex_4 - ex_1}{ex_2 - ex_1} = \frac{-1,2 - (-10,685)}{4,4 - (-10,685)} = \frac{9,485}{15,085}$$

$$\eta_{ex} = 0,629$$

Iată deci că se poate utiliza și la studiul mașinilor frigorifice expresia unui randament, care are valoarea maximă 1 pentru ciclul Carnot complet reversibil. Randamentul exergetic, definit mai sus, permite a stabili gradul de perfecțiune al instalației în raport cu mașina ideală funcționînd după un ciclu Carnot, avînd o mai mare universalitate față de coeficientul frigorific ε întrucît permite să se aprecieze și să se compare eficacitatea instalațiilor frigorifice care au temperaturi diferite la sursa rece.

Utilizarea diagramei exergie-entalpie în studiul mașinilor frigorifice, după cum s-a analizat în cele expuse, scoate totodată în evidență pierderile datorite ireversibilității în mașina reală și cauzele ce condiționează aceste pierderi în diversele elemente separate ale instalației.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 2

ELECTRONICĂ

C. Z.: 539.17

ACCELERATOARE REZONANTE CU UNDA STAȚIONARĂ PENTRU IONI*

I. TEODORESCU, I. LUCHIAN

1. Introducere

Tendințele de desvoltare a tehnicii acceleratoarelor de particule se concretizează pe două direcții distincte: aceea a obținerii de energii cît mai mari, destinate cercetărilor în domeniul particulelor fundamentale, și aceea a obținerii de particule primare de energie medie, însă cu intensitate cît mai mare, ca injectoare pentru acceleratoare de mare energie, sau ca surse de radiații ionizante sau de neutroni, destinate cercetării fenomenelor ce se petrec în cîmpuri puternice de radiații. Această ultimă direcție, acoperă o gamă foarte variată de domenii, ca fizica solidului, chimia radiațiilor, energetica nucleară, etc. [1].

În gama energiilor mari eforturile sînt îndreptate spre reducerea amplitudinii oscilațiilor și îmbunătățirii stabilității mișcării sub toate aspectele.

În gama energiilor medii (între 0,1—10 MeV) problemele stabilității mișcării particulelor își pierd importanța primordială și lasă locul preocupării de a crește puterea fasciculului accelerat, de a îmbunătăți randamentul energetic al instalației și de a aduce ameliorări esențiale construcției acceleratoarelor în sensul reducerii dimensiunilor și a greutății, a facilităților de utilizare sau a obținerii de performanțe specifice destinației acceleratorului.

Din această categorie au fost studiate și dezvoltate cîteva tipuri de acceleratoare, care sînt în particular susceptibile la obținerea de intensități mari și randament energetic bun. Printre acestea se numără acceleratoarele directe și acceleratoarele liniare cu undă staționară.

Un număr mic de acceleratoare au fost construite pe principiul accelerării liniare rezonante cu undă staționară, folosind unul sau cîteva intervale acceleratoare cu cîmp electric longitudinal intens. [2], [3], [4], [5].

---

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 22—23 febr. 1964.

Acest tip de acceleratoare prezintă cîteva caracteristici care le avantajează față de cele directe, printre care se pot cita:

a. Simplitate în construcție și cerințe mai ușoare în ce privește precizia de execuție și aliniere a elementelor sistemului de accelerare.

b. Atît sursa de particule cît și ținta se află la potențial redus.

c. În cazul cînd se folosesc ca acceleratoare pulsate, permit o dublă acumulare de energie astfel încît se poate obține o intensitate mare a curentului de fascicul în timpul impulsului.

Acceleratorul pulsat este alimentat de un generator de impuls, care acumulează energie în timpul pauzei dintre impulsuri, într-un element reactiv, de obicei condensator și o eliberează sistemului accelerator și fasciculului, în timpul impulsului.

Acceleratorul cu undă staționară acumulează energia impulsului de alimentare în cîmpul sistemului de accelerare, care este de obicei un rezonator electromagnetic cu mare capacitate de acumulare, și o cedează fasciculului, în timpul unui impuls, de durată mult mai mică decît a primului. [6], [7].

În acest fel se evită necesitatea de a se construi generatoare de impuls de putere exagerat de mare.

Lucrările menționate, care descriu acceleratoarele de acest tip realizate, studiază mișcarea particulelor în cazurile respective, fără a căuta criteriile generale de realizare a unei situații optime din punct de vedere al energiei maxime sau al puterii maxime, pentru o valoare dată a cîmpului. În lucrarea de față se încearcă determinarea acestor condiții și se discută influența lor asupra dimensionării intervalelor acceleratoare.

2. Acceleratoare cu interval lung de accelerare

Acceleratorul cu undă staționară cu un singur interval accelerator, poate fi reprezentat schematic ca în fig. 1.

Particulele sînt injectate din sursă cu viteza v_i și capătă după accelerarea în intervalul de lungime h, în care acționează cîmpul electric $E = E_0 \cos \omega t$, viteza v_e. În afara intervalului, cîmpul este considerat nul. Dacă orificiile de intrare și ieșire a fasciculului au diametrul mic față de diametrul pereților frontali și de lungimea intervalului, o asemenea aproximație este satisfăcătoare. Mișcarea particulelor în direcția axială, este dată în acest caz de legea cunoscută

$$\frac{dp}{dt} = 3 q_0 E_0 \cos \varphi \tag{1}$$

în care p este impulsul particulei, 3 numărul de sarcini elementare pe care le poartă particula și $\varphi = \omega t$ faza instantanee a undei.

Integrînd odată, se obține după unele transformări, efectuate în scopul normării parametrilor,

$$\zeta = \zeta_i + A_0 (\sin \varphi - \sin \varphi_i) \tag{2}$$

în care

$$\zeta = \frac{p}{m_0 c} = \gamma\beta\,; \quad \gamma = \frac{W}{W_0}\,; \quad A_0 = \frac{3 q_0 E_0}{W_0}\frac{\lambda}{2\pi}\,;$$

iar indicele i corespunde mărimilor de la intrarea în intervalul accelerator.

Ecuația (2) considerată în regim relativist, este greu de integrat. Deobicei se dau valori definite pentru ζ_i, A_0, λ și pentru un anumit tip

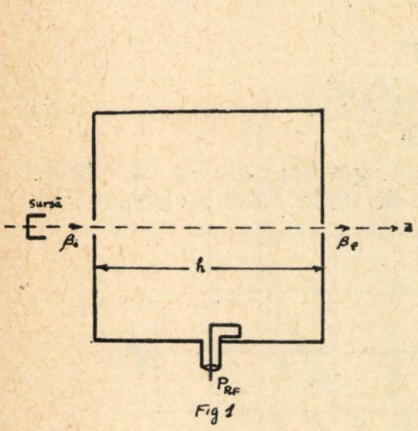


Fig 1

Fig. 1. Reprezentarea schematică a cavității rezonante acceleratoare unui accelerator cu undă staționară

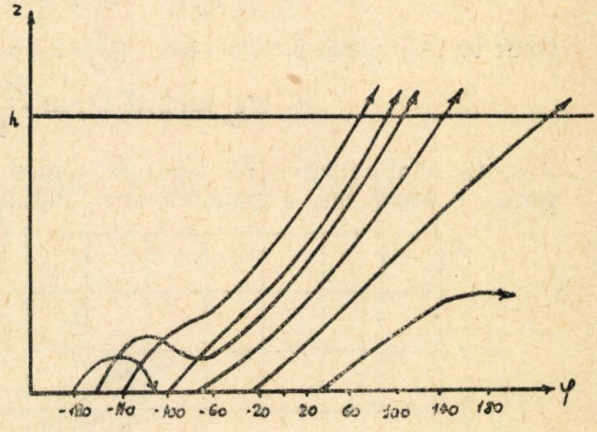


Fig. 2. Mișcarea particulelor în intervalul accelerator lung.

de particule se caută prin calcul numeric sau grafic limita superioară de integrare φ_e, în funcție de φ_i. Valorile pentru care această limită nu există, arată că particula nu reușește să străbată intervalul și este întoarsă la intrare. Mișcarea are aspectul din fig. 2.

Calculul poate fi simplificat și se pot găsi criterii generale, dacă se ține seama că pentru ioni, nu se ajunge în aceste acceleratoare niciodată la energii care să necesite corecția relativistă.

Ecuația (2) se poate scrie în acest caz ($\gamma \approx 1 \quad \beta \ll 1$)

$$\beta' = \beta'_i + (\sin\varphi - \sin\varphi_i) \tag{3}$$

care integrată, dă

$$\xi' = (\beta'_i - \sin\varphi_i)(\varphi - \varphi_i) - \cos\varphi + \cos\varphi_i \tag{4}$$

în care

$$\xi' = \frac{\xi}{A_0}\,; \quad \xi = \frac{2\pi z}{\lambda}\,; \quad \beta'_i = \frac{\beta_i}{A_0}\,.$$

Fiind dată o valoare pentru E_0, dictată de descărcările de înaltă frecvență ce se pot produce în intervalul accelerator, energia maximă se

obține pentru condițiile care dau valoarea maximă a parantezei din (3), ceea ce corespunde la $\varphi_i = -\frac{\pi}{2}$ și $\varphi_e = \frac{\pi}{2}$.

($\varphi = 0$ corespunde maximului cîmpului accelerator)

Atunci

$$\beta'_M = \beta'_i + 2 \tag{5}$$

și

$$W^{1/2}_{k_M} = W^{1/2}_{ki} + (2\,W_0)^{1/2} A_0 \tag{6}$$

Dacă se neglijează β_i (de obicei $\beta_i < 0{,}1\,\beta_e$)

$$W_{k_M} = 2\,A_0^2\,W_0 = \frac{(3\,q_0\,E_0\,\lambda)^2}{2\pi^2\,W_0}. \tag{7}$$

Această relație determină legătura dintre energia maximă ce se obține pentru o intensitate a cîmpului și o lungime de undă date. Se observă că

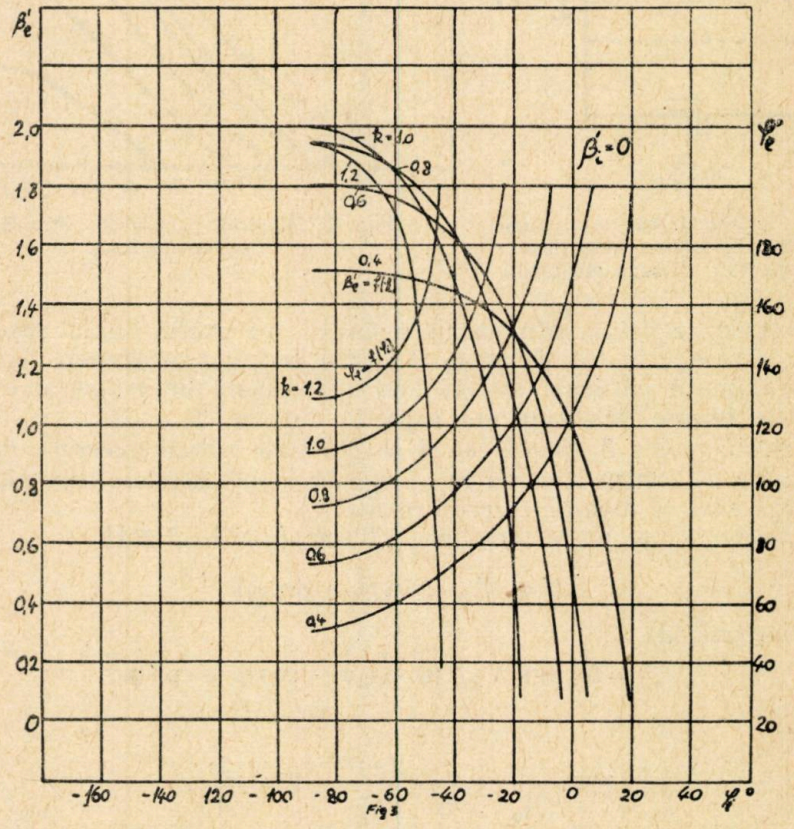


Fig. 3

Fig. 3. Variația fazei și a vitezei normate de ieșire a particulei în funcție de faza de intrare în intervalul accelerator de diferite lungimi, pentru o viteză de intrare normată $\beta i' = 0$.

energia crește cu pătratul lungimii de undă, așa că este avantajos să se lucreze la o frecvență cît mai coborîtă, alegerea rămînînd condiționată de dimensiunile sistemului rezonant.

Dacă se dorește să se obțină o energie dată, cu o valoare impusă a intensității cîmpului, se observă că există o lungime de undă minimă, sub care nu se pot realiza condițiile de accelerare.

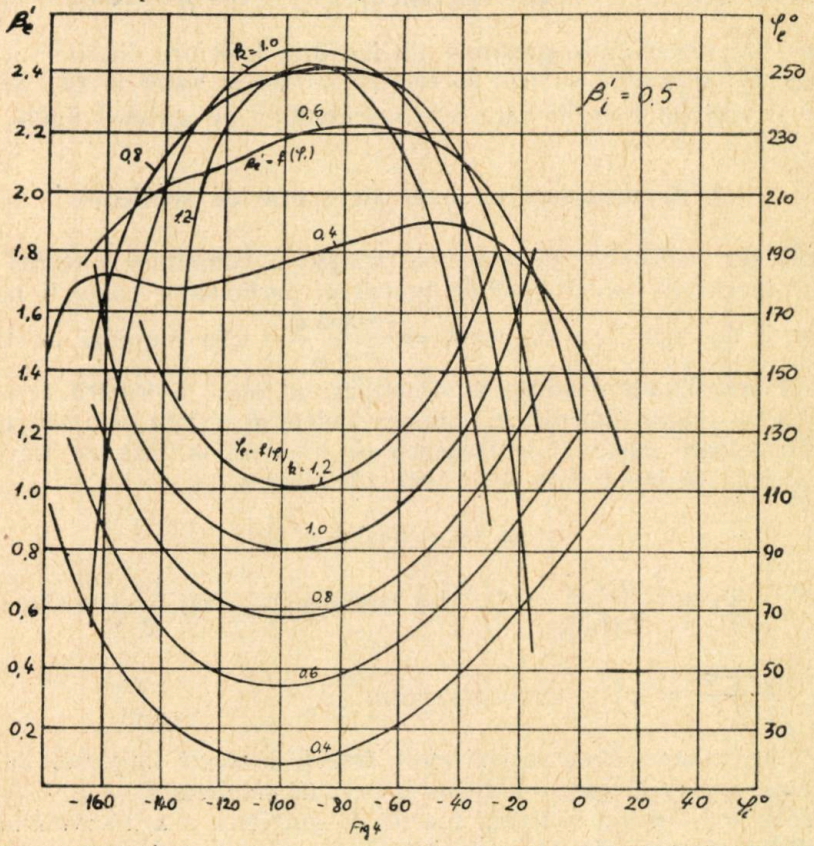


Fig. 4. Variația fazei și a vitezei normate de ieșire a particulei în funcție de faza de intrare în intervalul accelerator de diferite lungimi pentru o viteză de intrare normată $\beta i' = 0{,}5$.

Lungimea intervalului accelerator care asigură accelerarea la energia maximă, rezultă din (4)

$$\xi_M' = \pi (\beta_i' + 1) \tag{8}$$

iar dacă se neglijează β_i',

$$\xi_M = \pi A_0 . \tag{9}$$

Factorul de cîmp A_0 are semnificația vitezei particulelor la ieșire, raportată la viteza luminii, pentru cazul cînd se îndeplinesc condițiile accelerării maxime.

Relațiile deduse permit să se calculeze dependența fazei la ieșire a particulelor în funcție de faza de intrare, pentru diferite valori ale intervalului accelerator și energiei de injecție. Punînd $\xi'_e = k\,\xi'_M$ și înlocuind în (4) valoarea din (8), se obține

$$\cos\varphi_e = \varphi_i(\beta'_i - \sin\varphi_i) + [\varphi_i(\sin\varphi_i - \beta'_i) + \cos\varphi_i - k\pi(\beta'_i + 1)] \quad (10)$$

care este reprezentată în graficele din fig. 3 și 4, pentru diferite valori ale lui k și β'_i. Inlocuind valorile fazelor de intrare și ieșire în (2), se poate obține și variația energiei care este reprezentată pe aceleași figuri.

3. Acceleratoare cu intervale scurte de accelerare

Un caz particular al problemei tratate îl constituie folosirea intervalelor scurte, în care timpul de tranzit al particulelor poate fi neglijat. (Factorul de cuplaj cu cîmpul $k_c = \dfrac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}$ este apropiat de 1) [8]. Această aproximație conduce la simplificarea totală a tratării acceleratorului cu un singur interval, în care particulele ar cîștiga prin salt energia corespunzătoare tensiunii instantanee pe interval, la faza de traversare. Dar energia obținută dată de relația (3) pentru

$$\varphi_e - \varphi_i = \Delta\varphi$$

$$W_k = \frac{(z\,q_0 E_0 \lambda)^2}{2\pi^2 W_0} k_c^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 \cos^2\varphi = W_{k_M} k_c^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 \cos^2\varphi \quad (11)$$

$\left(\text{unde } \dfrac{\varphi_e + \varphi_i}{2} = \varphi\right)$ se reduce simțitor.

Pentru compensarea acestui efect, trebuie crescută lungimea de undă, în același raport în care s-a redus intervalul accelerator.

Calculînd energia cîștigată funcție de lungimea z a intervalului acceleratorului obținem din (11) și (3)

$$W_k = 3\,q_0 E_0 z k_c \cos\varphi\,. \quad (12)$$

Creșterea prea mare a lungimii de undă, poate fi evitată prin folosirea unui număr mai mare de intervale acceleratoare scurte, separate de intervale ecranate, pe care particulele sincrone le parcurg în jumătate de periodă.

La un număr mare de intervale (acceleratorul liniar al lui Wideroe) apare problema autofazării și nu ne vom ocupa de acest caz. De obicei, pentru obținerea de energii medii este suficient să se lucreze cu două sau trei intervale, ceea ce corespunde și unor posibilități facile de realizare fizică (fig. 5 a și fig. 5 b).

Dacă notăm lungimea tuburilor de alunecare

$$l_1 = \beta_{1s}\frac{\lambda}{2};\quad l_2 = \beta_{2s}\frac{\lambda}{2} \text{ unde: } \beta_i = \sqrt{\frac{2W_{ki}}{W_0}};\quad \beta_{1s} = \sqrt{2\frac{(W_{ki} + qU\cos\varphi_s)}{W_0}}$$

$$\beta_{2s} = \sqrt{2\frac{(W_{ki} + 2qU\cos\varphi_s)}{W_0}};\quad q = 3q_0 .$$

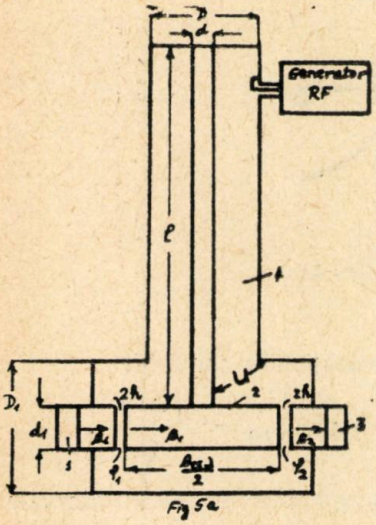


Fig. 5. a Schemă constructivă a acceleratorului liniar cu două intervale scurte de accelerare. 1) sursă de ioni, 2) tuburi de alunecare, 3) țintă 4) linie rezonantă.

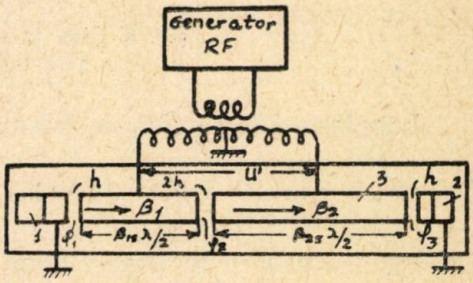


Fig. 5. b Schemă constructivă a acceleratorului liniar cu trei intervale scurte de accelerare. 1) Sursă de ioni. 2) Țintă. 3) Tuburi de alunecare.

(Indicele inferior „s" este afectat mărimilor sincrone) căpătăm pentru cazul fig. 5 a

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon\cos\varphi_s}{1+\varepsilon\cos\varphi_1}} - 1\right) \tag{13}$$

$$\beta_2 = \beta_i\sqrt{1+\varepsilon(\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1)} \tag{14}$$

unde $\varepsilon = \frac{qU}{W_{ki}} = \frac{U}{U_i}$.

În cazul fig. 5 b cu φ_2 dat de (13)

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \pi\left(\sqrt{\frac{1+3\varepsilon\cos\varphi_s}{1+\varepsilon(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2)}} - 1\right) \tag{15}$$

$$\beta_3 = \beta_i\sqrt{1+\varepsilon(\cos\varphi_1 + 2\cos\varphi_2 + \cos\varphi_3)} \tag{16}$$

semnificația lui ε în acest caz fiind $\varepsilon = \frac{qU'}{W_{ki}}$.

In fig. 7 și fig. 8 sînt reprezentate grafic curbele pentru φ_2 și β_2 în cazul (a) și φ_3 respectiv β_3, în cazul (b) pentru diferite valori ale lui ε și pentru $\varphi_5 = 0°$.

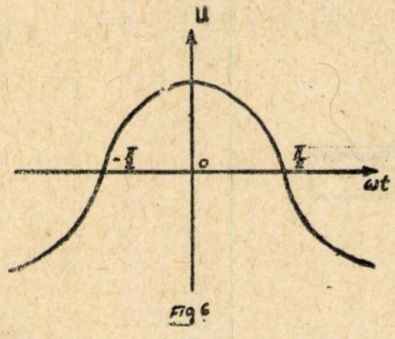


Fig. 6. Faza tensiunii în intervalul accelerator scurt.

Lungimea intervalului accelerator se determină din condițiile

$$E_0 = \frac{U}{2h} \text{ iar } \lambda \text{ din : } 2h = \beta_{1m} \frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\varphi}{\pi} \text{ unde } \beta_{1m} = \frac{\beta_l + \beta_1}{2}.$$

Energia maximă ce se poate obține la un accelerator cu două intervale este (pentru $\varphi_s = 0°$ și $\varphi_1 = \varphi_s$)

$$W_{k_M} = W_{ki} + 2qU \tag{17}$$

și pentru trei intervale

$$W_{k_M} = W_{ki} + 4qU' \tag{18}$$

U' fiind limitat de aceleași considerente ca și U rezultă că acceleratorul cu trei intervale permite obținerea unei energii mai mari.

4. Eficiența de captură și grupare

Se observă în toate cazurile examinate existența unui anumit domeniu de faze de intrare $\Delta\varphi_c$ pentru care particulele sînt captate în procesul de accelerare, adică reușesc să străbată intervalul accelerator. Definim eficiența de captură

$$\eta_c = \frac{\Delta\varphi_c}{2\pi}. \tag{19}$$

Energia particulelor emergente, are o dispersie mare, însă intensitatea particulelor cu energie mai mică scade foarte rapid. Un indiciu al grupării

energiei particulelor în jurul energiei maxime, îl reprezintă densitatea raportată la intrare. Injectorul trimite în interval particule uniform repartizate în timp

$$i_l = \omega \frac{dn}{d\varphi_l} = ct. \tag{20}$$

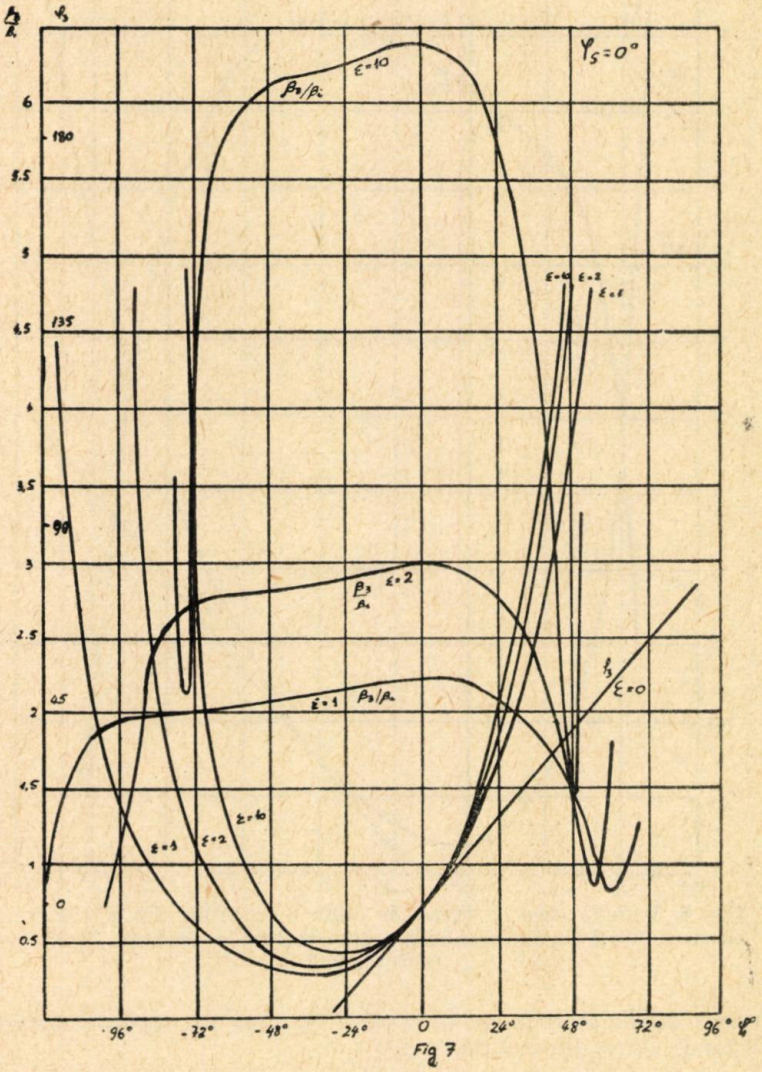


Fig. 7

Fig. 7. Variaţia fazei şi vitezei de ieşire a particulei din acceleratorul cu trei intervale acceleratoare scurte în funcţie de faza de intrare, pentru diferite valori ale parametrului ε.

După trecerea prin interval distribuția se modifică și avem factorul de grupare (sau de modificare a densității de curent în fascicul)

$$f_g = \frac{i_e}{i_i} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_e} \tag{21}$$

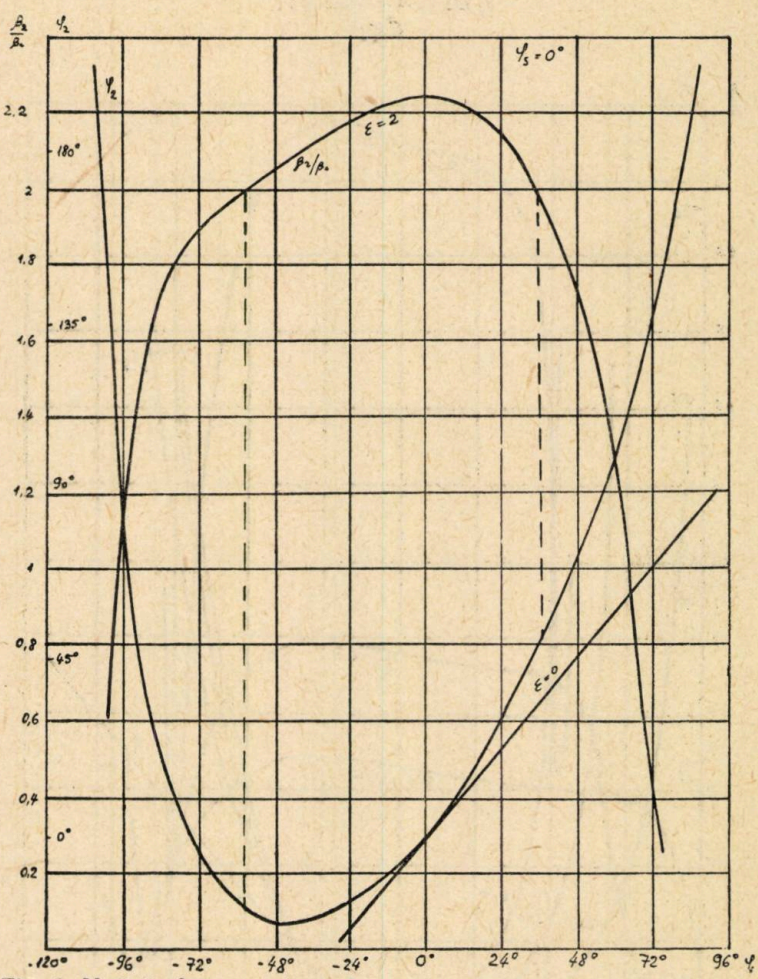


Fig. 8. Variația fazei și vitezei de ieșire a particulei din acceleratorul cu două intervale acceleratoare scurte în funcție de faza de intrare, pentru $\varepsilon = 2$.

iar valoarea medie întinsă pe intervalul de faze de captură, corespunzător unei dispersii energetice date, este

$$F_g = \frac{\Delta\varphi_c}{\Delta\varphi_e}\Bigg|_{W_{k_M} - \Delta W_k} \tag{22}$$

care dă o indicație asupra scurtării impulsului de fascicul captat, prin străbaterea intervalului accelerator.

Intrucît în majoritatea cazurilor interesează numai particulele care se încadrează într-o anumită dispersie de energie $\Delta W_k/W_{k_M}$, este normal ca pentru estimarea coeficientului de captură să se considere intervalul de faze căruia îi corespunde dispersia de energie admisă

$$\eta_c' = \frac{\Delta\varphi_c}{2\pi}\Bigg|_{W_{k_M}-\Delta W_k} = \frac{\Delta\varphi_c'}{2\pi}. \tag{23}$$

Aceste observații permit să se aprecieze eficiența acceleratorului nu numai sub aspectul energiei maxime ci și al obținerii unui curent mediu cît mai mare, ceea ce este important la acceleratoarele de ioni, la care sursa de particule este limitată în ce privește intensitatea curentului de injecție. Un criteriu de apreciere al eficienței intervalului în cazul intervalului lung de acelerare, îl constituie puterea medie a fasciculului, con-

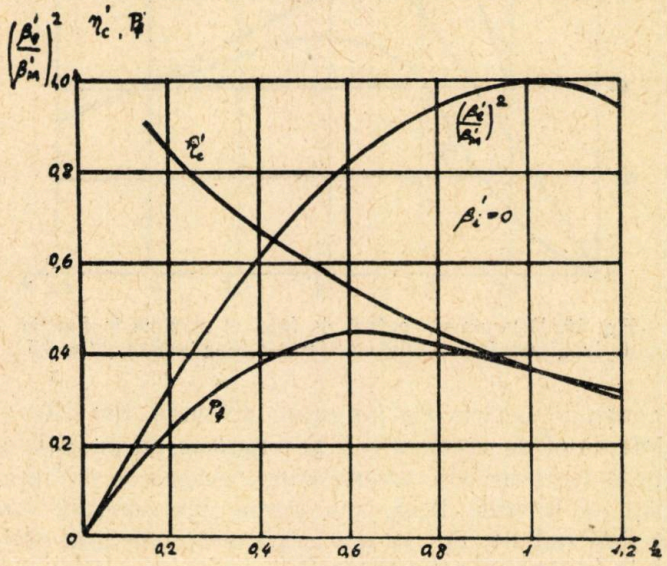


Fig. 9. Determinarea puterii de fascicul maxime în funcție de lungimea intervalului accelerator lung pentru $\beta i' = 0$.

siderînd valori date pentru curentul debitat de sursă și pentru cîmp în intervalul accelerator.

$$P_f \sim \beta_e'^2\,\eta_c'. \tag{24}$$

În fig. 9 și fig. 10 sînt trasate curbele $\left(\frac{\beta_e'}{\beta_M'}\right)^2\eta_c'$ în funcție de k, pentru $\beta_i'=0$ și $\beta_i'=0{,}5$ la acceleratorul cu interval lung. Se observă că valoarea

optimă a intervalului accelerator, care permite obținerea simultană a unei energii mari și a unei intensități mari, este de $(0,6 \div 0,7)\ \xi'_M$.

Din fig. 11 se vede că în ceea ce privește lărgimea intervalului de faze de captură, maximul se obține la $k = 0,6$ pentru $\beta'_i = 0,5$.

Puterea necesară pentru alimentarea rezonatorului se obține, dacă se dă energia necesară dorită, care determină pentru o valoare admisă a

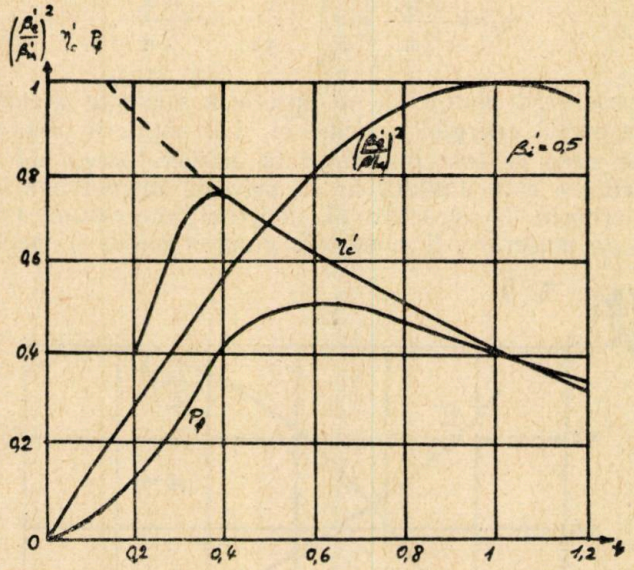


Fig. 10. Determinare puterii de fascicul maxime în funcție de lungimea intervalului accelerator lung pentru $\beta i' = 0,5$.

intensității cîmpului electric E_0, lungimea de undă, din (3), (4) și (10). Cunoscînd intervalul de accelerare h și lungimea de undă λ, se pot determina celelalte dimensiuni ale rezontatorului. Acesta se realizează, în cazul acceleratorului cu interval lung, sub forma unei cavități toroidale, linii coaxiale sau linii radiale, fig. 12 *a b c*, caracterizate prin rezistența șunt, R_s raportată la intervalul accelerator R_s.

$$P_{RF} = \frac{E_0^2 k_{opt}^2 Z_M^2}{2 R_s}. \tag{25}$$

In cazul acceleratoarelor cu intervale scurte din calculul eficienței energetice rezultă avantajul lucrului la $\varphi_s = 0°$. Acest calcul s-a făcut considerînd curentul debitat de sursă și cîmpul și tensiunea intervalelor acceleratoare constante.

Pe diagrama din fig. 8 considerăm β_M corespunzător aceleiași energii finale, deci creșterea lui ε indică în acest caz nu creșterea energiei finale, ci micșorarea energiei de injecție.

Considerînd o dispersie energetică de 20% deci o dispersie în viteză de aproximativ 10% rezultă pentru $\varepsilon = 10$ $\eta_c' = 0{,}27$ iar pentru $\varepsilon = 1$ $\eta_c' = 0{,}33$. În ceea ce privește pulsarea cazul cel mai avantajos este tot pentru faza sincronă 0°, lărgimea pulsurilor la ieșire fiind variabilă cu ε. (Pentru $\varepsilon = 10$ $\Delta\varphi_3 = 54°$ iar pentru $\varepsilon = 1$ $\Delta\varphi_3 = 67°$).

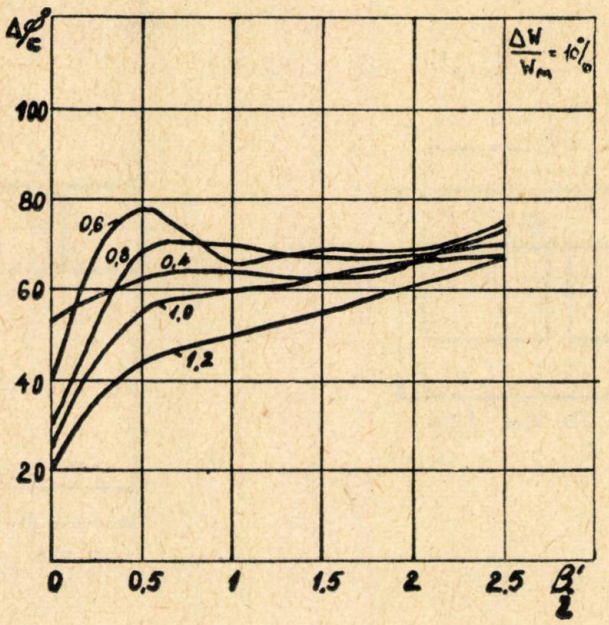


Fig. 11. Lărgirea domeniului de faze de captură în funcție de βi pentru diferite lungimi ale intervalului accelerator lung.

Pulsurile de particule obținute sînt de ordinul $\frac{T}{5} \div \frac{T}{8}$ unde T este perioada de radio frecvență.

Modul de calcul al puterii de *RF* este aproximativ același în cazul celor două construcții din fig. 5 *a* și fig. 5 *b*. În ambele cazuri inductanța echivalentă a sistemului trebuie să se acordeze la frecvența de lucru cu capacitatea proprie a sistemului accelerator.

În cazul acceleratorului din fig. 5 *a* se determină lungimea liniei coaxiale de alimentare ca impedanța inductivă pe care o prezintă să egaleze capacitatea proprie a acceleratorului.

În cazul acceleratorului din fig. 5 *b* inductanța bobinei trebuie să asigure rezonanța pe frecvența de lucru. Puterea de *RF* în cele două cazuri, dacă $2U' = U$, este:

$$P_{RF} = \frac{U^2 C \omega}{Q}$$

unde C este capacitatea intervalului accelerator de lungime h. În cazul acesta sistemul cu constante distribuite, deci acceleratorul cu două intervale este avantajos, puterea de RF necesară fiind mai mică, datorită factorului de calitate mai mare.

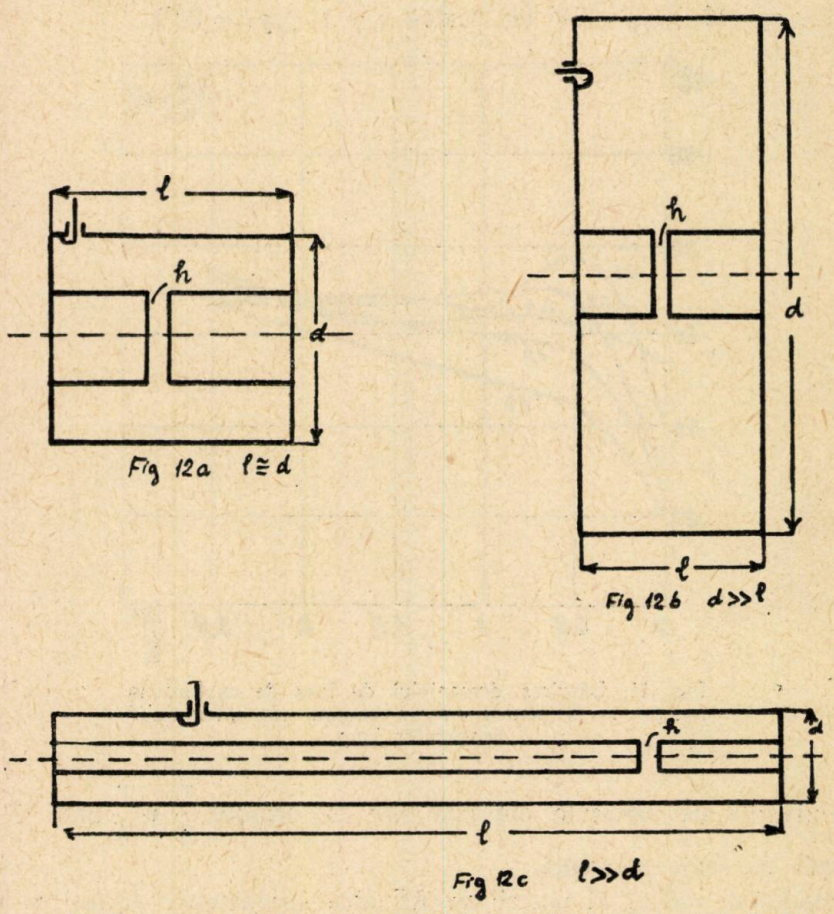


Fig. 12. Forme constructive ale intervalului accelerator lung. *a)* Cavitate toroidală. *b)* Linie radială. *c)* Linie coaxială.

Exemple

A. Un accelerator de deuteroni, cu un singur interval accelerator lung, la care se dau: energia finală 0,2 MeV, energia de injecție 10 KeV și intensitatea maximă a cîmpului accelerator de 150 KV/cm, se capătă consecutiv valorile

$$\beta_i = 3{,}22 \cdot 10^{-3}\ ;\quad \lambda = 5\ \text{m}\ ;\quad A_0 = 6{,}42 \cdot 10^{-3}\ ;\quad \beta_i' = 0{,}5\ ;\quad \xi_M' = 1{,}5\,\pi$$

și pentru $k_{opt} = 0{,}6$ rezultă $h = 1{,}45$ cm. Pentru $R_s = 4\ M\Omega$, puterea necesară este de 6 kW.

B. Un accelerator cu două intervale scurte, cu aceleași date inițiale, avînd $\varphi_s = 0°$ și $\Delta\varphi_1 = 18°$.

$$\Delta W_{k\ interval} = 95\ \text{KeV}\ ;\quad 2U_M = 95\ \text{KV}\quad 2h = 0{,}63\ \text{cm}$$
$$\lambda = 16\ \text{m}\quad T = 53{,}3\ n\ \text{sec.}$$

Durata pulsului de fascicul $\Delta T = 9$ nsec, lungimea tubului de curgere $l_1 = \beta_{1s}\frac{\lambda}{2} = 8{,}25$ cm și considerînd un Q al liniei coaxiale de aproximativ $Q = 2000$, iar $C = 10$ pF rezultă

$$P_{RF} = 9\ \text{KW}.$$

CONCLUZII

Relațiile de calcul stabilite permit să se găsească criterii generale de optimalizare a dimensionării acceleratoarelor rezonante cu undă staționară de energie medie cu un interval lung de accelerare, sau cu un număr mic de intervale scurte. S-a arătat că unul din factorii principali care determină în ultimă instanță valoarea energiei maxime, este lungimea de undă a tensiunii acceleratoare. Au fost deasemeni găsite condițiile de eficiență optimă a intervalelor acceleratoare pentru o captură bună a fasciculului emis de sursa de ioni.

Prin aplicarea unui sistem de deflecție sincronizată între sursă și accelerator, se pot introduce numai particulele din domeniul de faze de captură $\Delta\varphi_c'$ corespunzător unei dispersii energetice oricît de mici, iar prin deflectarea cu o frecvență submultiplă celei de accelerare, se obțin pachete scurte (cu durata de ordinul 1 *ns*) cu frecvență de repetiție acceptabilă. Această posibilitate este interesantă la lucrările ce folosesc metode de măsură bazate pe tehnica timpului de zbor.

Criteriile stabilite sînt aplicabile în special la dimensionarea acceleratoarelor pulsate, cînd se urmărește obținerea de intensități mari de fascicul în impuls.

Pe acest principiu este posibil să se realizeze sistemul de accelerare al generatoarelor de neutroni prin reacție DT, pentru obținerea fluxurilor de neutroni pulsate, de mare intensitate. Se poate arăta că pentru utilizarea optimă în acest scop a puterii fasciculului incident, valoarea energiei deuteronilor trebuie să fie cuprinsă între 160—180 KeV la care se obține pe o țintă de tritiu o productivitate de aproape 10^9 neutroni/W. Cu un accelerator pulsat de înaltă frecvență de acest tip, se pot obține impulsuri avînd o putere de cîteva zeci de KW, ceea ce permite realizarea unor fluxuri intense de neutroni. In plus, construcția și folosirea unui astfel de accelerator este mai ușoară, deoarece atît sursa de ioni cît și ținta se află la potențial redus, iar pentru alimentarea acceleratorului nu sînt necesare surse de tensiune înaltă sau generatoare de impuls de mare tensiune.

Catedra radiocomunicații
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *I. Teodorescu, I. Luchian:* Automatica şi Electronica, 5 (1963).

2. *P. D. Coleman:* Journ. Appl. Phys, 28, 9, 927 (1957).

3. *A. F. Clark:* et al., High current linear accelerator, U.C.R.L. 3057.

4. *А. А. Глазов* и др.: Нуклеоника 8, 2, 89 (1963).

5. *В. Т. Толок* и др.: Атомная энергия 11, 1, 41 (1961).

6. *И. А. Хижняк* и др.: Атомная энергия 11, 1, 34 (1961).

7. *V. S. Panasink* et al: High current accelerators with single turn injection into synchrotron, Int. Conf. on high energy accelerators, Dubna, 1963.

8. *Д. В. Каретников* и др.: Линейные ускорители ионов.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 7977

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 FEB 22

F 1130

REFERÁLVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII NUMĂRUL 3 ANUL 1965
MAI—IUNIE

BULETITUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. In limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS INTÉZET

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 3

MAI—IUNIE

1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici;* Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*, Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu;* Prof. *S. Gîdea;* Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor;* Prof. Dr. *Gh. Manea*, Prof. *N. Manolescu;* Prof. *St. Mantea;* Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu;* Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu;* Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet;* Prof. *A. Rău;* Prof. *Al. Spătaru;* Prof. *L. Stoicescu;* Prof. Dr. *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R P. R.

Sumar

ȘTIINȚE SOCIALE

A. Katz

Impletirea stimulilor materiali și morali ai muncii în etapa desăvîrșirii construcției socialiste și rolul interacțiunii lor în formarea conștiinței socialiste 17

MATEMATICĂ

E. Kreindler

Sur un operateur de derivation dans les modules unitaires et dans les espaces vectoriels 27

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

M. Corbu Munteanu, I. Teoreanu, M. Thaler

Considérations sur le comportement réologique des pâtes d'argile et calcaire 37

I. Cristea, Gr. Pop, Gh. Ioniță

Copolimerizarea în emulsie apoasă a acetatului de vinil cu ulei de in 57

ENERGETICĂ

C. Dinculescu, P. Buhuș

Ocolirea întreruptorilor în stații exterioare cu sisteme de bare colectoare duble și toți separatorii dispuși în linie 67

TERMOTEHNICĂ

V. Radcenco

Analiza termodinamică a proceselor teoretice de umplere și evacuare a gazului din cilindrul detentorului cu piston 77

ELECTRONICĂ

Ed. Nicolau

Sinteza unei clase de automate care modelează operatori în logici n-valențe sau funcții de timp date 101

M. Petrescu

Studiul oscilațiilor libere în circuitul *L.C.* cu capacitatea neliniară a joncțiunii p—n cu ajutorul planului fazelor 113

TRANSPORTURI

C. Ghiulai, A. Stoicescu

Au sujet de la stabilité de l'automobile au freinage 123

Al. Popa, Al. Naagu

Cu privire la determinarea vitezei de circulație a trenurilor de marfă . 145

Резюме

Д. К. 331.2

А. Кац

Сплочение материальных и моральных стимул работы в период завершения социалистического строительства и роль их взаимодействия на формирование социалистического сознания

Считая социалистическую организацию труда координатором индивидуального и общего в построении социализма, в сообщении подчеркивается в первую очередь то, что личная материальная зантересованность является выражением общих интересов посредством индивидуальных.

Рассматриваются идеологические и конкретно-исторические границы воспитательной роли материальных стимул, откуда вытекает необходимость формирования моральных стимул, которые являются выражением скачка к пониманию интересов всего общества: этот скачок может происходить только при участии идеологии.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 512.8

Е. Крайндлер

Об одном дифференциальном операторе в унитарных модулях и векторных пространствах

Автор определяет в унитарных A— модулях (A—дифференциальное кольцо с единицей) аддитивный оператор, d, который относится к произведению элемента модуля на скаляр из A, как обычная производная функций. Изучается продолжение оператора d, когда рассматривается расширение B кольца скаляров A. B отличие от производной, рассмотренной в дифференциальных алгебрах (2), оператор d, нелинейный.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 666.3 : 539.5

Н. Корбу Мунтяну, И. Теоряну, М. Талер

Соображения о реологическом поведении теста из смеси глины и известняка

Работа рассматривает реологическое поведение тест из глин и известняка, исследуя влияние природы и концентрации дисперсионного твердого тела, температуры и добавки разбавителя. Устанавливаются соответствующие соотношения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Summary

D.C. 331.2

A. Katz

The Blending of the Material and Moral Stimuli of the Work in the Stage of the Completion of the Socialist Construction and the Part Played by their Interaction in Forming the Socialist Conscience.

Considering the socialist organization work as the coordinating element of the individual and general elements in the building of socialism, the author firstly insists on the personal material incentive as an expression of the general interests by the individual ones. The ideological and concrete historical limits of the educative role of the material stimuli are analised; hence the necessity of forming the moral stimuli as an expression of the leap toward the realizing of the interests of the whole society. This leap may take place only owing to the ideological participation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 512.8

E. Kreindler

On a Derivative in Unitary Moduls and Vector-Spaces

In this paper is defined in a unitary A — modul (A differential ring with unit) an additive operator d, which acts like a derivative on the product of a modul's element with one of A. The author studies the operator d, when an extension B of A is considered. In distinction from the differential algebras derivatives /2/, d - is a nonlinear operator.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 366.3 : 539.5

M. Corbu Munteanu, I. Teoreanu, M. Thaler

Considerations on the Rheological Behaviour of the Limestoneclay Paste

The work studies the rheological behaviour of limestoneclay paste the influence of the nature and concentration of the dispersed solid; the temperature and the addition of fluidifiers. Corresponding relations are established.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 547.431.4 : 667.621.52

И. Кристя, Гр. Поп, Г. Ионица

Сополимеризация в эмульсиях винилацетат с льняным маслом

Выполнив сополимеризацию в водной эмульсии винилацетата с льняным маслом, устанавливается, что процесс протекает по общеуказанным в литературе схемам, в случае кополимеризации стирола с маслом.

Получаются дисперсии полимеров с физическими характеристиками дисперсии полуацетатвинила, но с улучшенными особенностями пленок по сравнению с гомополимерами по отношению к водостойкости.

Продукты можно успешно использовать для изготовления красок в виде эмульсии.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 621.311

К. Динкулеску, П. Бухуш

Обход выключателей наружных подстанцнй системой двойных сборных шин с линейным расположением всех разъединителей

В данной работе проводится сравнительная дискуссия в связи со схемами, применяемыми для обхода выключателей наружных подстанций со сборными двойными шинами одним выключателем на каждую цепь. Рассматривается применение схем для обходной и безобходной шины. Для подобных схем предполагаются конструктивные оригинальные решения, при помощи которых можно осуществить решения наружного типа, средней высоты, со всеми разъединителями, расположенными линейно.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 536.5

В. Радченко

Термодинамический анализ теоретических процессов наполнения и выхлопа газа из цилиндра поршневого детандера

В статье устанавливаются общие выражения температуры газа в конце процесса наполнения и в выхлопной трубе. В частности получаются более простые выражения, характеризующие случаи, когда наполнение или выхлоп происходит при постоянном объёме или при постоянном давлении.

Установленные выражения могут быть использованы при термодинамическом анализе теоретических диаграмм различных типов поршневых детандеров.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 547.431.4 : 667.621.52

I. Cristea, Gr. Pop, Gh. Ioniță

Copolymerization in Emulsion of Vinyl Acetate with Linsced Oil

In copolymerization of vinyl-acetate in an aqueous emulsion has been achieved and the work states that the process proceeds in conformity with the general schemes indicated in literature, in the case of the copolymerization of styrene with oils. There have been obtained dispersions of polymers with the physical characteristics of vinyl polyacetate dispersions ; but with the properties of pellicles improved compared to the homopolymer, especially concerning the resistance to water. The products may be used successfully in preparing emulsion dyestuff.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 621.311

C. Dinculescu, P. Buhuș

The Avoidance of Switches in External Stations, with Double Bus-bar Systems and All the Disconnecting Switches Set in Line

The present paper talks comparatively over the diagrams used for avoiding the switches in external stations with double bus-bars and a switch in the circuit. The use of diagrams for avoiding the switches with and without transfer bar is also examined.

For such diagrams are proposed original constructive solutions by means of which external distributions of an average height and all the disconnecting switches in line may be carried out.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 536.5

V. Radcenco

The Thermodynamic Analysis of the Theoretical Processes of Filling and Exhausting the Gas from the Cylinder of the Piston Detentor

The general expressions of the gas temperature at the end of the filling process in he exhaust tube are established. By particularization are obtained simpler expressions available when the filling and exhausting operations are performed in a single stage at a constant volume or pressure. The established expressions may be used in the thermodynamic study, of the theoretical diagrams of the running of different types of piston detentors.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 621.391

Ед. Николау

Синтез одного класса автоматов моделирующих операторы в *n*—значных логиках или данную временную функцию

Дан обший метод моделирования операторов *n*—значных логик с помощью конечных автоматов, которые используют только элементы, называемые нейроны. Дан также метод построения автоматов, которые моделируют данную временную функцию.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 621.38

М. Петреску

Исследование свободных колебаний в *LC*-контуре с нелинейной ёмкостью *p—n* перехода при помощи фазовой плоскости

При помощи фазовых траекторий рассматриваются условия, при которых в *LC*-контуре с нелинейной ёмкостью сплавного *p—n* перехода могут существовать свободные колебания. Показано, что свободные колебания возможны только в ограниченном диапазоне значений их амплитуды.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К. 629.113:621.316.7

К. Гюлай, А. Стоическу

По вопросу устойчивости направления автомобиля при торможении

В работе рассматривается стабильность направления автомобиля при его торможении, когда имеет место блокирование колес с одной и той же стороны, находящейся на участке пути с более низким сцеплением. чем соответствующее сцепление колес другой стороны, с учётом поперечной эластичности шин. Приведены уравнения движения, которые затем интегрируются, чем определяется боковое перемещение центра тяжести автомобиля и его угловое отклонение вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести. Теоретические результаты конкретизируютя в численном применении. Показаны также и дорожные экспериментальные испытания, результаты которых удовлетворительно совпадают с полученными теоретическими результатами, а также показан и прообразный метод регистрации и измерения отклонений.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Д. К 656.225

Ал. Попа, Ал. Неагу

Относительно скорости движения товарных поездов

Применяя отношения, с помощью которых определяется число стоянок для скрещения поездов, определяются расчетные формулы для секционной коммерческой скорости.

Установленные отношения можно использовать по случаю выполнения технико-экономических расчётов прибыльности систем тяги.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 521.391

Ed. Nicolau

Synthesis of Automata Which are Models for Operators in *n*-Valued Logics, or of Time-function Generators.

It is given a general method for the synthesis of finite-automata which are formed only with so-calld "neurons", and which are models for operators in *n*-valued logics, or of time-function generators.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 621.38

M. Petrescu

The Study of free Oscillations in the *LC* Circuit with a Nonlinear Capacity of the *p—n* Junction by Means of the Phase Plane

By means of phase paths the author studies the conditions under wlich free oscillations are to be found in the *LC* circuit, with nonlinear capacity of the *p-n* alloyed junctions. It is shown that the free oscillations are steady only in a limited range of valeus of their magnitude.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 629.113 : 621.316.7

C. Ghiulai, A. Stoicescu

On the Stability of the Direction of the Automobile at Braking

In this paper is studied the stating of the braked automobile direction, when occurs the blocking of the wheels of the same side, situated on a part of the track less adherent than the one corresponding to the wheels of the other side. The motion equations are found out, being then integrated by determining the displacement of the centre of gravity and the angular deviation of the car round the vertical axle crossing the centre of gravity. The theoretical results are materialized into numerical applications. Experimental testings on the road were as well carried out, their results corresponding satisfactorily to the obtained ttheoretical results ; in the road experiment was used an original testing method.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.C. 656.225

Al. Popa, Al. Neagu

Concerning the Traffic Speed of Goods Trains

Uisng the relations by means of which the member of haltings for the train crossings are determined, the calculus formulas for the section commercial speed are established.

The established relations may be used when performing the economic — technical calculation oi the profitableness of the traction system.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Résumé

C.D. 331.2

A. Katz

Conjuguer les stimulants matériels et moraux du travail dans l'étape du parachévement de l'edification socialiste et le rôle de leur interaction dans la formation de la conscience socialiste.

Estimant l'organisation socialiste du travail pour coordinnateur de l'individuel et du général, dans l'édification du socialisme, on insiste tout d'abord sur le coïntéressement matériel personnel en tant qu'expression par l'individuel des intérêts généraux. On analyse les limites idéologiques et concrètement historiques du rôle éducatif des stimulants matériels, d'où s'ensuit la nécessité de former des stimulants matériels, comme expression du bond vers la compréhension des intérêts de la société tout entière ; ce bond ne peut être effectué qu'avec la participation de l'idéologie.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 512.8

E. Kreindler

Sur un opérateur de dérivation dans les modules unitaires et dans les espaces vectoriels

Dans la note présente on définit dans les A modules unitaires (A anneau différentiel) un opérateur additif d qui se comporte comme une dérivation par rapport au produit d'un élément du module avec un scalaire. On étudie le prolongement de cet opérateur, lorsqu'on considère une extension B du domaine A des scalaires. Contrairement à la dérivation définie dans les algèbres et dans les espaces vectoriels (voir /2/), l'opérateur d est un opérateur non-linéaire.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 666.3 : 539.5

M. Corbu Munteanu, I. Teoreanu, M. Thaler

Considérations sur le comportement réologique des pâtes d'argile et calcaire

On étudie dans l'ouvrage le comportement réologique des pâtes d'argile-calcaire, en poursuivant l'influence que présente la nature et la concentration du corps solide dispersé, la tempèrature et le surcroît de fluidificateurs. On établit des relations corespondantes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

Zusammenfassung

D.K. 331.2

A. Katz

Die Verflechtung der materiellen und moralischen Stimulente in der Etappe der Vollendung des Aufbaues des Sozialismus und die Rolle ihrer Wechselwirkung in der Bildung des sozialistischen Bewusstseins

Indem die sozialistische Organisierung der Arbeit als Koordonator des Individuellen und Allgemeinen für den Aufbau des Sozialismus betrachtet wird, besteht man in der Arbeit zunächst auf die materielle persönliche Mitbeteiligung, als individueller Ausdruck der allgemeinen Interessen. Es werden die ideologischen und konkret historischen Grenzen der erzieherischen Rolle der materiellen Stimulente analysiert, woraus sich die Notwendigkeit der Bildung der materiellen Stimulente als Ausdruck des Sprunges zur Erkenntinins des Interessen der ganzen Gesellschaft ergibt; dieser Sprung kann nur stattfinden, wenn die Ideologie daren teilnimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 512.8

E. Kreindler

Über einen Ableitungsoperator im Einheitsmoduln und im Vektonaümen

Man führt einen additiven Ableitungsoperator d in einen Einheitsmodul über einem Differentialring ein. Mit Rücksicht auf die Vermehrung der Modulnelementen bei Ringelelementen wirkt d als eine gewöhnliche Ableitung. Der Verfasser untersucht diesen Operator im Falle dass ein Erweiterungsring B des Rings gegeben wird. Zum Unterschied der Ableitung in Differentialalgebren /2/ ist d kein Linearoperator.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 666.3 : 539.5

M. Corbu Munteanu, I. Teoreanu, M. Thaler

Betrachtung über das reologische Verhalten der Ton-Kalkstein-Pasten

In der Arbeit studiert man das reologische Verhalten der Ton-Kalkstein Pasten, verfolgend den Einfluss des die Natur und die Konzentration des verstreuten festen Körpers, die Temperatur und die Zugabe von Fluidifikatoren zuholen. Man stellt entsprechenden Beziehungen fest.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 547.431.4 : 667.621.52

I. Cristea, Gr. Pop, Gh. Ioniță

La copolymérisation en émulsion de l'acétate de vinyle à huile de lin

On a réalisé la copolymérisation en émulsion aqueuse de l'acétate de vinyle avec huile de lin et on a établi que le processus se déroule selon les schémas généraux indiqués dans la littérature dans le cas de la copolymérisation de styrène avec huiles. On a obtenu des dispersions de polymères avec les caractères physiques des dispersions de polycétate de vinyle mais ayant des propriétés des pollicules améliorées par rapport au homopolymère surtout en ce qui concerne la résistence à l'eau. Les produits peuvent être utilisés ayant de bons résultats dans la préparation des teintes en émulsion.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 621.311

C. Dinculescu, P. Buhuş

Détour des interrupteurs dans des stations extérieures à systèmes de barres collectrices doubles et tous les séparateurs disposés en ligne

Dans cet ouvrage l'on fait une discussion comparative des schémas qu'on utilise pour le détour des interrupteurs dans les stations extérieures à barres collectrices doubles avec un interrupteur dans le circuit. On examine l'utilisation des schémas pour le détour des interrupteurs avec ou sans barres de transfert. Pour de tels schémas on propose des solutions constructives originales à l'aide desquelles on peut réaliser des dispositions de type extérieur, de hauteur moyenne, avec tous les séparateurs en ligne.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 536.5

V. Radcenco

Analyse thermodynamique des processus théoriques pour remplir et évacuer le gaz du cylindre du détenteur à piston

On établit dans l'ouvrage les expressions générales de la température de gaz à la fin du processus de remplissage et dans la conduite d'évacuation. En particularisant on obtient des expressions plus simples valables pour les cas où le remplissage et l'évacuation sont réalisés pendant une seule étape à volume constant ou à pression constante. Les expressions établies peuvent être utilisées dans l'étude thermodinamique des diagrammes théoriques de fonctionnement des différents types de détenteurs à piston.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 547.431.4 : 667.621.52

I. Cristea, Gr. Pop, Gh. Ioniță

Die Kopolymerisierung in Emulsion des Vinylazetates mit Leinöl

Es wurde die Kopolymerisierung in wässeriger Emulsion des Vinylazetates mit Leinöl durchgeführt und festgestellt, dass der Vorgang gemäss der allgemeinen in der Literatur angegebenen Schemata, wie im Falle der Kopolymerisierung des Styrens mit Ölen, verläuft. Es wurden Polymerisierungsdispersien mit den physischen Charakteristiken der Polyazetat-Vinyl-Dispersien, aber mit verbesserten Eigenschaften der Filme im Vergleich zum Homopolymer, besonders was die Wasserbeständigkeit anbelangt, erhalten. Die Erzeugnisse können mit guten Ergebnissen bei der Bereitung der Farben in Emulsion verwendet werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 621.311

C. Dinculescu, P. Buhuș

Umgehung der Schalter in Freiluftstationen mit Systemen von doppelten Sammelschienen und allen in der Reihe angelegten Trennschaltern

In der Arbeit erfolgt eine vergleichende Besprechung der Schaltungen, welche in den Freiluftstationen zur Umgehung der Schalter mit doppelten Sammelschienen und je einem Schalter im Stromkreis, verwendet werden. Es wird die Anwendung der Schaltungen zur Umgehung der Schalter mit und ohne Uebertragungsschiene untersucht. Für solche Schaltungen werden originelle konstruktive Lösungen vorgeschlagen mit deren Hilfe Freiluftanlagen mittlerer Höhe mit allen in der Reihe angelegten Trennschaltern, realisiert werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 536.5

V. Radcenco

Die thermodynamische Analyse der theoretischen Abläufe der Füllung und Entleerung des Gases in dem Detentorzylinder mit Kolben

In der Arbeit werden die allgemeinen Ausdrücke der Temperatur des Gases am Ende des Füllungsprozesses und im Entleerungsrohr aufgestellt. Durch Vereigenheitlichung erhält man einfachere Ausdrücke, die für die Fälle, in denen die Füllung oder Entleerung in einer Etappe durchgeführt wurde gültig sind: bei konstanten Volumen oder konstantem Druck. Die festgestellten Ausdrücke können beim thermodynamischen Studium der theoretischen Arbeitsdiagramme der verschiedenen Arten von Detentoren mit Kolben, verwendet werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 521.391

Ed. Nicolau

Synthèse d'une classe d'automates qui sont des modèles des opérateurs dans des logiques *n*-valentes ou des modèles de générateurs de fonctions de temps.

On donne une méthode générale pour la réalisation des automates constitués avec des éléments nommés „neurones" et qui sont des modèles des opérateurs dans des logiques *n*-valentes ou des générateurs de fonctions de temps.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 621.38

M. Petrescu

Étude des oscillations libres dans le circuit *L.C.* à capacité nonlinèaire de la jonction *p—n*, à l'aide du plan des phases.

A l'aide des trajectoires de phase on étudie les conditions dans lesquelles peuvent exister des oscillations libres dans le circuit *L.C.* à capacité non linéaire de la jonction *p-n* alliée. On montre que les oscillations libres sont stables seulement dans une gamme limitée de valeurs de leur amplitude.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 629.113 : 621.316.7

C. Ghiulai, A. Stoicescu

Au sujet de la stabilité de l'automobile au freinage

On présente le calcul de la déviation d'une automobile au freinage, au cas du blocage des deux roues du même coté. On étudie la stabilité de direction dans ces conditions particulières, compte tenu de l'élasticité transversale des pneus, en établissant l'équation du mouvement du centre de gravité de l'automobile et celle de la déviation angulaire de son axe longitudinal par rapport à un axe vertical par le centre de gravité.

Les résultats théoriques sont concrétisés par leur application numérique au cas d'une voiture automobile. On présente ensuite les résultats des vérifications pratiqués par des essais sur route de la même voiture, qui sont en concordance avec les résultats théoriques ; aux essais expérimentaux on a employé une méthode originale d'enregistrement et mesure.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

C.D. 656.225

Al. Popa, Al. Neagu

Concernant la vitesse de circulation des trains de marchandises

En utilisant les relations à l'aide desquelles on détermine le nombre de stationnements pour le croisement des trains, on établit des formules de calcul pour la vitesse commerciale de section.

Les relations établies peuvent être utilisées quand on effectue des calculs technico-économiques de rentabilité des systèmes de traction.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 621.391

Ed. Nicolau

Synthese von Automaten welche Modelle für Operatoren in *n*-wertiger Logik, oder für Zeitfunktionengeneratoren sind.

Man gibt eine allgemeine Methode für die Synthese von Automaten die nur mit sogennanten „Neuronen", gebildet sind und welche Modelle für Operatoren in *n*-wertiger Logik, oder für Zeitfunktionengeneratoren sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 621.38

M. Petrescu

Das Studium der freien Schwingungen im *L.C.* Kreislauf mit unliniärer Kapazität den *p—n* Anschlüsse mit Hilfe des Phasenplans

Mit Hilfe der Phasenbahnen werden die Bedingungen in welchen freie Schwingungen im *L.C.* Kreislauf mit unliniärer Kapazität des verbundenen *p-n* Anschlusses, bestehen können. Es wird gezeigt, dass die freien Schwingungen nur in einer beschränkten Reihe von Werten ihrer Amplitude, stabil sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 629.113 : 621.316.7

C. Ghiulai, A. Stoicescu

Über die Richtungsstabilität des Kraftwagens beim Bremsen

In der Arbeit wird die Richtungsstabilität des gebremsten Kraftwagens unersucht, im dem Falle wenn die Räder derselben Seite auf dem Teil einer Strasse mit kleinerer Kraftschlusbeiwert als die entsprechende der andren Seite blockiert werden, mit Berücksichtigung der seitliche Reifenelastizität. Es werden die Gleichungen der Bewegung festgestellt, dann integriert, und dadurch die seitliche Abweichung des Schwerpunktes und die Winkelverschiebung des Wagens um die Senkrechte der durch den Schwerpunkt verlaufenden Achse bestimmt. Die theoretischen Ergebnisse werden in einer zahlenmässigen Anwendung konkretisiert. Es wurden ausserdem auch Strassenversuche unternommen, deren Resultate mit den theoretischen Ergebnissen zufriedenstellend übebreinstimmen; bei der Experimentierung wurde ein originelles Verfahren angewendet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

D.K. 656.225

Al. Popa, Al. Neagu

In bezug auf die Verkehrsgeschwindigkeit der Güterzüge

Es werden die Berechnungsformeln für die Handelsgeschwindigkeit der Abteilung aufgestellt, indem man die Beziehungen, mit deren Hilfe die Zahl der Haltestellen für die Kreuzung der Züge bestimmt werden, benützt.

Die festegestellten Beziehungen können bei den technischwirtschaftlichen Berechnungen der Rentabilität der Traktionssysteme verwendet werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 3/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

ȘTIINȚE SOCIALE

C.Z. 331.2

ÎMPLETIREA STIMULILOR MATERIALI ȘI MORALI AI MUNCII ÎN ETAPA DESĂVÎRȘIRII CONSTRUCȚIEI SOCIALISTE ȘI ROLUL INTERACȚIUNII LOR ÎN FORMAREA CONȘTIINȚEI SOCIALISTE *)

ANA KATZ

În actuala etapă, etapa desăvîrșirii construcției socialiste, victoria noului în lupta sa cu vechiul — lege generală a progresului social — se afirmă în toate sectoarele în țara noastră, ca urmare a cotiturii radicale pe care revoluția socialistă a înfăptuit-o în formele de organizare a vieții sociale.

În procesul luptei pentru construcția bazei economice a socialismului a avut loc mai întîi o cotitură radicală în formele organizării sociale a muncii. Ca o consecință a acestei reorganizări — desfășurată treptat pe baza extinderii și victoriei relațiilor socialiste în întreaga economie națională, *munca în cadrul relațiilor de producție socialiste a devenit fenomenul fundamental* și de masă al societății socialiste în țara noastră.

Relațiile de producție socialiste, relații de colaborare și ajutor reciproc între oamenii muncii, constituie în prezent raportul dominant în procesul muncii. Ele sînt canavaua existenței sociale și forja conștiinței sociale noi, socialiste a oamenilor muncii.

Considerînd organizarea socialistă a muncii ca izvor al unor stimuli materiali și morali calitativ noi, prezenta comunicare își propune să analizeze interacțiunea acestor stimuli și influența pe care la rîndul lor o exercită asupra muncii înseși.

Se impune de la început constatarea că *noul conținut al organizării socialiste a muncii și-a creat și forme de manifestare cu desăvîrșire noi.*

Astfel, de pildă, în cadrul organizării socialiste a muncii întregul produs al activității productive a muncitorilor și țăranilor se reîntoarce la producători, fie sub forma salariului individual și social, a veniturilor primite în gospodăria colectivă sau întovărășire, fie sub forma investițiilor pentru dezvoltarea forțelor de producție care, asigurînd dezvoltarea în ritm susținut a economiei naționale și înzestrarea ei cu tehnica înaintată, se resfrîng de asemeni asupra creșterii nivelului de trai. În trecut orizontul

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 22—23 februarie 1964.

oamenilor muncii se limita cel mai adesea la obsesia de a face față greutăților vieții, la obsesia salariului, a banilor, iar conținutul însuși al muncii rămînea pentru muncitorul și țăranul exploatat ceva străin, indiferent în raport cu propriile lui necesități — pe care le acoperea în limitele și adesea sub limitele echivalentului forței sale de muncă (restul produsului muncii sale asigurînd huzurul clasei exploatatoare parazitare). În prezent atît în industrie cît și în agricultura socialistă oamenii muncii desfășoară o activitate al cărei conținut este cît se poate de concret pentru ei : acest conținut este dat de satisfacerea crescîndă a propriilor lor necesități ; el se vădește în dezvoltarea impetuoasă a economiei naționale, în obiectivele industriale și în orașele noi ale țării, în ridicarea regiunilor înapoiate, în înflorirea patriei noastre.

Astfel, în cadrul relațiilor socialiste oamenii muncii sînt interesați atît în crearea bunurilor care asigură dezvoltarea mai departe a bazei materiale a societății, cît și a obiectelor de consum individual sau a acelor bunuri pe care societatea le pune la dispoziția tuturor : case de odihnă și biblioteci, parcuri și teatre, spitale și instituții de cultură, creșe, grădinițe și școli pentru copii. *Fiecare muncește pentru sine și pentru societate*, fiecare produce pentru toți și toți produc pentru fiecare valorile materiale și spirituale pe care societatea le oferă oamenilor muncii, pe care ei și le oferă lor înșiși.

În cadrul relațiilor socialiste produsul muncii este pentru prima dată redat oamenilor muncii, avuția națională este avuția întregului popor. Spre deosebire de capitalism societatea socialistă crează posibilitatea ca munca și satisfacerea reală a necesităților individului care muncește să devină complementare ; aci munca și satisfacerea necesităților coincid. Totodată devin complementare muncile și interesele materiale ale tuturor muncitorilor, ale tuturor țăranilor colectiviști și întovărășiți. Pe acest fond ia naștere coincidența intereselor fundamentale ale celor două clase principale, clasa muncitoare și clasa țăranilor colectiviști precum și ale intelectualității. Prin muncă cetățeanul se identifică cu societatea socialistă, ea este calea prin care individul aduce societății aportul său util și totodată ea constituie criteriul aprecierii lui de către societate.

Ca aport necesar societății, munca este nu numai un drept — consacrat prin constituție — dar și o datorie socială, în sensul că lichidînd exploatarea unora și viața parazitară a altora — societatea socialistă cere fiecăruia din membrii săi întreaga sa capacitate de muncă. Dreptul și datoria de a munci sînt astfel indisolubil legate și exprimă o unitate dialectică de contrarii, în cadrul organizării socialiste a muncii ; înțelegerea interdependenței lor creiază disciplina conștientă a muncii, care în societatea socialistă ia treptat locul constrîngerii exterioare.

Dînd membrilor societății dreptul de a munci, dublat de obligația de a munci, organizarea socialistă a muncii permite totodată exercitarea lor la un nivel tot mai ridicat, pe baza tehnicii și științei contemporane. Un rol de o deosebită importanță pentru ridicarea nivelului tehnic al muncii și ridicarea productivității muncii l-a avut Hotărîrea C.C. al P.M.R. și a Consiliului de Miniștri din 1960, care a concretizat linia introducerii tehnicii moderne în cadrul industrializării socialiste. În legătură cu acest

proces, cerința asigurării mîinii de lucru calificate a determinat apariția și dezvoltarea în întreprinderi a unor forme variate de calificare atît a muncitorilor, cît și a personalului tehnic și de conducere din economie.

Organizarea socialistă a muncii apare astfel ca un *coordonator* al calificării profesionale și al dezvoltării multilaterale a individului, ea acordează ritmul dezvoltării individuale cu cel al dezvoltării sociale, *canalizează individualul și generalul* pe făgașul unic al cerințelor construcției socialismului.

II

Organizarea socialistă a muncii a însemnat pe lîngă crearea unei noi situații a oamenilor muncii ca producători, crearea unei situații calitativ noi a oamenilor muncii ca consumatori, întrucît organizarea socialistă a muncii e însoțită de un nou principiu de repartiție, repartiția după muncă.

Spre deosebire de noua situație a oamenilor muncii ca producători, (caracterizată și printr-un conținut nou și prin forme organizatorice noi) situația lor calitativ nouă ca consumatori apare în prima fază a societății socialiste legată de forme economice preluate, constînd în persistența salariului, a banilor. Aceste forme exprimă însă, după cum vom vedea, într-un fel *mijlocit*, aceleași relații socialiste, aceeași *esență nouă*, același *conținut nou al organizării socialiste*. Așadar, organizarea socialistă a muncii apare, ca orice fenomen al vieții sociale, ca o unitate dialectică de laturi contrarii, dar indisolubil legate între ele.

Interacțiunea, mișcarea internă a laturilor contrarii reprezentate de nou și vechi, este de asemenea natură încît ponderea noului determină în condițiile acțiunii legilor economice obiective ale socialismului dezvoltarea noii esențe a activității de producție în socialism — a unității calitativ noi a producției și consumului.

În cadrul noii unități a producției și consumului, consumul este proporțional cu munca depusă ; fiecare om al muncii consumă ceea ce obține prin schimbul de activități. Această latură a organizării socialiste a muncii — se dezvăluie maselor și devine limpede în primul rînd prin *stimulii materiali* generați de organizarea socialistă a muncii, stimuli care pun în mișcare masele de producători.

În perioada construcției bazei economice și a desăvîrșirii socialismului se manifestă între producție și consum o contradicție neantagonică.

Datorită lichidării proprietății private capitaliste activitatea de producție și-a regăsit în satisfacerea necesităților societății, în asigurarea consumului oamenilor muncii țelul și stimulul social firesc. Scopul și stimulul intern al producției socialiste este satisfacerea necesităților sociale ale oamenilor muncii. În întîmpinarea acestui stimul intern al producției vine politica economică a P.M.R., politica de cointeresare materială a producătorilor. În afară de rezultatele ei economice, cointeresarea materială a producătorilor este una din metodele prin care P.M.R. clarifică în conștiința fiecărui producător în parte — a maselor în genere — rolul pe care-l joacă aportul lor în economia națională.

Politica de cointeresare materială joacă deci rolul unui principiu organizator al eforturilor depuse sub conducerea P.M.R. de clasele fundamentale ale societății pentru creșterea producției și productivității muncii. Acestui scop i-au fost subordonate toate măsurile de cointeresare adoptate de plenarele C.C. al P.M.R. și de Consiliul de Miniștri începînd din 1953. Un rol deosebit a revenit Hotărîrilor din ultimii ani ale C.C. al P.M.R. de îmbunătățire a salarizării, care au scos în evidență legătura directă dintre dezvoltarea forțelor de producție și creșterea productivității muncii pe de o parte și creșterea retribuției pe de altă parte ; legătura dintre muncă și recompensarea ei în socialism ; legătura dintre interesul general și cel individual în economia socialistă. Ca urmare a Hotărîrilor privitoare la îmbunătățirea salarizării s-a lărgit sfera consumului, oferindu-se astfel în ultimă instanță un nou stimul producției.

Veriga principală în politica cointeresării materiale a fost și este cointeresarea individuală. Stabilirea unui stimul material individual eficient este puntea spre înțelegerea de către fiecare om al muncii în parte, *a coincidenței dintre interesele sale individuale și interesele generale ale societății.*

Dar stimulul material apare și ca o expresie a coincidenței dintre interesele generale ale societății și interesul particular al unei clase sau pături sociale anumite. Atunci cînd dezvoltarea economică o cere stimulul material este folosit în vederea ridicării unei anumite ramuri a economiei socialiste. Astfel, în ramura mineritului stimularea cointeresării materiale a dus la creșterea producției și productivității muncii și totodată la creșterea cîștigului mediu al minerilor cu 75% în 1959 față de 1955. În agricultură, în sectorul zootehnic aplicarea retribuției suplimentare pe baza sporului de producție obținut a dus de asemeni la ridicarea întregii ramuri. Retribuirea colectiviștilor după zilele muncă prestate, a căror valoare se stabilește în funcție de venitul realizat prin munca tuturor membrilor gospodăriei este de asemeni o formă de înfăptuire a interesului individual prin cel colectiv. Odată cu venitul individual crește proprietatea obștească. De pildă, în gospodăriile dobrogene veniturile bănești au crescut față de 1957 de 7 ori, ajungînd la peste 850 milioane lei în 1963 (la 100 de ha circa 148.300 lei) iar fondul de bază a crescut de 6 ori, ajungînd la peste 800 milioane (cca. 139.000 lei la 100 de ha). (Scînteia nr. 6189).

În toate cazurile, aplicarea de către organele economice ale statului nostru, pe baza directivelor P.M.R., a stimulilor materiali ai muncii a făcut ca interesele *generale* ale societății să capete pentru fiecare om al muncii conținutul *concret* al folosului imediat, obținut prin munca proprie : „Punțile durabile către comunism nu se construiesc nemijlocit pe entuziasm, ci cu ajutorul entuziasmului născut de revoluție, pe bază de interes personal, de cointeresare materială" (Lenin).[1]) Ca atare, *cointeresarea materială a fiecărui om al muncii reprezintă expresia prin individual a particularului (interesele fiecăreia din clasele fundamentale ale societății) și a generalului (interesele întregii societăți).* În cadrul politicii de cointeresare materială pe baza principiului socialist de repartiție se dezvăluie

[1]) V. I. Lenin, Opere vol. 33, pag. 39—40.

noua legătură, specifică socialismului, dintre oamenii muncii în calitatea lor de producători și consumatori : modul în care, sub forma schimbului de mărfuri, are loc un schimb de activități, modul în care *munca pentru sine este muncă pentru societate și invers*. În cadrul politicii de cointeresare materială pe baza principiului socialist de repartiție se evidențiază faptul că interesele individuale ale membrilor principalelor clase și pături de oameni ai muncii pot fi satisfăcute numai ca interese *sociale*, adică în subordonarea lor firească față de interesele generale.

Determinată de baza materială, repartiția socialistă conține în sine germeni ai repartiției comuniste constînd în acea parte a venitului social care se repartizează sub forma salariului social, prin care unele din necesitățile individuale ale oamenilor muncii sînt satisfăcute nu proporțional cu munca prestată, ci în funcție de necesități, ca de pildă gratuitatea școlarizării, gratuitatea manualelor școlare pentru cl. I—IX, alocațiile de stat pentru copii, asistența medicală gratuită, etc. În cazul concediilor de muncă, al asigurării odihnei, al burselor, criteriul muncii prestate se împletește cu cel al necesității. Pe măsura dezvoltării bazei materiale a societății și a dezvoltării conștiinței socialiste va crește partea produsului social repartizată exclusiv în funcție de necesități. Înfăptuirea programului de perspectivă al dezvoltării economiei naționale, ale cărei linii directoare au fost adoptate de Congresul al III-lea al P.M.R. va face posibilă : „trecerea treptată de la principiul repartiției după muncă la principiul repartiției după nevoi, asigurîndu-se întregului popor condiții de viață demne de epoca socialismului victorios și a construcției comuniste". [1])

III

Urmărirea raportului dialectic dintre muncă și repartiție scoate la iveală dubla funcție socială a retribuției socialiste a muncii. Am analizat mai sus una din laturile acestei funcții : noul rol *economic* al stimulilor materiali ai muncii generați de baza unitară a socialismului. Subordonat intereselor generale ale oamenilor muncii, stimulul material duce la consolidarea unității sociale a celor ce muncesc. Realizarea acestei unități dintre individ și societate — diametral opusă „înstrăinării' individului în capitalism — stă la baza rolului *educativ* al stimulilor materiali ai muncii în etapele construcției socialiste — rol care face parte integrantă din noua lor funcție socială.

Noii stimuli materiali ai muncii acționează nemijlocit asupra psihologiei omului muncitor, contribuind la formarea noilor sale deprinderi socialiste de muncă și totodată pregătesc terenul pentru formarea stimulilor morali ai muncii. Cel de al doilea moment este legat de faptul că stimulul material aduce în conștiința omului muncitor atît propriul său loc în cadrul producției socialiste cît și faptul că socialismul înseamnă ridicarea nivelului de trai al maselor prin dezvoltarea forțelor de producție ; ca atare stimulul material pregătește pe terenul *practicii* formarea conștiinței *știin-*

[1]) Congresul al III-lea, Ed. pol. 1960, pag. 75.

tifice a oamenilor muncii despre relațiile socialiste. Explicarea științifică a fenomenelor vieții sociale este indispensabilă pentru o reflectare *adecvată* a vieții sociale, pentru formarea conștiinței socialiste și a stimulilor morali ai muncii. La rîndul lor stimulii morali pregătiți de relațiile materiale, elaborați printr-o înțelegere a esenței relațiilor socialiste mijlocită *de practică și de teorie*, sînt indispensabili pentru desăvîrșirea deprinderilor de muncă socialiste.

Deprinderile de muncă socialiste, a căror formare începe cu aplicarea stimulului material, trebuie consolidate, completate prin formarea stimulilor morali, parte a conștiinței *socialiste*, întrucît rolul educativ al stimulilor materiali este limitat.

Această limitare are atît caracter gnoseologic cît și concret istoric. Stimulul material, adresîndu-se nemijlocit interesului individual al omului muncii de a-și îmbunătăți traiul, dă individului o cunoaștere empirică, practică, a relațiilor sociale în cadrul cărora se desfășoară munca sa. Acesteia trebuie să i se adauge cunoașterea științifică. Ea este mijlocită de ideologia socialistă, fără de care nu apare conștiința intereselor *sociale* ale individului. Numai ea asigură trecerea, saltul de la înțelegerea intereselor *individuale* la înțelegerea intereselor întregii societăți; saltul prin care apare stimulul moral are drept conținut sesizarea a ceea ce este esențial pentru societate în cadrul interesului individual, *sesizarea coincidenței parțiale a individualului și generalului* — fără absolutizarea acestei coincidențe, ceea ce ar duce la o abordare metafizică, nedialectică și deci cu implicații sociale greșite a raportului; sesizare care, dacă e justă, dialectică, are drept urmare, o conduită socialistă a individului.

Dacă ar rămîne *„neverificată"* prin ideologia socialistă, influența educativă a stimulilor materiali asupra psihologiei și a deprinderilor de muncă ar fi inevitabil limitată. Această limitare este uneori accentuată de condițiile concret-istorice în care se desfășoară funcția educativă a stimulilor materiali, condiții în care își mai spun cuvîntul „pecetea economică" și „pecetea psihologică" a trecutului. Stimulii materiali ai muncii se adresează unui om muncitor concret: mobilizează capacitatea lui de muncă individuală, care diferă de la un om la altul; retribuția muncii, făcîndu-se pe măsura capacității lui, persistența vechilor forme economice prin care se înfăptuiește repartiția întreține deosebiri de situație materială între oamenii muncii, care se resfrîng și asupra profilului lor psihologic. Pe de altă parte, stimulii materiali ai muncii, adresîndu-se unor oameni concreți, membri ai unor clase sau pături determinate, cu particularități sociale istorice formate (și care se transformă mai încet sau mai repede în cursul construcției socialiste) este „receptat" în mod diferit, potrivit cu aceste particularități, de către membrii claselor respective. Muncitorul, căruia munca din fabrică i-a creat un puternic simț colectiv, o psihologie a muncii colective și a solidarității bine închegată — receptează stimulul material într-un mod corespunzător simțului lui de clasă. Altfel îl receptează un muncitor recent intrat în uzină, cu o conștiință de clasă încă nedezvoltată, țăranul muncitor sau unele elemente din rîndurile intelectualității. Stimulul material joacă, așadar, în formarea deprinderilor de muncă, a psihologiei, a conștiinței socialiste a maselor un rol primordial,

dar nu absolut ; el singur nu poate înlătura vechile elemente individualiste din psihologia și conștiința oamenilor. Receptarea corectă sau corectarea receptării necorespunzătoare a stimulului material este asigurată de formarea stimulilor morali ai muncii, de formarea conștiinței socialiste a maselor ca reflectare *adecvată*, științifică, unitară a existenței socialiste (în primul rînd a relațiilor de producție). *Procesul formării conștiinței socialiste a maselor cuprinde atît transformarea psihologiei sociale cît și însușirea de către mase a ideologiei socialiste.* Însușirea ideologiei socialiste sprijină, grăbește înoirea psihologiei sociale.

Cum se împletesc stimulii materiali și morali în acest proces și deci în formarea noii atitudini față de muncă ? Oamenii muncii înșiși, aflați la nivele diferite de dezvoltare a conștiinței socialiste, a noii atitudini față de muncă, ne dau cheia înțelegerii „mecanismului" și a fazelor de desfășurare a acestei împletiri.

Dacă urmărim evoluția unui muncitor care depășește regulat planul, sau a unui colectivist care face mai multe zile-muncă într-o zi, constatăm adesea că punctul de plecare al acestei comportări în muncă a fost dorința de a-și mări venitul. Ceea ce a acționat în primul rînd a fost stimulul material, interesul imediat, individual. Dar odată devenit fruntaș, colectivul îi apreciază munca și din punct de vedere moral și în cele din urmă el însuși începe să-și privească munca nu numai prin prisma rezultatelor materiale personale, ci și prin ochii opiniei publice socialiste, adică înregistrează și consecințele ei sociale. Acest punct de vedere *social*, devenind pentru el un stimul moral în muncă, însoțește și dublează acum stimulul material.

Dacă urmărim întrecerile individuale dintre muncitori, pornite uneori din dorințe de evidențiere, constatăm că ele se termină de multe ori nu numai cu evidențieri personale, ci cu într-ajutorarea în muncă a celor aflați în întrecere, cu transmiterea metodelor înaintate. Și aci a intrat în acțiune punctul de vedere social, ca și în cazul muncitorilor care califică pe tovarășii lor la locul de muncă, precum și, în mai mare măsură, în cazurile acelor muncitori șefi de brigăzi fruntașe, care au preluat locuri de muncă mai slab organizate, trecînd peste faptul că temporar venitul lor scădea ; la ei stimulul moral — înțelegerea necesității sociale — a fost atît de puternic încît, sub impulsul lui, individul acționează în afara interesului său material imediat.

Un stimul al muncii specific actualei etape, este *lupta pentru calitate.* El a apărut ca urmare a sarcinii trasate de partid de a se obține produse care prin caracteristicile lor tehnico-funcționale și economice, prin gradul lor de finisare și aspectul lor să se ridice la nivelul celor mai bune realizări ale tehnicii mondiale.

Considerăm caracteristic pentru acest stimul dubla lui condiționare : pe de o parte, în unele cazuri, lupta pentru calitate este sprijinită nemijlocit de stimuli materiali (ca prețuri de vînzare diferențiate după calitate sau reglementarea premierilor după calitate, mergînd pînă la creșterea cotelor de premii pentru fiecare procent de îmbunătățire a calității și de reducere a rebuturilor) ; pe de altă parte, la muncitorii cu o conștiință înaintată lupta pentru calitate are ca stimul sentimentul de apartenență

la un colectiv distinct, care înfățișează consumatorului un produs purtînd „marca fabricii" ; ridicarea prestigiului „mărcii fabricii" echivalează în aceste cazuri cu un stimul moral.

O școală a stimulilor morali sînt brigăzile de producție care pe lîngă preocupări profesionale urmăresc și ridicarea culturală, a nivelului moral și ideologic al membrilor lor ; acelaș rol îl îndeplinesc și consfătuirile de producție, datorită cărora se dezvoltă, printr-o participare activă, un alt stimul moral specific societății socialiste : simțul răspunderii socialiste a oamenilor muncii — stăpîni, gospodari ai avuției socialiste.

Acest stimul moral specific socialismului poartă pecetea puternică a patriotismului, a mîndriei clasei noastre muncitoare și a întregului popor pentru progresele făcute în dezvoltarea țării ; fie că e vorba de modernizarea unor întreprinderi existente, de sporirea capacităților de producție, de construirea de noi obiective modern utilate sau de dezvoltarea agriculturii socialiste, avem deaface cu un stimul moral, generat de procesul de ridicare a României socialiste, datorită ritmului impetuos de creștere a economiei, la nivelul țărilor avansate ca producție și consum pe cap de locuitor. Acest stimul moral, patriotismul socialist, joacă un rol deosebit de important în formarea atitudinii socialiste față de muncă, în consolidarea conștiinței socialiste.

IV

Definind stimulul muncii ca tot ceea ce, legat fiind de procesul de muncă, pune în mișcare oamenii, masele, trecînd prin conștiința lor, cele de mai sus permit cîteva prime concluzii cu privire la mecanismul împletirii stimulilor materiali și morali în etapa actuală și la rolul lor în formarea conștiinței socialiste.

1) Cel dintîi stimul care pune în mișcare masele este, în imediată legătură cu necesitatea asigurării traiului, stimulul material. În socialism, pe lîngă rolul său economic, stimulul material contribuie la formarea deprinderilor de muncă socialistă : prin intermediul retribuției materiale, individul se deprinde să dea tot mai mult societății. Deosebita importanță acordată de Congresul al III-lea întăririi cointeresării materiale individuale, se explică tocmai prin faptul că pe această treaptă se aflau cele mai largi pături de oameni ai muncii. Cu ajutorul cointeresării materiale se formează o nouă psihologie a muncii. Experiența repetată a omului muncitor, care-i arată că el primește din partea societății în funcție de ceea ce dă societății, se înscrie în psihologia, în conștiința individului ca o axiomă. Această experiență consolidează — asociată fiind cu retribuția materială — noua psihologie a muncii și tot ea deschide calea spre o nouă treaptă a deprinderii de a munci în chip socialist; la această treaptă deprinderea de a munci pentru sine, asociată exclusiv cu răsplata materială, face loc unei deprinderi de a munci, care nu mai e încătușată de gîndul recompensei materiale (experiența arătînd că ea e asigurată ca urmare a muncii) ci se asociază și cu valorificarea morală a muncii. Pe această treaptă se face loc pentru bucuria muncii ca creație, legată încă — din cauze obiective

— de ceea ce reprezintă plata muncii după cantitate și calitate, dar nu limitată la orizontul salariului. Aci sfera de acțiune a stimulului material începe să se restrîngă făcînd loc stimulului moral. Acesta își are rădăcinile în existența socialistă, în primul rînd în relațiile socialiste de muncă; el se naște deci pe baza practicii, dar ca reflectare a intereselor sociale *generale* — reflectare care nu se produce spontan, ci printr-un complex proces politico-educativ, în care, cu ajutorul teoriei, conștiința individuală își „însușește încăodată" [1]) interesul social, cu alte cuvinte se ridică la nivelul conștiinței socialiste.

2) Pe această treaptă munca individului se desfășoară pe deplin conștient ca *activitate socială:* pentru sine și pentru societate, ceea ce duce la apariția unei noi atitudini în muncă, la elaborarea unor noi norme de comportare socială. La acest nivel oamenii muncii sînt conștienți că satisfacțiile materiale și morale ale muncii își au rădăcina, dincolo de efortul individual, în *relațiile socialiste* care stimulează și valorifică acest efort, în organizarea socialistă a muncii în cadrul căreia se realizează identitatea de interese materiale și morale a individului și colectivității.

Acesta e izvorul unității moral-politice a poporului, care în etapa actuală se dezvoltă tot mai mult ca o forță motrice a societății noastre, alimentată de ideologia clasei muncitoare, de morala clasei muncitoare, devenită morala întregii societăți de oameni ai muncii.

De aci înainte împletirea stimulilor materiali și morali în muncă va evolua în așa fel încît treptat rolul stimulilor materiali va fi tot mai mult estompat de stimulii morali. Ca tendință a viitorului, acest proces se dezvoltă încă din etapa actuală la oamenii muncii cei mai înaintați din țara noastră: odată cu desăvîrșirea bazei economice și tehnico-materiale a socialismului, se formează și se desăvîrșește omul societății socialiste, ai cărui stimuli în acțiune sînt interesele sociale.

3) Din analiza stimulilor muncii în socialism se pot desprinde următoarele caracteristici principale ale acestora.

Socialismul este prima formațiune social-economică în care, pe baza existenței relațiilor socialiste de producție și a folosirii conștiente a legilor dezvoltării sociale, odată cu dezvoltarea dirijată de către statul socialist a forțelor de producție are loc și *dirijarea conștientă*, corespunzător intereselor sociale, a *stimulilor muncii*. Aceasta este o primă trăsătură calitativ nouă a stimulilor muncii în socialism.

Ca urmare a lichidării antagonismelor de clasă și a existenței relațiilor socialiste, în societatea socialistă stimulii materiali care pun în mișcare masele *își au rădăcina în interesele generale* ale societății în cadrul cărora se rezolvă, subordonîndu-li-se, interesele speciale ale claselor și păturilor de oameni ai muncii și interesele indivizilor care le alcătuiesc.

Aceasta este o a doua particularitate a stimulilor muncii în socialism.

Datorită coincidenței obiective a intereselor claselor, indivizilor și ale societății în ansamblul ei, în socialism apar pentru prima dată stimuli mo-

[1]) In orice proces de cunoaștere după ce are loc trecerea de la fenomen la esență urmează trecerea de la o esență de gradul întîi la o esență de gradul doi, etc. (Lenin).

rali ai muncii care își au rădăcinile în interesele întregii societăți, în unitatea moral-politică a societății.

Aceasta e o a treia particularitate a stimulilor muncii, generați de relațiile socialiste.

Noile trăsături ale stimulilor muncii și coexistența, împletirea stimulilor materiali și morali într-un chip nou, constituie o caracteristică a întregii perioade a construirii socialismului și comunismului. Greutatea specifică a stimulilor materiali și a celor morali, modul în care se împletesc, diferă în diversele etape ale construcției, atît în funcție de specificul etapei cît și de particularitățile dezvoltării țării respective. Comun tuturor etapelor este rolul primordial al stimulului material, a cărui *pondere relativă variază însă în funcție de dezvoltarea celui moral.*

4) Elaborînd politica specifică a îmbinării stimulilor materiali și morali în etapa desăvîrșirii construcției socialiste în țara noastră, P.M.R. a avut și are în vedere atît obiectivul principal al etapei cît și nivelul dezvoltării conștiinței socialiste a maselor.

Politica P.M.R. de împletire a factorului material și moral în stimularea muncii în actuala etapă are drept bază socială obiectivă faptul că posibilitatea nașterii acestor stimuli este conținută în însăși existența relațiilor socialiste.

Relațiile de producție socialiste generează noi stimuli ai muncii, crează condițiile indispensabile în care ei se pot manifesta. Dar posibilitatea nu devine realitate de la sine. Posibilitatea devine realitate datorită complexului de măsuri, economice, politico-organizatorice și educative adoptate de Congresul al II-lea și al III-lea al P.M.R., precum și de plenarele C. C. Baza teoretică a acestui complex de măsuri a fost teza marxist-leninistă a rolului determinant al relațiilor materiale și teza rolului activ al factorului subiectiv, moral în dezvoltarea relațiilor materiale.

Promovarea de către P.M.R. a politicii științifice de îmbinare a stimulilor materiali și morali în muncă, a jucat un rol deosebit de important în făurirea unității de interese, de voință și de acțiune a poporului muncitor. Cu prilejul aniversării a 40 de ani de la crearea P.C.R. tov. Gh. Gheorghiu-Dej a subliniat că „clasa muncitoare, țărănimea și intelectualitatea, unite prin interesele lor economice și politice, prin scopul lor comun, muncesc cu entuziasm și hotărîre pentru dezvoltarea construcției socialismului, pentru înflorirea patriei și bunăstarea poporului muncitor“ [1]).

Catedra de materialism dialectic
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej“ București

1) Gh. Gheorghiu-Dej — Aniversarea a 40 de ani de la crearea P.C.R., pagina 35

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

MATEMATICĂ

C.Z. 512.8

SUR UN OPÉRATEUR DE DÉRIVATION DANS LES MODULES UNITAIRES ET DANS LES ESPACES VECTORIELS *

E. KREINDLER

Dans la note présente on définit dans les A — modules unitaires (A anneau différentiel) un opérateur additif d qui se comporte comme une dérivation par rapport au produit d'un élément du module avec un scalaire. On étudie l'extension de cet opérateur lorsqu'on considère une extension B du domaine des scalaires A. Contrairement à la dérivation définie dans les algèbres et dans les espaces vectoriels (voir [2]) l'opérateur est un opérateur non-linéaire (comparer avec [1]).

Définition 1. On dit qu'un anneau à unité A est un *anneau différentiel* s'il existe un opérateur additif $\delta : A \to A$, pour lequel

$$\delta(\alpha \cdot \beta) = \delta(\alpha)\beta + \alpha\delta(\beta), \text{ pour } \alpha, \beta \in A.$$

L'esemble $A_0 = \{\xi, \xi \in A, \delta(\xi) = 0\}$ est un sous-anneau de A qui contient l'unité [3].

Si un corps est anneau différentiel, on dit qu'il est *corps différentiel*. En ce cas, si le corps est commutatif, on a

$$\delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\delta(\alpha)\beta - \alpha\delta(\beta)}{\beta^2}$$

Définition 2. Soit A un anneau différentiel et soit E un A — module unitaire [2]. On dira qu'on définit dans E une dérivation cohérente avec la dérivation $\delta : A \to A$ si l'opérateur $d : E \to E$ est un endomorphisme de la structure de groupe abélien de E et si $d(\alpha a) = \delta(\alpha)a + \alpha d(a)$. Le module muni de l'opérateur d este dit A — *module différentiel* (comp. [1]).

En ce qui suit on va considérer les modules différentiels dont le domaine des scalaires A est commutatif. Si A est un corps différentiel, un A — module différentiel est dit espace vectoriel différentiel sur A.

---

* Communiquée à la session scientifique de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest, 22—23 fevrier 1964.

§ 1. L'opérateur de dérivation dans un produit tensoriel de A modules

Proposition 1. Soit E un A — module différentiel, d la dérivation dans E, δ la dérivation dans A. Soit $M \subset E$, M un sous-module, pour lequel $d(M) = 0$. Il existe alors un opérateur de dérivation, $\tilde{d}$: ${}^{E}/_{M} \to {}^{E}/_{M}$ avec $\tilde{d}(\bar{x}) = \overline{d(x)}$, pour $x \in E$, où $\varphi : x \to \bar{x}$ est l'application canonique $E \to {}^{E}/_{M}$. De plus, les schémas

$$\begin{array}{ccc} & d & \\ E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle\varphi}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle d^*} \\ & {}^{E}/_{M} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & E & \\ {\scriptstyle d^*}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\varphi} \\ {}^{E}/_{M} & \longrightarrow & {}^{E}/_{M} \\ & {\scriptstyle\tilde{d}} & \end{array} \tag{1}$$

sont exacts.

Démonstration. d est un opérateur additif avec $d(M) = 0$. Il existe un opérateur d^* : ${}^{E}/_{M} \to E$, pour lequel $d^*(\bar{x}) = d(x)$, où $\varphi : x \to \bar{x}$, $\varphi(x) = \bar{x}$, puisqu'on vérifie aisément l'implication :

$$x \equiv y\,(M) \Rightarrow d(x - y) = d(x) - d(y) = 0.$$

Cela signifie que d^* est bien défini et le schéma

$$\begin{array}{ccc} & d & \\ E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle\varphi}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle d^*} \\ & {}^{E}/_{M} & \end{array}$$

est exact. On a $d^*(\alpha\bar{x}) = d^*(\overline{\alpha x}) = d(\alpha x) = \delta(\alpha)x + \alpha d(x)$, pour tout $\alpha \in A$ et tout $x \in E$. De plus d^* est additif et

$$\varphi[d^*(x)] = \varphi[d(x)] = \overline{d(x)}.$$

Posons $\tilde{d} = \varphi \circ d^*$. $\tilde{d}$ est une dérivation dans le A — module différentiel ${}^{E}/_{M}$, puisque d est additif et puisque

$$\tilde{d}(\alpha\bar{x}) = \varphi(d^*(\alpha\bar{x})) = \varphi(\delta(\alpha)x + \alpha d(x)) = \delta(\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(d(x)) =$$

$$= \delta(\alpha)\bar{x} + \alpha\varphi(d^*(x)) = \delta(\alpha)\bar{x} + \alpha\tilde{d}(x), \text{ pour } \alpha \in A,\ x \in E.$$

On a alors le schéma exact

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ {\scriptstyle d^*}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\varphi} \\ {}^{E}/_{M} & \longrightarrow & {}^{E}/_{M} \\ & {\scriptstyle\tilde{d}} & \end{array}$$

Proposition 2. Soit A un anneau différentiel, E un A — module différentiel et $M \subset E$ un sous — module invariant par rapport à la dérivation d

de E. Il existe alors un opérateur de dérivation d dans E/M avec $\overline{d}(\overline{x}) = \overline{d(x)}$, où $\varphi : x \to \overline{x}$ est l'application canonique $E \to E/M$. De plus, on a le schéma exact

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{d} & E \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ E/M & \xrightarrow[\overline{d}]{} & E/M \end{array} \tag{2}$$

Démonstration : Si $x \equiv y(M)$ on a $x - y \in M$ et $d(x - y) = d(x) - d(y) \in M$. C'est-à-dire si $\overline{x} = \overline{y}$, on a $\overline{d(x)} = \overline{d(y)}$. Considérons l'opérateur additif $\overline{d} : E/M \to E/M$, avec $\overline{d}(\overline{x}) = \overline{d(x)}$. $\overline{d}$ est une dérivation dans le A — module différentiel E/M, puisque

$$\overline{d}(\alpha\overline{x}) = \overline{d}\,\overline{(\alpha x)} = \overline{d(\alpha x)} = \overline{\delta(\alpha)\, x + \alpha\, d(x)} =$$

$$= \delta(\alpha)\,\overline{x} + \overline{d(x)} = \delta(\alpha)\,\overline{x} + \alpha\,\overline{d}(\overline{x}).$$

On a alors par définition $\overline{d} \circ \varphi = \varphi \circ d$, d'où l'exactité du schéma (2).

Théorème 1. *Soient A un anneau différentiel, E et F deux A — modules différentiels, δ la dérivation dans A et d_1, d_2 les dérivations respectives dans E et F. Il existe alors un opérateur de dérivation d dans $E \otimes F$* (produit tensoriel [2]) *avec $d(x \otimes y) = [d_1(x)] \otimes y + y \otimes [d_2(y)]$.*

Démonstration. D'après [2] $E \otimes F$ est isomorphe au A — module $G = A^{E\times F}/H$, où H est le sous-module de $A^{E\times F}$ généré par les éléments de $A^{E\times F}$ des types suivants :

$$(x_1 + x_2,\ y) - (x_1,\ y) - (x_2,\ y), \tag{3}$$

$$(x,\ y_1 + y_2) - (x,\ y_1) - (x,\ y_2), \tag{4}$$

$$(\alpha x,\ y) - \alpha\,(x,\ y), \tag{5}$$

$$(x,\ \alpha y) - \alpha\,(x,\ y), \tag{6}$$

où $x_1,\ x_2,\ x \in E,\ y_1,\ y_2,\ y \in F, \alpha \in A$. $A^{E\times F}$ est le A — module des combinaisons linéaires formelles des couples $(x, y) \in E \times F$ avec des coefficients de A. On va définir dans $A^{E\times F}$ un opérateur de dérivation d^*, avec $d^*(H) \subset H$. De la proposition 2 on déduit l'existence d'un opérateur de dérivation de $A^{E\times F}/H$, $\overline{d}$. Soit d^* un opérateur $A^{E\times F} \to A^{E\times F}$ défini de la manière suivante. Si $z \in A^{E\times F}$, $z = (x, y)$ on pose $d^*z = d^*(x, y) = [d_1(x),\ y)] + [x,\ d_2(y)]$. Si $z_1 = \alpha z$, où $z = (x,\ y)$ on pose $d^*(\alpha z) = \delta(\alpha)z + \alpha d^*(z) = \delta(\alpha)\,(x,\ y) + \alpha(d_1(x),\ y) + \alpha(x,\ d_2(y))$. Ensuite si $z = \Sigma\,\alpha_i\, z_i$, où $\alpha_i \in A$, $z_i = (x_i,\ y_i)$, $x_i \in E$, $y_i \in F$ on pose $d^*z = \Sigma\, d^*\,(\alpha_i\, z_i)$. d^* est évidemment une dérivation dans $A^{E\times F}$. Pour montrer que $d^*(H) \subset H$ il suffit de montrer que, pour chaque élément $z \in H$ du type (3), (4), (5) ou (6), on a $d^*z \in H$. En effet, si

$$z = (x_1 + x_2,\ y) - (x_1,\ y) - (x_2,\ y),\ x_1,\ x_2 \in E,\ y \in F$$

on a

$$d^* z = d^* (x_1 + x_2, y) - d^* (x_1, y) - d^* (x_2, y) = (d_1 (x_1 + x_2), y) +$$
$$+ (x_1 + x_2, d_2 (y)) - (d_1 (x_1), y) - (x_1, d_2 (y)) - (d_1 (x_2), y) -$$
$$- (x_2, d_2 (y)) = (d_1 (x_1) + d_1 (x_2), y) - (d_1 (x_1), y) - (d_1 (x_2), y) +$$
$$+ (x_1 + x_2, d_2 (y)) - (x_1, d_2 (y)) - (x_2, d_2 (x)) = z_1 + z_2,$$

où z_1, z_2 sont du même type (3). On obtient de même que si z est un élément du type (4) $d^* z = z_1 + z_2$, où z_1 et z_2 sont des éléments du même type. Soit $z = (\alpha x, y) - \alpha (x, y)$. On a

$$d^* z = d^* (\alpha x, y) - d^* [\alpha (x, y)] = (d_1 (\alpha x), y) + (\alpha x, d_2 (y)) -$$
$$- \delta (\alpha) (x, y) - \alpha (d_1 (x), y) - \alpha (x, d_2 (y)) = (\delta (\alpha) x + \alpha d_1 (x), y) -$$
$$- \delta (\alpha) (x, y) - \alpha (d_1 (x), y) + (\alpha x, d_2 (y)) - \alpha (x, d_2 (y)) =$$
$$= [(\delta (\alpha) x + \alpha d_1 (x), y) - (\delta (\alpha) x, y) - (\alpha d_1 (x), y)] + [(\delta (\alpha) x, y) - \delta (\alpha) (x, y)] +$$
$$+ [(\alpha d_1 (x), y) - \alpha (d_1 (x), y)] + [(\alpha x, d_2 (y)) - \alpha (x, d_2 (y)] =$$
$$= z_1 + z_2 + z_3 + z_4,$$

où z_1 est un élément du type (3), z_2, z_3, z_4 étant du type (5). C'est-à-dire $d^* z \in H$. D'une manière analogue on vérifie que si z est du type (6), alors $d^* z \in H$. D'après la définition de H on a pour tout $z \in H$, $z = \Sigma \alpha_i z_i$, où $\alpha_i \in A$ et z_i sont des éléments du type (3), (4), (5) ou (6). Alors

$$d^* z = \Sigma d^* (\alpha_i z_i) = \Sigma \delta (\alpha_i) z_i + \Sigma \alpha_i d^* z_i \in H,$$

puisque $d^* z_i \in H$ et H est un sous-module de $A^{E \times F}$. Il s'ensuit $d^* (H) \subset H$. Soit d la dérivation dans $E \otimes F$ correspondante à d^* définie dans la proposition 2. Si φ est l'application canonique $A^{E \times F} \to E \otimes F$, on a $\varphi (x, y) = x \otimes y$ et $d \circ \varphi = \varphi \circ d^*$. Alors

$$d (x \otimes y) = d (\varphi (x, y)) = \varphi (d^* (x, y)) = \varphi [d_1 (x), y) + (x, d_2 (y))] =$$
$$= \varphi (d_1 (x), y) + \varphi (x, d_2 (y)) = (d_1 (x) \otimes y) + (x \otimes d_2 (y)).$$

La dérivation définie dans $E \otimes F$ par le théorème 1 est dite *produit tensoriel* des dérivations d_1 et d_2. On la désignera par $d_1 \otimes d_2$.

Corrolaire 1 : Le produit tensoriel $\delta \otimes \delta$ du A — module $A \otimes A$ coïncide avec δ.

Corrolaire 2 : Le produit $\delta \otimes d$, où δ est la dérivation dans le A — module A et d la dérivation dans le A — module E coïncide avec d.

Par la suite, s'il n'y aura aucune confusion, on désignera tous les opérateurs de dérivation par le signe '.

§ 2. L'extension de l'anneau des scalaires et le prolongement de la dérivation

Soit B un anneau différentiel et soit $A \subset B$ un sous -- anneau. De plus, l'unité de B appartient à A et $A' \subset A$. Si E est un A — module différentiel, on peut introduire dans le A — module différentiel $B \otimes E$ une structure de B — module (voir [2]), posant $\tau(\beta \otimes x) = (\tau \cdot \beta \otimes x)$. Notons par $E_{(B)}$ la structure de B — module definie sur $B \otimes E$.

Théorème 2. *La structure de A — module différentiel de $B \otimes E$ induit une structure de B — module différentiel dans le B — module $E_{(B)}$ et $\varphi(x') = (\varphi(x))'$, où $\varphi : x \to e \otimes x$ est l'application canonique $E \to E_{(B)}$.*

Démonstration. Evidemment, la dérivation de $B \otimes E$ est un opérateur additif dans $E_{(B)}$. De plus on a

$$[(\tau\beta) \otimes x]' = (\tau\beta)' \otimes x + (\tau\beta) \otimes x' = (\tau'\beta) \otimes x +$$
$$+ (\tau\beta') \otimes x + (\tau\beta) \otimes x' = \tau'(\beta \otimes x) + \tau[(\beta \otimes x)]'.$$

Alors, si $z \in E_{(B)}$ et $\tau \in B$, on a $(\tau z)' = \tau' z + \tau z'$. De même, soit $\varphi : x \to e \otimes x$, e étant l'unité de B et φ l'application canonique $E \to E_{(B)}$. On a $\varphi(x') = [\varphi(x)]'$.

Si φ est un A — isomorphisme on peut identifier $\varphi(E)$ à E et la restriction à E de la dérivation du B — module différentiel $E_{(B)}$ coïncide avec la dérivation initiale. Dans ce cas on dira que la dérivation de $E_{(B)}$ est le *prolongement canonique* de la dérivation de E. En général φ n'est pas un A — isomorphisme. Elle l'est toutefois lorsque le A — module E admet une base (cas particulier : E espace vectoriel sur A) et lorsque A est un anneau d'intégrité, E un A — module différentiel dont tous les éléments $\neq o$ sont libres et $B = K$ est le corps des fractions rationelles [2] de A. Dans les deux cas le prolongement canonique de la dérivation de E, défini dans le théorème 2, est possible.

Proposition 3. *Soit A un anneau différentiel, A_0 le sous-anneau des éléments constants de A et E un A_0 — module unitaire. Si l'application canonique $\varphi : x \to e \otimes x$, $E \to E_{(A)}$ est un isomorphisme, il existe une correspondance biunivoque entre les endormorphismes du A_0 — module E et les dérivations du A — module différentiel $E_{(A)}$.*

Démonstration. On va montrer que pour chaque endomorphisme de E il existe une dérivation sur $E_{(A)}$. Réciproquement, pour chaque dérivation de $E_{(A)}$ il y a un endomorphisme de E/S, où S est l'image réciproque $S = \varphi^{-1}(0)$ de l'élément neutre de $E_{(A)}$, φ étant l'application canonique $\varphi : E \to E_{(A)}$. En effet, on peut considérer A_0 comme anneau différentiel dont la dérivation est nulle. Alors tout A_0 — endomorphisme

f de E est en même temps une dérivation de E cohérente avec celle de A_0, puisque

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) + \alpha' x = \alpha f(x), \text{ car } \alpha' = 0.$$

Conformément au théorème 2 on introduit dans $E_{(A)}$ une dérivation cohérente avec celle de A. Réciproquement, soit d une dérivation dans $E_{(A)}$ et $\varphi(E) \subset E_{(A)}$ l'image de E dans $E_{(A)}$ par l'application canonique φ. Soit $S = \varphi^{-1}(0)$ l'image réciproque de l'élément neutre de $E_{(A)}$. On définit dans E/S un endomorphisme de la manière suivante. Pour tout $\bar{x} \in E/S$ on pose $f(\bar{x}) = \theta^{-1} d[\varphi(x)]$, où θ est l'isomorphisme canonique $E/S \to \varphi(E)$. Evidemment f est un opérateur additif et pour $\alpha \in A_0$ on a

$$f(\alpha \bar{x}) = f(\overline{\alpha x}) = \theta^{-1} d[\varphi(\alpha x)] = \theta^{-1} d[\alpha \varphi(x)] =$$

$$= \theta^{-1}\{\alpha d[\varphi(x)] + \alpha' \varphi(x)\} = \alpha \theta^{-1} d[\varphi(x)] + \alpha f(\bar{x}), \text{ car } \alpha' = 0.$$

Lorsque φ est un isomorphisme, on a $\theta = \varphi$ et l'assertion est démontrée.

Proposition 4. Soit A un anneau différentiel, soit A_0 le sous-anneau des éléments constants et soit E un A — module différentiel. Si $E_0 \subset E$ est le A_0 — module des éléments constants de E et si E_0 admet une base, alors $E_{0(A)}$ s'identifie au sous-module maximal de E qui admet une base d'éléments constants. De plus $E_{0(A)}$ est invariant par rapport à la dérivation.

Démonstration. Evidemment, l'ensemble E_0 des éléments constants de E est un A_0 — module. Si E_0 admet une base (a_λ) alors l'application canonique $\varphi : E_0 \to E_{0(A)}$ est un isomorphisme et $\varphi(c_\lambda)$ est une base dans $E_{0(A)}$. Evidemment $(\varphi(a_\lambda))' = 0$. Si on identifie E_0 à $\varphi(E_0)$ on identifie $E_{0(A)}$ à une partie de E et (a_λ) est une base d'éléments constants dans $E_{0(A)}$. Si $E_1 \supset E_{0(A)}$ contient une base d'éléments constants b_μ, alors $(b_\mu) \subset E_0$ et $b_\mu = \sum_\lambda \alpha_\lambda^\mu a_\lambda$, $\alpha_\lambda^\mu \in A_0$. Alors $(b_\mu) \subset E_{0(A)}$ et $E_1 \subset E_{0(A)}$, c'est-à-dire $E_1 = E_{0(A)}$. On vérifie aisément que $(E_{0(A)\mu})' \subset E_{0(A)}$.

Proposition 5. Soit E un espace vectoriel différentiel sur le corps différentiel K. Soient K_0 le sous-corps des éléments constants de K et E_0 le K_0 — espace vectoriel des éléments constants de E. Alors $E_{0(K)} \subset E$ et E est somme directe

$$E = E_{0(K)} + E^*, \tag{7}$$

où E^* ne contient d'autres éléments constants à part 0.

Démonstration. Si E_0 est un espace vectoriel, il admet une base et l'application canonique $\varphi : E_0 \to E_{0(K)}$ est un isomorphisme. On identifie alors E_0 à $\varphi(E_0)$ et $E_{0(K)}$ à une partie de E. Dans ce cas, d'après la proposition 5, $E_{0(K)}$ est l'espace maximal de E qui admet une base d'éléments constants, d'où résulte la décomposition (7).

Pour $x \in E_0$ on a $\varphi(x) = e \otimes x$, $(\varphi(x))' = e \otimes x' = 0$ et on a l'

Observation 1. Soit A un anneau différentiel, A_0 étant le sous-anneau des éléments constants de K et soit B un sur-anneau de A qui a le même sous-anneau d'éléments constants que A. Soit E un A — module différentiel et E_0 le A_0 — module des éléments constants de E. Le A_0 — module des éléments de $E_{(B)}$ contient $\varphi(E_0)$, où $\varphi : x \to e \otimes x$ est l'application canonique $E \to E_{(B)}$.

Proposition 6. *Soit E un A — module différentiel qui admet une base d'éléments constants et soit B un sur-anneau de A, ayant le même sous-anneau A_0 d'éléments constants que A. Le A_0 — module des éléments constants de $E_{(B)}$ est $\varphi(E_0)$, où E_0 est le A_0 — module des éléments constants de E et $\varphi : E \to E_{(B)}$ l'application canonique.*

Démonstration. Puisque E admet une base l'application canonique φ est un isomorphisme. Soit (c_λ) la base du A — module E, $a'_\lambda = 0$. Pour tout $z \in E_{(B)}$ on a la représentation unique $z = \sum_\lambda (\beta_\lambda \otimes a_\lambda)$. Soit $z' = 0$. Alors, d'après les règles de dérivation dans $E_{(B)}$ on a

$$\sum_\lambda (\beta'_\lambda \otimes a_\lambda) + \sum_\lambda (\beta_\lambda \otimes a'_\lambda) = \sum_\lambda (\beta'_\lambda \otimes a_\lambda) = 0,$$

Donc $\beta'_\lambda = 0$ et $\beta_\lambda \in A_0$. On a dans ces conditions

$$z = \sum_\lambda (\beta_\lambda \otimes a_\lambda) = \sum_\lambda (e \otimes \beta_\lambda a_\lambda) = e \otimes (\sum_\lambda \beta_\lambda a_\lambda) = \varphi(\sum_\lambda \beta_\lambda c_\lambda),$$

où $\sum_\lambda \beta_\lambda a_\lambda \in E_0$, ce qui prouve l'assertion.

§ 3. Exemples

1° *L'adjonction d'une indéterminée algébrique.* Soit K un corps différentiel, algébriquement clos, $K[\xi]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coéfficients dans K, $K(\xi)$ le corps des fractions rationelles de $K[\xi]$ et soit E un espace vectoriel différentiel sur K. Notons par $E[\xi]$ l'extension $E_{(K[\xi])}$ et par $E(\xi)$ l'extension $E_{(K[\xi])}$. On sait [2] que $E[\xi] = E[\xi]_{(K[\xi])}$. *De même l'application canonique $\varphi : x \to e \otimes x$, $E \to E[\xi]$* est un isomorphisme, puisque E, étant espace vectoriel, admet une base.

Proposition 7. Tout élément de $E[\xi]$ peut être écrit de manière unique

$$(\xi^n \otimes b_0) + (\xi^{n-1} \otimes b_1) + \cdots + (e \otimes b_n), \text{ où } b_i \in E. \tag{8}$$

Démonstration. Soit $z \in E[\xi]$. Alors $z = \Sigma (P_i(\xi) \otimes x_i)$ où $P_i(\xi) \in K(\xi)$ et $x_i \in E$. Pour

$$P(\xi) = \alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \cdots + \alpha_n \in K[\xi] \text{ et } x \in E$$

on a

$$P(\xi) \otimes x = (\alpha_0 \xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \cdots + \alpha_n) \otimes x =$$
$$= \xi^n (e \otimes \alpha_0 x) + \xi^{n-1} (e \otimes \alpha_1 x) + \cdots + (e \otimes \alpha_n x).$$

Soit maintenant n le plus grand degré des $P_i(\xi)$. On a alors

$$z = \sum_i (P_i(\xi) \otimes x_i) = \sum_i [\xi^n (e \otimes a_0^i x_i + \cdots + (e \otimes a_n^i x_i)] =$$

$$= \xi^n (e \otimes b_0) + \xi^{n-1} (e \otimes b_1) + \cdots + (e \otimes b_n),$$

où $b_j = \sum_i a_j^i x_i$. Si (a_λ) est une base de E, le système $\varphi(a_\lambda) = (e \otimes a_\lambda)$ est une base de $E[\xi]$. Alors pour

$$\xi^n (e \otimes b_0) + \xi^{n-1} (e \otimes b_1) + \cdots + (e \otimes b_n) = 0, \quad b_i = \sum_\lambda a_\lambda^i a_\lambda$$

on a

$$\xi^n (e \otimes \sum_\lambda a_\lambda^0 a_\lambda) + \xi^{n-1} (e \otimes \sum_\lambda a_\lambda^1 a_\lambda) + \cdots + (e \otimes \sum_\lambda a_\lambda^n a_\lambda) =$$

$$= \xi^n \sum_\lambda a_\lambda^0 (e \otimes a_\lambda) + \xi^{n-1} \sum_\lambda a_\lambda^1 (e \otimes a_\lambda) + \cdots + \sum_\lambda a_\lambda^n (e \otimes a_\lambda) =$$

$$= \sum_\lambda (a_\lambda^0 \xi^n + a_\lambda^1 \xi^{n-1} + \cdots + a_\lambda^n)(e \otimes a_\lambda) = 0.$$

Celà implique $a_\lambda^0 \xi^n + a_\lambda^1 \xi^{n-1} + \cdots + a_\lambda^n = 0$ pour tout λ, c'est-àdire $a_1^0 = a_\lambda^1 = \cdots = a_\lambda^n = 0$ pour tout λ, puisque le corps K est algébriquement clos. On a dans ce cas $b_i = 0$ et la représentation (8) est unique.

On peut alors noter les éléments de $E[\xi]$ par

$$\mathfrak{P}(\xi) = \xi^n b_0 + \cdots + \xi b_{n-1} + b_n, \text{ où } \xi^i b_i = \xi^i (e \otimes b_i)$$

2° *L'adjonction d'une indéterminée différentielle.* Soit K un corps différentiel algébriquement clos. Soit $K\{\xi\}$ l'anneau des „polynôms différentiels" a une „indéterminée différentielle" [3] et soit $K<\xi>$ le corps des fractions rationelles de $K[\xi]$. Evidemment, $K\{\xi\}$ est un anneau différentiel à unité sans diviseurs de zéro, de même que $K<\xi>$ est un corps différentiel.

Soit E un espace vectoriel différentiel sur K. On considère les deux extensions $E\{\xi\} = E_{(K\{\xi\})}$ et $E<\xi> = E_{(K<\xi>)}$. On sait que $E<\xi> = E\{\xi\}_{(K<\xi>)}$. Puisque E a une base, étant espace vectoriel, l'application canonique $\varphi : E \to E\{\xi\}$ est un isomorphisme. En appliquant à $E\{\xi\}$ les résultats du § 2, on peut prolonger la dérivation de E jusqu'à une dérivation de $E\{\xi\}$, puisqu'on peut identifier $\varphi(E)$ à une partie de $E\{\xi\}$. Si (a_λ) est une base de E, le système $(\varphi(a_\lambda)) = (e \otimes a_\lambda)$ est une base de $E\{\xi\}$. Soit $z \in E\{\xi\}$. Alors on a la représentation unique

$$z = \sum_\lambda (P_\lambda(\xi) \otimes a_\lambda),$$

où $P_\lambda(\xi) \in K\{\xi\}$ sont des polynômes différentiels à une indéterminée différentielle ξ. Les $P_\lambda(\xi)$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices

λ. Soit $z \neq 0$. Alors pour $P(\xi) \in K\{\xi\}$ l'égalité $P(\xi) z = 0$ implique $P(\xi) P_\lambda(\xi) = 0$. Puisque $K\{\xi\}$ n'admet pas de diviseurs non nuls de zéro, on déduit que $P(\xi) = 0$. Celà donne l'.

Observation 2. Tous les éléments $\neq 0$ de $E\{\xi\}$ sont libres.

On obtient immédiatement que l'application canonique $\psi: E\{\xi\} \to \to E\{\xi\}_{(K<\xi>)} = E<\xi>$ est un isomorphisme et, en appliquant une fois de plus les résultats du paragraphe 2, $E<\xi>$ admet une dérivation, sa structure d'espace différentiel étant le prolongement canonique de la structure différentielle de E. On donc la

Proposition 8. Soit E un espace vectoriel différéntiel sur le corps différentiel K. Le $K\{\xi\}$ — module $E\{\xi\} = E_{(K\{\xi\})}$ est un $K\{\xi\}$ — module différentiel et l'espace $E<\xi> = E\{\xi\}_{(K<\xi>)} = E_{(K<\xi>)}$ est un espace différentiel. De plus, si $\varphi: E \to E\{\xi\}$ et $\psi: E\{\xi\} \to E<\xi>$ sont les applications canoniques respectives E s'identifie à une partie de $E\{\xi\}$ à l'aide de φ et $E\{\xi\}$ s'identifie à une partie de $E<\xi>$ à l'aide de ψ.

3°. *L'adjonction d'une primitive dans K.* Soit K un corps différentiel algébriquement clos et $\alpha \in K$ tel, que nul $\beta \in K$ ne vérifie $\beta' = \alpha$. Soit M un surcorps différentiel de K, $M \supset K$, $M = K<\eta>$, où $\eta \in M$, $\eta' = \alpha$. On sait que M et K ont le même sous-corps K_0 d'éléments constants. Nous allons montrer que les seuls éléments constants de $E_{(M)} = E<\eta>$ forment l'espace vectoriel $\varphi(E_0) \subset E_{(M)}$ où $\varphi: E \to E_{(M)}$ est l'application canonique et E_0 est le K_0 — espace vectoriel des éléments constants de E. Plus précisément on a la

Proposition 9. Soit K un corps différentiel algébriquement clos et soit M un surcorps de K tel, que $M = K<\eta>$, où $\eta \notin K$, $\eta' = \alpha \in K$ et nul $\beta \in K$ ne vérifie $\beta' = \alpha$. Pour tout espace vectoriel différentiel E sur K l'extension $E_{(M)} = E<\eta>$ est une extension canonique, l'application canonique $\varphi: E \to E<\eta>$ étant un isomorphisme. De plus, si E_0 est le K_0 — module des éléments constants de E, alors les seuls éléments constants de $E<\eta>$ forment l'espace vectoriel $\varphi(E_0)$ isomorphe à E_0.

Démonstration. Observons d'abord qu'il existe un isomorphisme de $K[\xi]$ sur $K[\eta]$, où $K[\xi]$ est l'anneau des polynômes à une indéterminée (non-différentielle) et $K\{\eta\}$ l'anneau facteur des polynômes différentiels à une indéterminée différentielle sur l'idéal des relations à coéfficients dans K, vériffiées par η, $\eta' = \alpha \in K$, $\eta \in M = K<\eta>$. En effet, on a $\eta' = \alpha$, $\eta'' = \alpha', \cdots, \eta^{(n)} = \alpha^{(n-1)} \in K$. Soit $K\{\xi\}$ l'anneau des polynômes différentiels à une indéterminée différentielle et soit $\psi: K\{\xi\} \to K[\xi]$ un homomorphisme pour lequel $\psi\{\xi\} = \xi$, $\psi(\beta) = \beta$ pour $\beta \in K$ et $\psi(\xi^{(n)}) = \alpha^{(n-1)}$. L'image réciproque de zéro par cet homorphisme $\psi^{-1}(0)$ est l'idéal I des relations de $K\{\xi\}$ vérifiées par η, où $\eta' = \alpha$. Tout élément π de $K\{\xi\}$ est un polynôme en $\xi, \xi', \ldots \xi^{(n)}$. Soit n le plus grand ordre des dérivées contenues dans π et m le plus grand degré des ξ^i contenus dans π. Alors

$$\pi = \pi_m \xi^m + \cdots \pi_1 \xi + \pi_0,$$

où $\pi_i = P_i(\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n)})$ sont des polynômes en ξ', ξ'', .., $\xi^{(n)}$. Soit $\psi(\pi) = 0$. On a

$$\psi(\pi) = \sum_{i=0}^{m} P_i(\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)})\,\xi^i, \text{ où } P_i(\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)}) \in K,$$

c'est-à-dire si $\psi(\pi) = 0$, alors $P_i(\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)}) = 0$ pour tout i. Donc $\pi(\eta) = 0$. Réciproquement si $\pi(\eta) = 0$ on a

$$\pi_m \eta^m + \pi_{m-1} \eta^{m-1} + \cdots + \pi_1 \eta + \pi_0 = 0, \text{ où } \pi_i = P_i(\eta', \cdots, \eta^{(n)}).$$

Mais $P_i(\eta', \cdots, \eta^{(n')}) = P_i(\alpha, \alpha', \cdots, \alpha^{(n-1)}) \in K$ et $\eta \in K$. Puique K est algébriquement clos, on a $\pi_i = 0$, donc

$$\psi(\pi) = \pi(\eta) = 0$$

et $\pi \in \psi^{-1}(0)$. Cet homomrphisme est *sur* $K[\xi]$, donc $K[\xi]$ est isomorphe à $K\{\xi\}/I$, où I est l'idéal des relatons vérifiées par η, c'esté-à-dire $K[\xi]$ est isomorphe à $K\{\eta\}$. On a immédiatement l'isomorphisme des corps $K(\xi)$ et $K<\eta>$. De même $E[\xi] = E_{(K\{\xi\})}$ est isomorphe à $E\{\eta\} = E_{(K\{\eta\})}$ et $E<\eta> = E_{(K<\xi>)}$ est isomorphe à $E<\eta> = E_{(K<\eta>)} = E_{(M)}$. Donc, d'après l'exemple 1, l'application canonique $\varphi \cdot E \to E_{(M)}$ est un isomorphisme et la structure différentielle de $E_{(M)}$ est le prolongement canonique de la structure différentielle de K. Puisque $M = K<\eta>$ n'admet d'autres éléments constants que ceux de K on a de même pour $K\{\eta\} \subset M$. Alors les seuls éléments constants de $E\{\eta\}$ et $E<\eta>$ sont ceux obtenus de l'identification de E_0 à une partie de $E\{\eta\}$ (respectivement $E<\eta>$), où E_0 est l'espace vectoriel des éléments constants de E.

La chaire de mathématiques
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
de Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *A. S. Amitsur* — Differential polynomials and division algebra. Ann. of Math. vol. 59, No. 2, 1954.

2. *N. Bourbaki* — Éléments de mathématique. Livre II, Algèbre, Hermann, Paris, 1958.

3. *I. Kaplansky* — An introduction to differential algebra. Hermann, Paris, 1957.

4. *J. F. Ritt* — Differential algebra. American Mathematical Society, New-York, 1950.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. 666.3 : 539.5

CONSIDERATIONS SUR LE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES PATES D'ARGILE ET CALCAIRE *

M. CORBU-MUNTEANU, I. TEOREANU, M. THALER

I. L'obtention de pâtes de mélange brut à faible teneur en eau, pour la fabrication du clinker de ciment Portland, présente un intéret tout particulier dans la production du ciment selon la méthode humide, compte tenu de la possibilité de réduire la consommation spécifique de combustible et d'accroitre la productivité du four. La réduction de la teneur en eau des pâtes de mélange brut est toutefois limitée par la nécésité d'assurer une manipulation commode par pompage, le comportement satisfaisant des pâtes de ce point de vue dépendant de leurs propriétés rhéologiques.

La rhéologie des pâtes brutes a fait l'objet d'études spéciales [1—6] qui ont démontré que les pâtes en question se comportent pour la plupart comme des liquides à seuil de tension (en général quasi-plastiques)

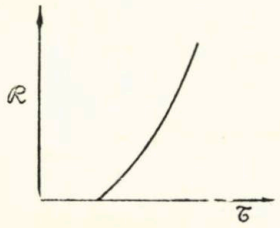


Fig. 1. Courbe rhéologique des liquides à seuil de tension (quasi-plastiques)

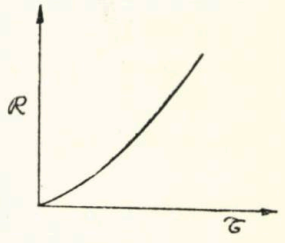


Fig. 2. Corbue rhéologique des liquides pseudo-plastiques

— fig. 1. Les pâtes de mélanges bruts présentent, dans certains cas, un comportement similaire à celui des liquides pseudo-plastiques (sans seuil de tension), ceci dépendant de la nature du composant argileux, de l'humidité de la pâte, de la présence des agents fluidifiants, etc. — fig. 2.

* Communiquée à la session scientifique de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest, 22—23 fevrier 1964.

Les suspensions de calcaire se comportent comme des fluides dilatants, par suite de la structure cristalline du solide dispersé, (sur la fig. 3 on représente les courbes rhéologiques d'une suspension de calcaire de Brașov à 35% d'eau, à la température de 30°C).

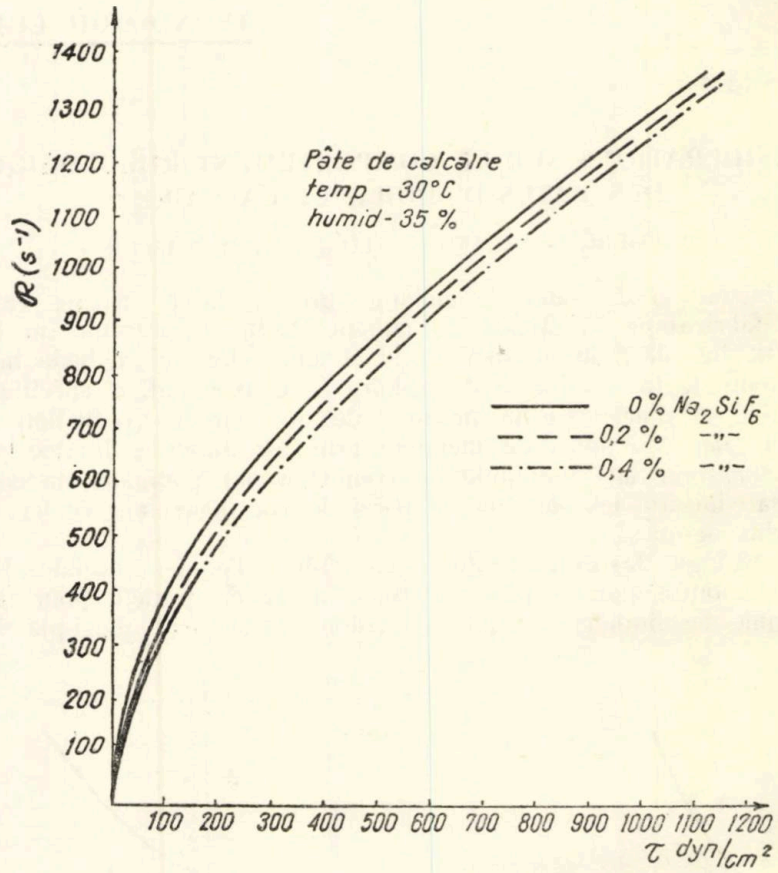


Fig. 3. Courbes rhéologiques des suspensions de calcaire de Brașov

Les suspensions d'argile se comportent comme des liquides plastiques ou pseudo-platisques. Cette particularité est également transmise aux pâtes de mélanges bruts par leur composant argileux. La viscosité plastique de ces pâtes et le seuil de tension augmentent avec la teneur en argile, fonction de la nature de ce matériau, si les autres paramètres du système demeurent invariables.

On suppose que les suspensions à seuil de tension présentent au repos une structure tridimensionnelle, du fait d'un arrangement préférentiel possédant une énergie moindre que dans le cas d'un arangement quelconque. Pour que le liquide quitte cet état on doit dépasser un certain

effort unitaire, caractéristique pour le systéme donné, et égal au seuil de tension F. Moore [7] considère qu'un comportement de ce genre caractérise les barbotines thixotropiques d'argile.

Le comportement quasi — ou pseudo — plastique des pâtes de mélange brut peut s'expliquer si l'on considère que le composant argileux en suspension est constitué d'accumulations ou de chaînes de particules, dues à sa lyophilie et aux tendences de former des structures tridimensionnelles qui sont detruites à mesure que les tensions de cisaillement sont accrues. Leur empêchement réciproque est réduit de ce fait, la viscosité apparente diminuant parallélement à l'augmentation de la tension de cisaillement [1].

La structure des suspensions du genre mentionné, soumise à une action constante de cisaillement, représente le résultat d'un équilibre dynamique entre la tendance vers un arrangement rigide et le processus de destruction par cisaillement ; elle souffre des modifications graduelles avec la variation de la tension de cisaillement.

II. De ce qui précède il s'en suit que pour décrire du point de vue rhéologique les pâtes de mélange brut on peut utiliser les relations générales :

$$(\tau - \tau_0) = m\left(\frac{dw}{dx}\right)^n \tag{1}$$

et

$$\mu_p = m\left(\frac{dw}{dx}\right)^{n-1} \tag{2}$$

dans lesquelles : τ est la tension de cisaillement ;
τ_0 — le seuil de tension ;
$\frac{dw}{dx}$ — le gradient de vitesse ;
μ_p — la viscosité plastique ;
m, n — des coéfficients rhéologiques.

Dans le cas des pâtes de mélange brut, les conditions

$$0 \leqslant \tau_0 < \tau$$

$$m \geqslant 1 \quad \text{et} \quad n \leqslant 1$$

sont simultanément satisfaites.

Les expressions (1) et (2) mènent à la conclusion que toute pâte de mélange brut peut être complètement caracterisée par la valeur du seuil de tension et des coéfficients rhéologiques m et n. En comparant ces valeurs et en tenant compte de leur dépendance des principaux paramètres du système on peut tirer des conclusions concernant aussi les propriétés de pompage de la pâte.

[1] Nous reviendrons sur ces considérations.

Dans le présent ouvrage nous nous proposons d'examiner le comportement rhéologique des pâtes d'argile et calcaire, ainsi que l'influence exercée par divers facteurs sur les paramètres rhéologiques du système et, en prenant pour base un modèle donné de comportement rhéologique de ces pâtes (sommairement exposé ci-dessus), nous tâcherons d'expliquer les résultats expérimentaux obtenus.

III. Les travaux de recherches ont eu pour objets des barbotines d'argile et de calcaire, de différentes compositions et concentrations, en utilisant dans ce but de l'argile de Bucarest et de Fieni, et du calcaire de Brașov, dont la composition est indiquées sur le tableau I. Les paramètres opératoires ont été variés comme l'indiquement les valeurs du tableau 2.

Tableau 1

Matière première	Oxides					Autres oxydes	P. C.
	SiO_2 %	Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	CaO %	MgO %	%	%
Argile de Fieni	49,46	13,85	5,52	11,29	2,20	3,66	13,76
Argile de Bucarest	69,78	9,92	3,47	6,25	1,02	2,95	6,08
Calcaire de Brașov	8,55	3,04	1,24	47,67	0,51	—	38,57

Les matières premières ont été pulvérisées à une finesse correspondant à celle d'une farine brute pour clinker de ciment Portland.

Tableau 2

Teneur en argile du mélange brut %	Humidité de la barbotine %	Température °C	Addition de Na_2SiF_6 par rapport au mélange brut %	Addition de Na_2SiO_3 par rapport au mélange brut %
0 — 100	28 — 40	20 — 35	0,2 — 1	0,05 — 2

Sur chacun des mélanges utilisés on a déterminé les courbes rhéologiques respectives. Ces déterminations ont été effectuées à l'aide d'un rhéoviscosimètre rotatif, très indiqué par sa précision (erreur $\pm 3\%$), par son grand intérvalle de mesure des tensions de cisaillement et de la viscosité (réalisable par un minimum de travail), et la comodité opératoire.

Un dessin schématique de l'appareil est représenté sur la fig. 4. En principe, l'appareil est constitué par deux cylindres coaxiaux, un mécanisme de commande des cylindres, un dispositif de mesure et un système thermostatique.

Les barbotines expérimentales ont été introduites dans le cylindre exterieur de l'appareil. Le cylindre intérieur efectue un mouvement giratoire dans la barbotine, la vitesse de rotation étant chosie par rapport à la viscosité de la pâte. Pour chaque détermination on observe le moment de rotation du cylindre intérieur α (potentiomètre 7) et l'échelon de vitesse (manette 4).

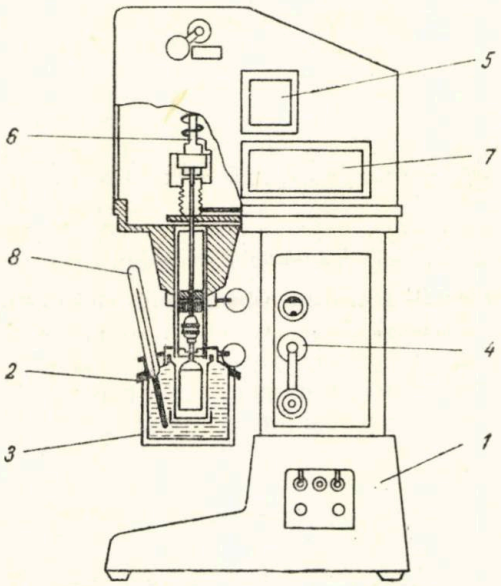


Fig. 4. Rhéoviscosimètre rotatif
1 — Pied ; 2 — Cylindre intérieur ; 3 — Thermostat ; 4 — Manette de vitesse ; 5 — Numerateur de fraquence ; 6 — Dynamometre ; 7 — Potentiomètre ; 8 — Thermomètre

A partir des valeurs observées on calcule la tension de cisaillement et la rhéopente correspondante.

La tension de cisaillement est déterminée par la relation

$$\tau = \alpha z \ , \qquad (3)$$

τ étant la tension de cisaillement, en dynes/cm^2 ;
α — le moment de rotation, en divisions ;
z — la constante du cylindre intérieur utilisé, en dynes/cm^2 div.

Dans le cas des barbotines de calcaire et argile on a employé un cylindre à $z = 12$, tandis que pour les pâtes d'argile (sans calcaire), $z = 54{,}7$.

La viscosité de la pâte a résulté de la relation

$$\mu_p = \frac{\tau}{\mathcal{R}} 100 = \xi \tau \qquad (cP) \qquad (4)$$

La tableau 3 contient les valeurs de la rhéopente ($\mathfrak{R}$) et du facteur ξ, fonction de l'échelon de vitesse de rotation.

Tableau 3

Echelon de vitesse de rotation	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Rhéopente (s^{-1})	3	5,4	9	16,2	27	48,6	81	146	243	437	730	1310
Facteur ξ (s)	33,3	18,5	11,1	6,7	3,7	2,06	1,234	0,686	0,412	0,221	0,137	0,076

On a également effectué des essais de sédimentation des suspensions.

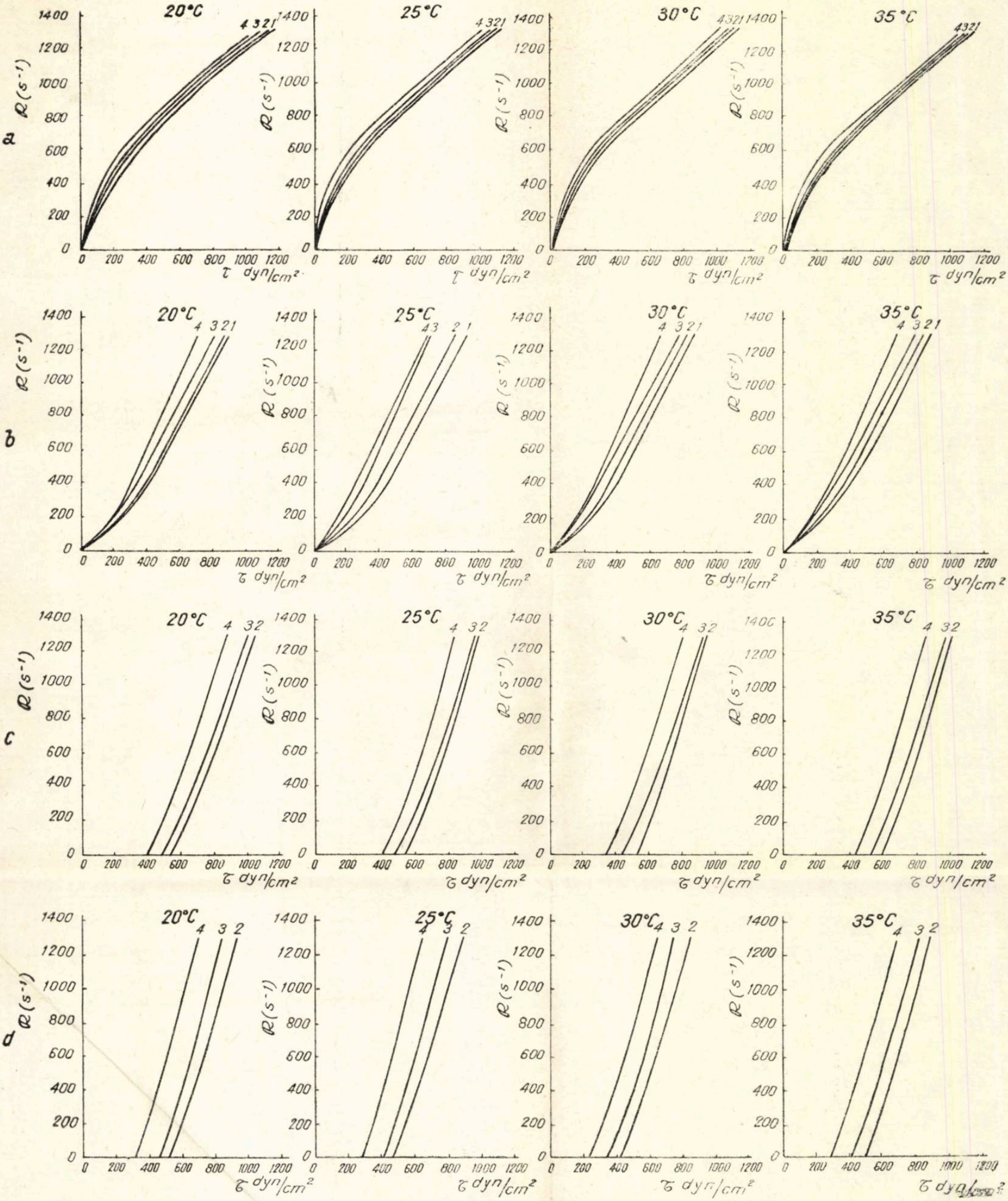
IV. Les résultats obtenus ont représenté environ 4000 points expédimentaux. De cette manière, nous avons été à même de tirer des conclusions concernant l'influence exercée sur le comportement rhéologique des pâtes par certains paramètres, notamment : la concentration du composant solide en suspension, la composition du mélange de matières premières dispersées et la nature de l'argile utilisée, l'addition de fluidifiants, la température de la pâte.

1. Les courbes rhéologiques obtenues pour les suspensions de calcaire, d'argile et de mélange de calcaire et d'argile, présentées sur la fig. 5, font ressortir le comportement rhéologique nettement differencié des suspensions, dépendant de la nature du composant solide disprsé. Les pâtes de mélange brut pour clinker, préparées à partir du calcaire de Braşov et de l'argile de Fieni, se comportent comme des liquides pseudo-plastiques, pratiquement sans seuil de tension.

Un pourcentage accru d'argile dans les suspensions de calcaire et argile a pour effet un caractère plastique plus accentué des barbotines ; le seuil de tension et la viscosité plastique présentent dans ce cas des valeurs plus élevées si l'humidité, la température et l'addition de fluidifiants sont maintenues constantes, ces facteurs exerçant également une influence essentielle sur la rhéologie des suspensions considérées.

La relation de dépendance entre la viscosité de la suspension et la concentration du composant solide — fig. 6 — est aisément mise en évidence à l'aide des courbes rhéologiques obtenues pour les pâtes à différentes teneures en humidité.

Dans le cas de la suspesion de calcaire, l'augmentation de la viscosité parallèlement à la concentration du composant solide est moins importante que dans celui des suspensions d'argile. Les mélanges bruts de calcaire et argile manifestent un comportement intermédiaire. L'humidité accrue des pâtes jusqu'a 40...55% à pour résultat une diminution essentielle de leur viscosité, mais au delà de ces valeurs et dépendant de la nature



Diagrames : *a* — Calcaire ; *b* — Pâte brute ; *c* — Argile de Fieni ; *d* — Argile de Bucarest ; Courbes : 1 — 28% eau ; 2 — 30% eau ; 3 — 35% eau ; 4 — 40% eau.

du solide dispers (40% pour le calcaire et 55% environ pour l'argile), cette diminution est moins accentuée. Les suspensions d'argile de Bucarest sont plus fluides que celles à base d'argile de Fieni, probablement du fait de leur teneur plus élevée en silice quartzeuse.

Par suite de son importance, la dépendance de la viscosité d'une suspension de sa concentration et de la nature du solide dispers à fait l'objet de nombreuses études.

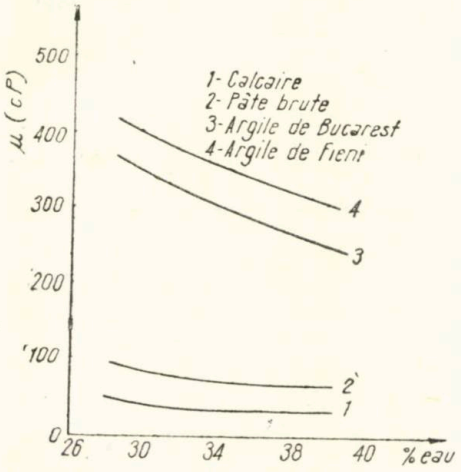


Fig. 6. Variation de la viscosité des pâtes avec la teneur en humidité

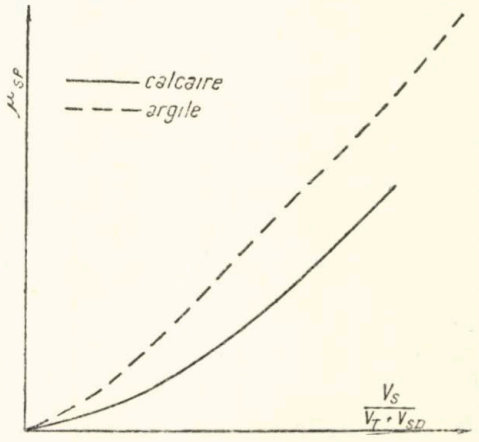


Fig. 7. Variation de la viscosité spécifique avec le rapport $\frac{v_S}{v_T + v_{SD}}$ pour les suspensions d'argile de Bucarest et de calcaire de Brașov.

En prenant pour base les lois hydrodynamiques, Enstein [8] a établi pour les suspensions diluées, formées de particules sphériques, l'équation :

$$\mu_{SP} = 2{,}5\,\varphi\,, \tag{5}$$

dans laquelle

μ_{SP} est la viscosité spécifique de la suspension,

φ — la fraction de volume occupée par le solide en suspension.

La viscosité spécifique de la suspension est définie par l'expression

$$\mu_{SP} = \frac{\mu_S - \mu_L}{\mu_L} = \frac{\mu_S}{\mu_L} - 1\,,$$

dans laquelle

μ_S est la viscosité de la suspension,

μ_L — la viscosité du liquide dispersant.

Le graphique de l'équation (5) ayant pour coordonnées μ_{SP} et φ donne une droite qui passe par l'origine.

A des concentrations plus élevées on constate une déviation de plus en plus accentuée du comportement des suspensions par raport à l'équation d'Einstein. Dans ce cas il est préférable d'appliquer l'équation de Fikentscher et Mark [9] :

$$\mu_{SP} = 2{,}5\frac{\varphi}{1-\varphi}. \tag{6}$$

Dans une ouvrage publie en 1949, Robinson [10] établit une expression plus générale, applicable aux suspensions newtoniennes :

$$\mu_{SP} = \frac{K\varphi}{1-\varphi'\varphi} \tag{7}$$

où φ' représente le rapport entre le volume de sédiment et le volume du composant solide ;

K est le coéfficient de frottement, dépendent de la forme et la nature de la surface du solide.

Pour les suspensions fortemnt diluées, les expressions (6) et (7) se réduisent à l'équation (5) dans le cas des particules sphériques, non-déformables.

L'équation de Robinson n'est pas satisfaisante pour les suspensions non-newtoniennes. En effet, si la viscosité spécifique des suspensions de ce genre est tracée en fonction du rapport $\frac{v_S}{v_T - v_{SD}}$ (v_S étant le volume du solide dispersé, v_T le volume total, et v_{SD} le volume du sédiment) on n'obtient pas une droite passant par l'origine comme il se devrait si l'équation de Robinson serait valable. La déviation est plus importante aux concentrations plus fortes en composant solide. Sur la fig. 7 on présent, à titre d'exemple, les courbes résultant dans le cas des suspensions d'argile de Bucarest et de calcaire de Braşov.

Dans ses études concernant la rhéologie des suspensions d'oxyde de thorium Kearsey [11, 12] considère que le volume effectif du solide dispersé doit tenir également compte de l'eau associée aux particules. En conséquence, dans l'équation (7) cet auteur remplace φ par φ_R et φ' par φ'_R, les valeurs φ_R et φ'_R étant définies par

$$\varphi_R = \frac{v_S + v_L}{v_T}$$

et

$$\varphi'_R = \frac{v_{SD}}{v_S + v_L}$$

où v_L est le volume du liquide associé aux particules. Dans ces conditions, l'expression (7) devient :

$$\mu_{SP} = \frac{K\varphi(v_S + v_L)}{v_S(1-\varphi\varphi')} \tag{7'}$$

Toutefois, puisque

$$\frac{v_S + v_L}{v_S} = \varphi' (1 - \varepsilon),$$

il résulte que

$$\mu_{SP} = \frac{K \varphi \varphi' (1 - \varepsilon)}{1 - \varphi \varphi'}, \tag{8}$$

dans cette expression, ε étant la fraction de vides du sédiment.

La relation (8) peut être écrit aussi sous la forme suivante :

$$\frac{\varphi}{\mu_{SP}} = \frac{1}{K \varphi' (1 - \varepsilon)} - \frac{\varphi}{K(1 - \varepsilon)}, \tag{8'}$$

Il s'en suit que $\frac{\varphi}{\mu_{SP}}$ est une fonction non-linéaire de φ.

Nos essais ont démontré cependent que, dans le cas des suspensions d'argile et de calcaire (sans fluidifiants) caractérisées par des valeurs de φ comprises entre 0,07 et 0,5, on obtient quand même une dépendance pratiquement linéaire de φ du rapport $\frac{\varphi}{\mu_{SP}}$. Par suite, pour l'intervalle considéré, et a une tension de cisaillement constante,

$$\frac{1}{K \varphi' (1 - \varepsilon)} = \text{const.},$$

ce qui est possible quand

$$v_S = \text{const.}$$

ou bien

$$v_L = \beta v_S,$$

β étant une constante de proportionnalité.

Vu que la première condition n'a pas été remplie dans les expériences effectuées par nous, on conclut à la valabilité de l'égalité $v_L = \beta v_S$.

Ce qui précède met en évidence la possibilité de déterminer le produit $K(1 - \varepsilon)$ de la pente des droites résultant du graphique mentionné $\left(\text{égale à } \frac{1}{K(1 - \varepsilon)}\right)$. Connaissant la valeur de $K(1 - \varepsilon)$ des données expérimentales on peut calculer φ' aussi.

En choisissant des tensions de cisaillement différentes on constate que $K(1 - \varepsilon)$ aussi bien que φ' sont fonction de la tension de cisaillement.

Pour les suspensions d'argile ou de mélange brut, le produit $K(1 - \varepsilon)$ décroit exponentiellement avec l'augmentation de τ, et atteint une valeur constante (fig. 8) pour une tension de cisaillement donnée τ_{cr}. Cette constatation concorde avec le modèle que nous nous sommes proposé pour

les suspensions mentionnées et qui impose non seulement de prendre en considération la lyophilie et les irrégulairités des particules dispersées dans l'eau, mais aussi la présence de chaînes de particules — un fait caractéristique pour le comportement argileux [7].

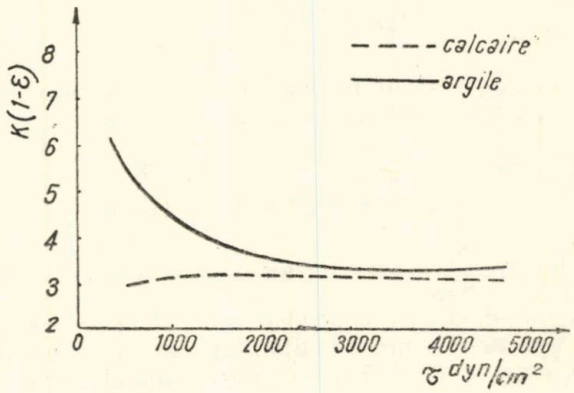


Fig. 8. Variations du produit K (1-ε) avec τ dans le cas des suspensions d'argile de Bucarest et de calcaire de Braşov

L'eau est retenue autant sous la forme de lyosphère, que dans les irrégularités des particules et des chaînes formées. Le frottement des particules dépend, d'une part, de la nature et de la régularité de la couche de liquide associé aux particules, et d'autre part du degré d'association en chaînes de particules. Le grosseur de la lyosphère, ainsi que le nombre des chaînes formées au sein de la suspension influencent également la fraction de vides — ε. Les chaînes de particules et la lyosphère afférente aux particules sont détruites à l'augmentation de la tension de cisaillement, les particules se dégagent de la pellicule visqueuse superficielle d'eau, la fraction volumique effective de composant solide décroît, le coéfficient de frottement K se modifie, tous ces processus déterminant la variation du produit $K(1-\varepsilon)$ avec la tension de cisaillement. Le produit $K(1-\varepsilon)$ doit donc être conssidéré comme une caractéristique des suspensions de ce genre, dépendante aussi bien de la nature, le degré de dispersion et la forme des particules, que de la tension de cisaillement.

Les expériences effectuées sur des suspensions de calcaire ont démontré que le produit $K(1-\varepsilon)$ augmente avec τ (fig. 8) aux tension réduites de cisaillement. Cette constatation s'explique par le comportement dilatant particulier à ces suspesions ; quand la tension de cisaillement augumente, les interstices entre les particules s'élargissent probablement, ce qui se traduit par des efforts de cisaillement accrus lorsque les particules se

déplacent réciproquement. La viscosité apparente augmente par conséquent avec la tension de cisaillement, jusqu'à une valeur τ_{cr} donnée de cette dernière.

L'influence de la tension de cisaillement sur φ' paraît évidente si on considèère les paramètres qui définissent $\varphi' = \frac{v_{SD}}{v_S}$, en dépendance directe du volume d'eau associé au solide dispers. Par suite, φ' décroit avec l'augmentation de la tension de cisaillement. En ce qui concerne les barbotines de calcaire de Braşov et d'argile de Bucarest on remarque une légère diminution de φ' avec τ, les valeurs obtenues oscillant entre 2 et 3, la variation étant moindre pour les suspensions de calcaire.

Des considérations exposées ci-dessus il résulte que pour la viscosité d'une suspension donnée on peut écrire la relation

$$\mu_{SP} = \frac{K^*_{(\tau)} \varphi'_{(\tau)} \varphi}{1 - \varphi \varphi'_{(\tau)}} \tag{9}$$

où $K^*_{(\tau)} = K(1 - \varepsilon)$, valeur dépendent de la tension de cisaillement ainsi que $\varphi'_{(\tau)}$.

2. On a montré plus haut que l'humidité plus élevée des barbotines de mélange brut, jusqu'a 40 ... 50%, détermine une diminution importante de leur viscosité et, de ce fait, une amélioration substantielle de leurs propriétés de pompage. Du point de vue pratique il importe cependant d'obtenir des pâtes de mélange brut pompables, à teneur réduite en humidité. Dans ce but, un facteur important pour le réglage de la viscosité des pâtes est l'addition d'agents fluidifiants, aptes à modifier la tension superficielle du milieu dispersant (l'eau), la lyophilie des particules dispersées, ou leur potentiel électrique. Ce dernier moyen est spécifique pour les fluidifiants ioniques. Dans le présent ouvrage nous avons étudié le comportement rhéologique de pâtes fluidifiées justement par des additifs faisant part de cette catégorie, notamment du silicofluorure de sodium (Na_2SiF_6) et du silicate de sodium (Na_2SiO_3).

Les données obtenues démontrent clairement que les fluidifiants mentionnés exercent une action particulière sur le composant argileux des mélanges bruts. La réduction maximum de la viscosité en présence des fluidifiants est plusieures fois plus accentuée dans le cas des pâtes de mélange brut que dans celui des suspensions de calcaire [2]). La réduction de la viscosité, constatée dans le cas des suspensions de calcaire est probablement due, en particulier, à la teneur en argile du calcaire de Braşov.

Les résultats mentionnés étaient prévisibles si l'on tient compte de la nature des fluidifiants utilisés, et du comportement de l'argile en suspension, déterminée à son tour par la structure cristalline et chimique du matériau.

---

2) Le mélange brut est constitué d'argile de Fieni et calcaire de Braşov, à une degré de saturation $S_k = 0{,}9$.

C'est un fait conu qu'une particule d'argile représente, en principal, un fragment du réseau de l'hydroalumosilicate constitutif dont les pointes, les aretes et la surface portent des valences insatisfaites ; la particule à charge négative se comporte comme un macroanion. Si un électrolyte est ajouté à la suspension, il résulte une permutation adsorptive conduisant à une modification du potentiel électrique du macroanion. L'effet maximum de fluidifiant correspond à un état d'équilibre donné, établi par l'addition de l'électrolyte et supposant un potentiel négatif maximum du macroanion argileux :

$$(A)\ H_x \cdot nH_2O + \frac{x}{2} Na_2SiO_3 \rightleftharpoons (A)^{x-} + \boxed{xH^+ + \frac{x}{2} SiO_3^{--}} + nH_2O + xNa^+$$

$$(A)\ H_x \cdot nH_2O + \frac{x}{2} Na_2SiF_6 \rightleftharpoons A^{x-} + \boxed{xH^+ + \frac{x}{2} SiF_6^{--}} + nH_2O + xNa^+$$

Un addition supplémentaire d'électrolyte dérange l'équilibre mentionné, le processus ayant lieu selon la schéma suivant :

$$(A)^{x-} + n\,Na^+ + y\,H_2O \rightleftharpoons (A)\,Na_x \cdot nH_2O + (n-x)\,Na^+ + (y-n)\,H_2O.$$

Le potentiel négatif du macroanion argileux baisse, en conséquence, la fluidité de la suspension décroît.

Les meilleurs fluidifiants sont ceux qui, d'une part, contiennent des cations caractérisés par une faible capacité d'adsorption sur le macroanion argileux, et d'autre part sont par eux-mêmes des électrolytes puissants. Les électrolytes au sodium présentent un intérêt particulier de ce point de vue et, compte tenu de ce qui précède, les résultats plus satisfaisants, obtenus par le silicofluorure de sodium, sont aisément explicables. Afin de souligner ce fait nous présentons sur la fig. 9, par comparaison, les variations de la viscosité des pâtes de mélange brut (à l'argile de Fieni et au calcaire de Braşov) avec le pourcentage de Na_2SiF_6 ou de Na_2SiO_3, dans le cas des valeurs constantes de l'humidité et de la température de la pâte, ainsi que de la tension de cisaillement.

On constate un effet maximum à une addition d'environ 0,4% de Na_2SiF_6, respectivement 0,12% de Na_2SiO_3.

Le traitement par Na_2SiF_6 ou Na_2SiO_3 donne lieu à des modifications essentielles, non seulement de la viscosité plastique, mais aussi du seuil de tension de la suspension, qui souffre une reduction importante. Ce fait ressort d'une manière particulièrement évidente dans le cas des barbotines d'argile. A titre d'exemple on présente sur la fig. 10 les courbes rhéologiques de certaines pâtes d'argile de Bucarest et de Fieni.

Les additions de fluidifiants changent parfois fondamentalement les caractéristiques de flux des suspensions. Ainsi, par exemple, des pâtes de mélange brut (à base d'argile de Fieni ou de Bucarest) ne présentent pratiquement pas un seuil de tension, même en l'absence des fluiditiants ;

un pourcentage optimum de fluidifiant ajuoté — à un taux d'humidité constant d'environ 35% — transforme les barbotines de cette catégorie, celles-ci passant de l'état pseudo-plastique à celui de liquides à comportement pratiquement newtonien. Le caractère rhéologique de ces pâtes est totalement modifié : la viscosité devient indépendante de la tension de

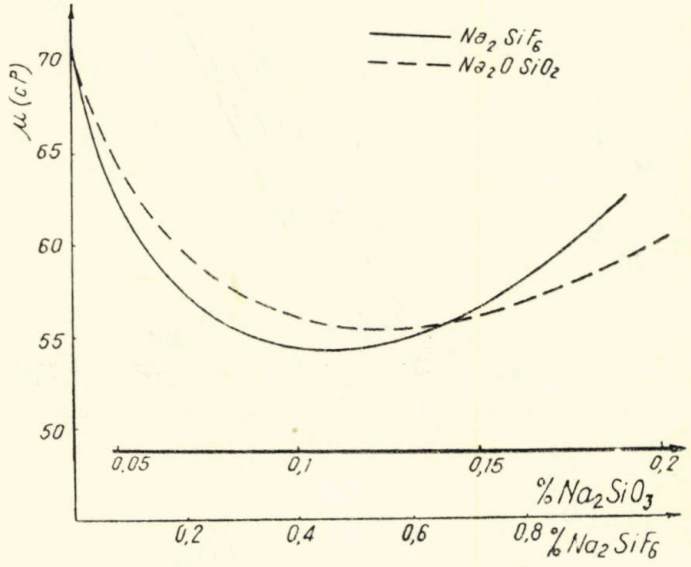


Fig. 9. Variation de la viscosité des pâtes brutes avec l'addition de fluidifiant

cisaillement. En utilisant le Na_2SiF_6 ou Na_2SiO_3 on peut obtenir d'habitude des pâtes pompables, même à un teneur en humidité de 26 à 28%, mais ces pâtes présentent un comportement pseudo-plastique, même à un addition optimum de fluidifiants. Cette constantation est fort importante pour caractériser les suspensions en question.

3. L'étude de l'influence exercée par la température sur la viscosité des pâtes d'argile et calcaire met en évidence un minimum correspondant à un certain intervalle étroit de températures — un fait signalé du reste dans la littérature de spécialité [6]. Nos résultats ont confirmé ce minimum à des températures de 30...32°C, au delà desquelles on constate une augmentation de la viscosité.

La caractère de la dépendance des viscosités de la température, dans le cas des suspensions étudiées, à été expliqué par Piveni [6] dans le sens de deux actions contraires qui entrent en jeu, et dont la prépondérance dans certains domaines de température détermine un comportement spécifique des pâtes, du point de vue de leur viscosité. L'argile, aussi bien que le calcaire, se comportent comme des matériaux lyophiles, évidemment à des degrés différents. Des couches adsorptives se forment à la surface des particules solides disperées dans le milieu aqueux.

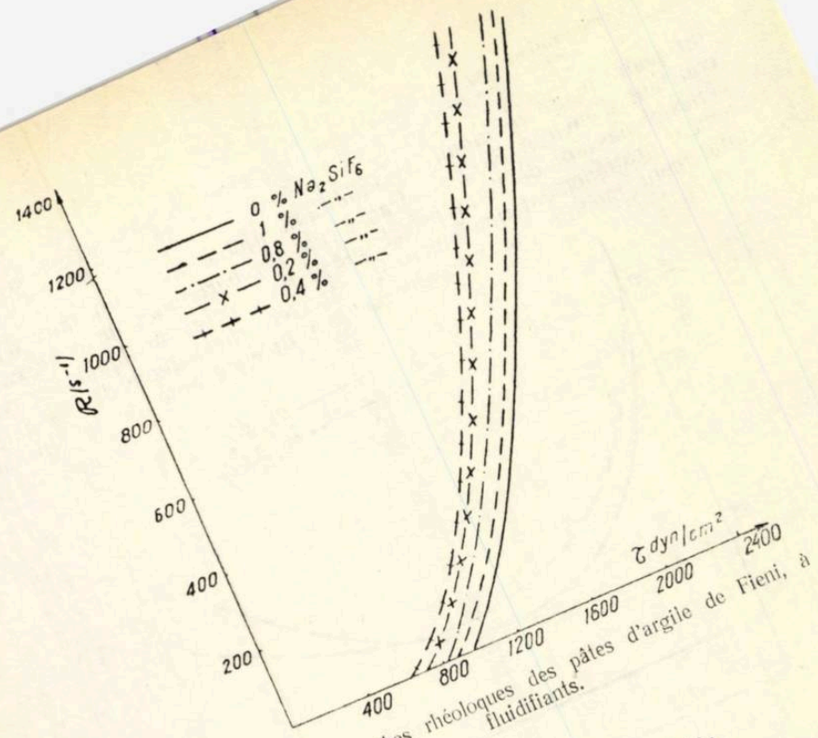


Fig. 10-a. Courbes rhéoloques des pâtes d'argile de Fieni, à fluidifiants.

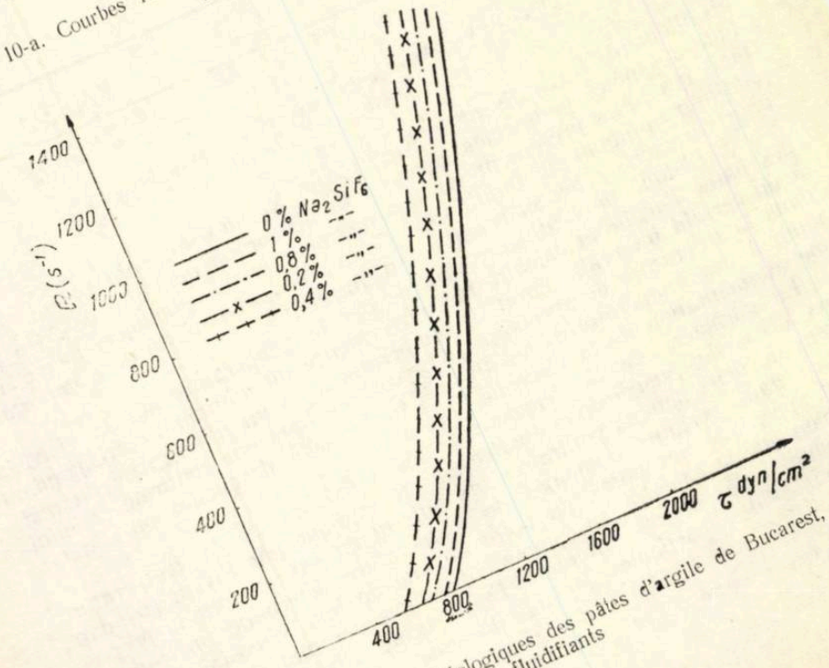


Fig. 10-b. Courbes rhéologiques des pâtes d'argile de Bucarest, à fluidifiants

Les températures de plus en plus élevées provoquent une certaine destruction des micelles formées, une partie de l'eau adsorbée en est éliminée, par conséquent les particules sont partiellement élibérées de la couche aqueuse visqueuse. Ce processus détermine une réduction de la viscosité. Aux températures plus élevées, l'agitation thermique des particules disperses est toutefois simultanément intensifiée, la fréquence des chocs entre les particules croît et, comme résultat, le processus de régroupement des particules s'intensifie, ce qui conduit à la viscosité augmentée des particules. Le premier processus est prépondérant jusqu'à environ 30°C, donc la viscosité décroît, ensuite le second processus devient prépondérant, et la viscosité commence à s'élever.

Aux explications précédantes il convient d'ajouter une série d'autres considérations. La viscosité du milieu dispersant décroît avec la température, d'abord plus vite, après beaucoup plus lentement. On doit également considérer le fait que l'épaisseur de la couche d'eau afférente aux particules diminue au fur et à mesure de l'élimination d'une partie de l'eau adsorbée. Les forces reliant cette couche à la surface de solide dispersé gagnent donc en importance, par conséquent l'élimination de l'eau a lieu de plus en plus lentement quand la température s'éleve.

A partir des résultats obtenus sur des suspensions de craie et d'argile d'une seule et même provenance, Piveni [6] a considéré que la réduction de la viscosité avec la température est moins importante dans le cas de l'argile, par suite de la lyophilie plus accentuée de celle-ci. Les valeurs expérimentales réalisables sont néanmoins assez contradictoires, et l'explication de ce fait réside dans la complexité du phénomène, l'intensité différente des processus qui interviennent à l'augmentation de la temperature, en dépendance serrée de la nature de la surface du composant solide dispersé (et, de ce point de vue, le système : roche calcaire — roche argileuse est particulièrement hétérogène). Des situations sont possibles où l'augmentation de la température détermine une diminuation initiale plus accentuée de la viscosité des pâtes d'argile ; si la couche retenue par adsorption est plus épaisse, l'eau de la périphérie peut être liée parfois par des forces plus faibles même que celles qui retiennent l'eau adsorbée sur les particules calcaires solides, moins lyophiles, la constatation mentionnée paraissant donc plausible dans un premier intervalle de températures. Ultériuerement il serait pourtant très naturel que le processus décrit se ralentisse dans le cas des suspensions d'argile, par conséquent l'augmentation de la viscosité, constatée aux températures plus élevées, serait plus accentuée. Le comportement réel d'un système donné dépend d'ailleurs, en principal, du rapport qui s'établit entre la vitesse du processus d'élimination de la couche d'eau d'adsorption du composant argileux ou calcaire d'une part, et la vitesse de réunion des particules constituantes, d'autre parte. Étant donné qu'on se trouve en présence d'un système extrêmement hétérogène, à structure et composition très variables, on ne peut tirer à priori des conclusions concernant le problème

discuté. Dans le cas examiné dans le présent ouvrage on a constaté une diminuation moins accentuée, avec la température, de la viscosité des suspensions de calcaire (de Braşov) — fig. 11.

Dans le cas des pâtes contenant des fluidifiants, le caractère des variations de la viscosité avec la température demeure pratiquement

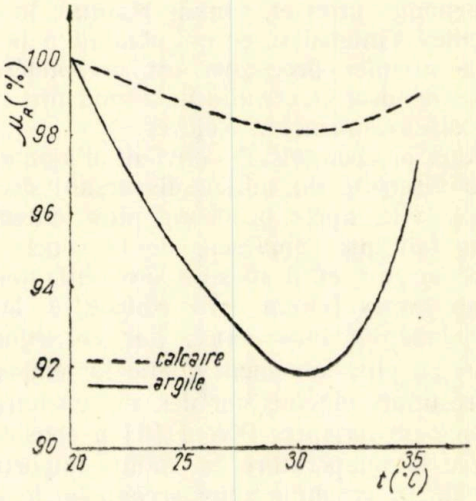


Fig. 11. Variation avec la température de la viscosité des suspensions d'argile de Fieni et de calcarie de Braşov (la viscosité est exprimée en % par rapport à la valeur obenue à 20° C)

inchargé pour toutes les pâtes étudiées. La présence des fluidifiants suppose une stabilité accrue de la couche adsorptive, ce qui fait que l'élimination de l'eau de la surface des particules dispersées, et de même leur coagulation par suite de l'agitation thermique, perdent, de leur intensité. L'effet mentionnée est probablement compensateur (tout au moins dans le domaine de températures étudié), de sorte que le caractère de la dépendance viscosité-température ne se modifie pas par rapport aux pâtes du même genre, sans addition de fluidiifants [3].

L'influence de la température sur la viscosité des suspensions d'argile et de calcaire doit être également considérée fontcion de la tension de cisaillement appliquée et de l'humidité du système. Sur la fig. 12 on représente la manière dont varie, selon la température, la différence entre la viscosité a 20°C et celle mesurée à des températures plus élevées (jusqu'a 35°C), dans le cas des pâtes de farine brute à humiditités différentes, et à diverses tensions de cisaillement. En règle générale, on constate que

[3] On pouvait s'attendre à ce que l'influence de la présence des fluidifiants se manifeste particulièrement dans le cas des barbotines argileuses.

la viscosité décroît d'autant plus que la tension de cisaillement est plus faible et l'humidité de la pate plus élevée.

Le modèle présente antérieurement, concernant le comportement rhéologique des pâtes de mélange brut concorde parfaitement avec les observations mentionées. L'augmentation de la tension de cissailement suppose,

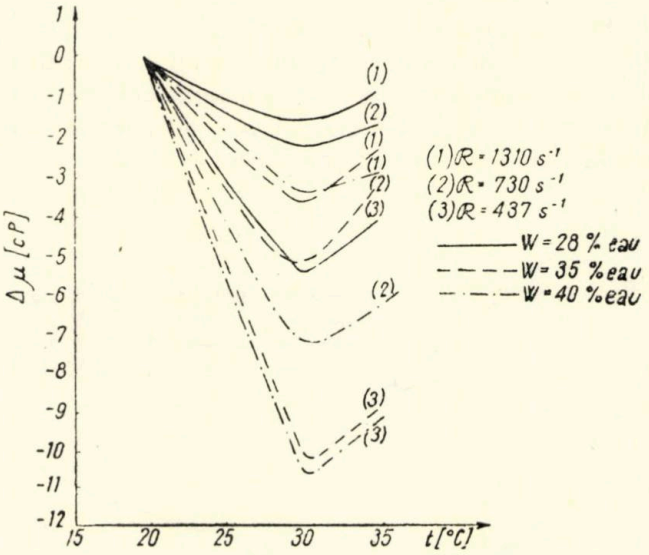


Fig. 12. Réduction de la viscosité avec la température, pour les pâtes brutes à divers taux d'humidité, soumises à des vitesse de cisaillement différentes

d'une part, un effet de freinage du processus de coagulation des particules dispersés, et de l'autre une diminuation de l'épaisseur de la couche adsorptive d'eau. Ces deux effets conduisent par eux-mêmes à une réduction importante de la viscosité des pâtes considérées. Il est donc naturel que l'influence de la température soit moins forte dans ce cas, par coséquent la viscosité diminuera d'autant plus — à l'augmentation de la température jusqu'à une valeur optimum — que la tension de cisaillement sera plus faible.

A des taux supérieurs d'humidité, et compte tenu de la concentration amoindrie du solide en suspension, la probabilité des chocs entre les particules décroit, par suite le processus de coagulation de ces dernières se ralentit. Il en résulte que la réduction de la viscosité avec la température sera plus importante dans le cas des suspensions plus diluées, fait confirmé dans la pratique.

V. Les études rhéologiques efectuées on mis en évidence — ainsi qu'on l'a montré — le comportement pseudo-plastique des barbotines de

mélange brut (à base d'argile de Fieni et de calcaire de Brașov). Par suite on peut écrire pour ces pâtes :

$$\tau = m(\Re)^n \tag{10}$$

et

$$\mu_p = m(\Re)^{n-1}. \tag{2}$$

Les pâtes brltes considérées peuvent donc être parfaitement caractérisées du point de vue rhéologique, si on connait les coéfficients m et n. Pour déterminer ces coéfficients on a utilisé seulement les valeurs expérimentales obtenues pour des pâtes de mélange brut traitées par des additions optimum de fluidifiants (0,4% de Na_2SiF_6). Dans ce cas, les princi-

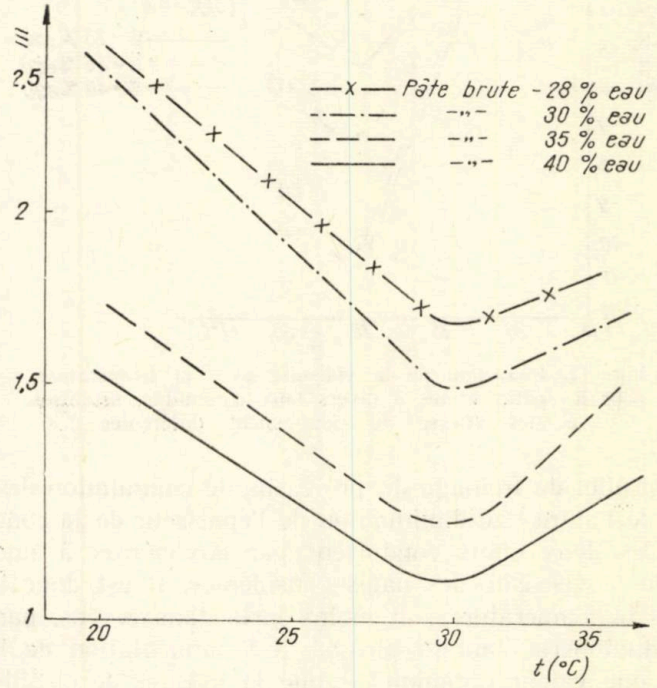


Fig. 13. Variation du coéfficient *m* avec la température pour les pâtes de mélange brut à différentes teneurs en eau

paux paramètres qui influencent les coéfficients rhéologiques du système sont la température et l'humidité

Une représentation graphique des coéficients m et n fonction de la température fait ressortir, dans le premier cas, un minimum, et dans le second, un maximum, à la température de 30°C (fig. 13 et 14). Comme suite, à partir des valeurs expérimentales on a obtenu des corélation pour

m et n, fonction de la température et de l'humidité, aussi bien dans le domaine de températures jusqu'a 30°C qu'au delà.

Ainsi [4]

a) à des températures jusqu'à 30°C.

$$m = 0{,}22\ t^{-1{,}54}\ w^{-1{,}89} \tag{11}$$

$$n = 0{,}256\ t^{0{,}2}\ w^{0{,}3} \tag{12}$$

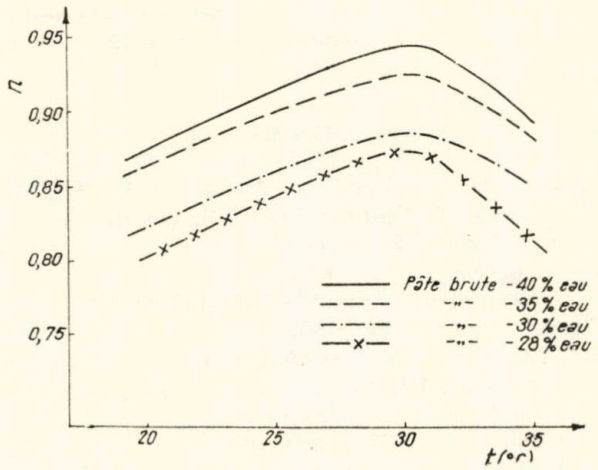


Fig. 14. Variation du coéfficient n avec la température pour les pâtes de mélange brut à différentes teneurs

b) à des températures plus élevées que 30°C

$$m = 0{,}12\ t^{0{,}375}\ w^{-1} \tag{13}$$

$$n = 0{,}29\ t^{-0{,}4}\ w^{0{,}3}, \tag{14}$$

où t est la température de la barbotine, et w est son humidité.

6. Dans le présent ouvrage on a étudié, de point de vue rhéologique, des pâtes d'argile, de calcaire, et des mélanges de calcaire et d'argile. On a observé l'influence de la nature du solide dispersé, de l'humidité, de l'addition de fluidifiants et de la température sur le comportement rhéologique des pâtes étudiées. On à obtenu de la sorte des résultats qui ont pu être expliqués. à l'aide d'un certain modèle rhéologique. On a également établi des relations pour les coéfficients rhéologiques

[4] Le dépendance des coéfficients m et n du degré de saturation de la farine brute est peu importante entre les limites usueles des valeurs de celle-cî Les corrélations établies sont valables seulement pour les domaines étudiés de température et d'humidité de la pâte (donc les domaines intéréssants du point de vue pratique).

des pâtes de mélange brut, à base d'argile de Fieni, fonction de leur humidité et de leur température.

Des recherches de ce genre doivent en tous cas être continuées sur les barbotines d'argile et de calcaire qui constituent des matiéres premières pour des fabriques de ciment. Ces études présentent, en même temps, non seulement un intérêt pratique, mais aussi une importance théorique, car elles permettent une connaissance plus approfondie de la manière dont la composition minéralogique, en premier lieu celle des argiles, influence le comportement rhéologique des pâtes de mélange brut.

La chaire de materiaux de constructions
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *R. Dellyes :* Rev. des. Mat. de Constr. nr. 466—467, 193 (1954).
2. — Rev. des. Mat. de Constr. nr. 468, 231, (1954).
3. *M. Papadakis :* Silicat. Industr. *22*,612 (1957).
4. — Silicat. Industr. *22,675 (1957).*
5. *L. A. Bernstein, A. D. Guserov :* Tement, *28*, nr. 1,16 (1962).
6. *I. Ia. Piveni :* Tement, 21, nr. 1, 21 (1955).
7. *E. Moore :* Trans. Brit. Ceram. Soc. *58*,470 (1959).
8. *A. V. Dumanski :* „Coloizii", Editura de stat, Bucureşti (1949).
9. *H. Fikentscher, H. Mark :* K. Z., *49*, 135 (1929).
10. *J. V. Robinson :* J. Phys. Chem. *53*, 1042 (1949).
11. *R. Murdoch, H. A. Kearsey :* Trans. Inst. Chem. Engrs. *38*,165 (1960).
12. *H. A. Kearsey :* Trans. Inst. Chem. Engrs. *40*, 140 (1962).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

C.Z. 547.431.4 : 667.621.52

COPOLIMERIZAREA ÎN EMULSIE APOASĂ A ACETATULUI DE VINIL CU ULEI DE IN *

I. CRISTEA, GR. POP, GH. IONIȚĂ

Posibilitatea copolimerizării monomerilor vinilici cu uleiuri vegetale nesaturate, este cunoscută din 1930, dar primele produse aplicate practic au apărut în 1944 sub forma „uleiurilor stirenizate". Ulterior au fost sintetizați copolimeri ai uleiurilor cu nitril acrilic, iar recent cu acetat de vinil.

Reacția s-a executat în general în masă sau în mediu de xilen [1, 2, 3, 4], după procedee obișnuite în tehnica polimerilor înalți.

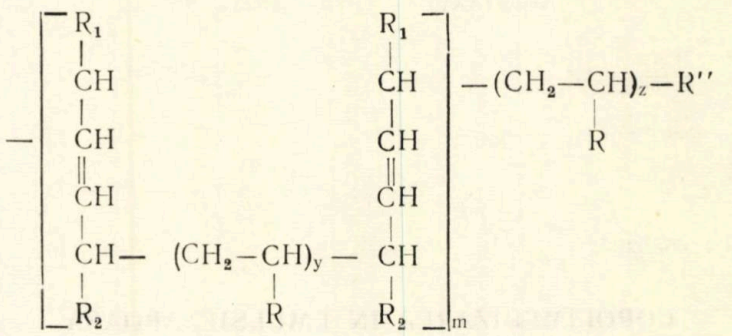
Din cauza dificultăților întîmpinate la analiza acestor produse, ca urmare a compoziției complexe, mecanismul reacției de copolimerizare și structura copolimerilor obținuți sînt și în prezent, în mare măsură, neelucidate.

Pentru a explica legarea posibilă a polimerului vinilic de radicalii acizilor grași nesaturați din uleiuri, au fost propuse două scheme structurale fundamentale, în funcție de poziția dublelor legături în lanțurile polienice ale uleiurilor.

În cazul uleiurilor cu duble legături conjugate, se admite copolimerizarea după o reacție de tip dien și formarea unei structuri asemănătoare cu a copolimerului stirenbutadienă, uleiul putînd fi considerat o butadienă 1,4 substituită :

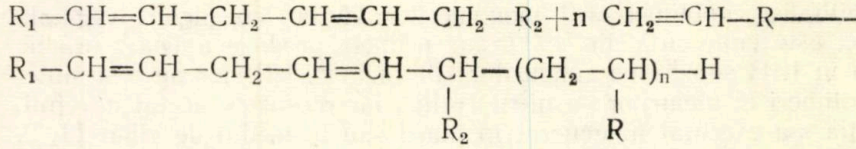
$$n\ R{-}CH{=}CH_2 + 2m\ \begin{array}{l} R_1 \\ | \\ CH \\ \| \\ CH \\ | \\ CH \\ \| \\ CH \\ | \\ R_2 \end{array} \xrightarrow{\text{Inițiator}} R'{-}(CH_2{-}\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{CH}})_x -$$

* Manuscris prezentat la redacție la 10 februarie 1965.



(1)

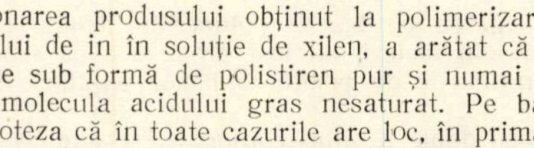
La uleiurile cu duble legături izolate, s-a admis că lanțul polimerului vinilic se leagă printr-o reacție de transfer de catenă la carbonul din poziții α a unei duble legături.



(2)

Datele experimentale nu justifică întru totul aceste reprezentări deoarece în cazul uleiurilor cu duble legături conjugate, ar trebui să se formeze structuri tridimensionale, cu o gelifiere rapidă a produsului, ceea ce practic nu se observă întotdeauna.

Fracționarea produsului obținut la polimerizarea stirenului în prezența uleiului de in în soluție de xilen, a arătat că peste 85% din stiren se regăsește sub formă de polistiren pur și numai o mică cantitate este legată de molecula acidului gras nesaturat. Pe baza acestor rezultate, s-a emis ipoteza că în toate cazurile are loc, în prima etapă, o izomerizare a uleiului, cu formarea de duble legături conjugate, urmate de adiția monomerului printr-o reacție Diels — Adler [5]:



(3)

Nici această reprezentare nu poate fi considerată satisfăcătoare, mai ales pentru procesele de polimerizare în dispersie apoasă, unde vitezele de reacție și frecvența reacțiilor de transfer de catenă sînt mai mari [6]. Se patentează de exemplu, obținerea unui material peliculogen constituit dintr-un copolimer al acetatului de vinil cu uleiuri sicative, în care lanțurile de polimer grefate sînt constituite din 2—6 atomi de carbon [7]. Juhovski și colaboratorii, au arătat că în funcție de tipul ule-

iului, pot să apară toate cele trei mecanisme de reacție [8]. Recent, M a y o și G o u l d [9] realizînd procesul de polimerizare a stirenului și nitrilului acrilic în prezența esterilor metilici ai acizilor oleic, linoleic și eleostearic, au stabilit că esterii acizilor grași cu duble legături izolate aproape nu prezintă capacitate de copolimerizare în timp ce esterii acizilor grași cu duble legături conjugate intră ușor în reacția de copolimerizare cu monomerii vinilici. Esterul metilic al acidului eleostearic, care conține în moleculă trei duble legături conjugate, înhibă puternic reacția de copolimerizare cu stiren și nitril acrilic, inhibiție care este cu atît mai puternică, cu cît concentrația acestui ester în amestecul de reacție este mai mare.

Cum rezultă din prezentarea datelor de literatură, studiile privind polimerizarea monomerilor vinilici cu uleiuri nesaturate, s-au făcut aproape exclusiv în sistemul stiren-uleiuri vegetale. Literatura recentă de patente, indică posibilitatea sintezei unor materiale polimere de acest tip și în sistemul acetat de vinil — uleiuri vegetale [10].

În lucrarea prezentă, se cercetează procesul de polimerizare în emulsie apoasă a acetatului de vinil, în prezența uleiului de in. Pentru extinderea concluziilor din literatură privind reactivitatea la copolimerizare cu stiren a uleiurilor vegetale, în funcție de natura dublelor legături din lanțurile polienice ale acizilor grași nesaturați, s-au făcut și încercări de copolimerizare în emulsie apoasă a acetatului de vinil în prezența uleiului de in polimerizat termic și a uleiului de in izomerizat catalitic. Experimental, s-a dovedit [1] că prin polimerizare termică are loc o izomerizare cu formarea de duble legături conjugale; izomerizarea catalitică, duce la formarea de sisteme cu trei duble legături conjugate de tipul celor din acidul eleostearic.

Dispersiile de poliacetat de vinil au largi utilizări ca vopsele diluabile cu apă și ca adezivi pentru lemn, hîrtie, piele sau materiale ceramice. Rezistența insuficientă a peliculelor la apă și în cazul vopsirilor exterioare la intemperii, precum și adeziunea redusă la mase plastice și metale, le limitează adesea domeniile de aplicare.

Scopul principal al lucrării, a fost corectarea unora dintre aceste deficiențe ale dispersiilor de poliacetat de vinil și în special stabilirea față de apă a acoperirilor, prin obținerea de dispersii pe bază de copolimeri ai acetatului de vinil cu ulei de in. Amestecarea fizică a poliacetatului de vinil cu ulei de in, nu se poate realiza deoarece aceste materiale sînt incompatibile.

Partea experimentală.

Polimerizările s-au efectuat într-un balon de 750 ml. cu trei gîturi, prevăzut cu agitator, termometru și refrigerent de reflux. Încălzirea s-a făcut pe baie de apă, prevăzută cu termometru. Ca mediu de polimerizare s-au utilizat soluții apoase de alcool polivinilic, cu concentrația 4,8% și vîscozitatea la 20° măsurată cu vîscozimetrul H ö p p l e r, de 50 cP. Alcoolul polivinilic a avut indicele de saponificare 107 și valoarea K din ecuația lui F i c k e n t s c h e r de 76. În unele încercări s-a utilizat

un amstec de alcool polivinilic cu sarea de sodiu a acidului alchil-fenil-sulfonic, purificată prin extracții repetate cu alcool etilic.

Acetatul de vinil a provenit din producția curentă de acetat de vinil, calit. I, de la Uzinele Chimice Rîșnov. Uleiul de in utilizat a avut indicele de refracție, la 20° de 1,4797. Nu s-au făcut purificări speciale ale comonomerilor. Ca inițiatori, s-a utilizat în toate cazurile amestecul de persulfat de potasiu — peroxid de benzoil.

Polimerizarea termică a uleiului de in s-a făcut la 230°, în timpi variind de la 3 la 8 ore.

Izomerizarea catalitică a uleiului de in, s-a făcut în prezența metilatului de sodiu (0,1% Na față de ulei), la temperatura de 120° în timp variind de la 3 la 5 ore.

Asupra emulsiilor s-au făcut analizele de vîscozitate cu vîscozimetrul Höppler, conținut în solide, dimensiunile particolelor cu microscopul și stabilitatea la diluare. Ultima probă constă în diluarea dispersiei la un conținut în solide de 6% și măsurarea cantităților separate la partea superioară și inferioară a unei biurete de sticlă cu diametrul de 9,8 mm. și înălțimea stratului de dispersie de 500 mm. Rezultatele s-au exprimat în % volumetrice, față de volumul total al probei. Citirea s-a făcut după 48 ore.

Asupra peliculelor s-au făcut încercări de rezistență la apă, conform STAS 4119-53, notîndu-se timpul după care picătura de apă lasă o urmă vizibilă pe peliculă.

Analiza polimerilor s-a făcut după fracționare, prin extracție cu eter, 16 ore, în aparat Solet. S-a determinat valoarea K a fracțiunii insolubile în eter și spectrul de absorbție în infraroșu, de asemenea indicele de saponificare a fracțiunii solubile în eter, prin saponificare alcalină, într-un amestec de apă — alcool 4 : 1, timp de 3 ore față de o probă martor care conține o cantitate egală de ulei.

Rezultatele experimentale

În tabela 1 sînt prezentate rezultatele obținute la polimerizarea în emulsie a acetatului de vinil, în prezența uleiului de in.

Cantitatea de ulei de in introdus la polimerizare a fost variată între 0 și 44,5%, față de amestecul de monomeri. A fost variată de asemenea compoziția fazei apoase și concentrația inițiatorilor.

La o concentrație a amestecului de inițiatori, cuprinsă între 1 și 2% față de monomeri, conversia acetatului de vinil este de aprox. 100%. În absența uleiului de in, reacția de polimerizare a acetatului de vinil, la o concentrație a inițiatorilor de 0,2%, durează 4,5 ore și se obține un polimer cu valoarea K = 70,1. Valorile K de 30 — 47, obținute în cazul polimerizării acetatului de vinil în prezența uleiului de in, indică o frecvență mare a reacțiilor de transfer de catenă pe molecula uleiului de in. Viteza reacției de polimerizare a acetatului de vinil este apreciabil redusă de către uleiul de in, efect care crește cu mărirea proporției de ulei introdus la polimerizare.

Din datele de stabilitate la diluare a dispersiilor, rezultă că alcoolul polivinilic nu este un emulgator suficient de eficace pentru acest tip de emulsii și permite separarea la suprafață a unui strat uleios de pînă la 1%.

Stabilitatea dispersiilor este îmbunătățită prin utilizarea amestecului de alcool polivinilic + alchil-fenil-sulfonat de sodiu, Adausul de substanță superficial activă anionică în proporție de pînă la 0,5%, față de faza apoasă, mărește stabilitatea dispersiilor, micșorează dimensiunile particolelor și reduc totodată viteza de polimerizare și vîscozitatea dispersiilor.

Rezistența la apă a peliculelor, crește de pînă la 20 de ori față de cea a homonopolimerului, obținîndu-se un optim la un conținut de aprox. 30% ulei de in.

Analizele fracțiunilor de polimer, au arătat că se formează homopolimerul acetatului de vinil, alături de un copolimer acetat de vinil — ulei de in, solubil în eter, în care cantitatea de acetat de vinil variază între 5—15%. Copolimerul este un produs ușor solubil atît în eter cît și în

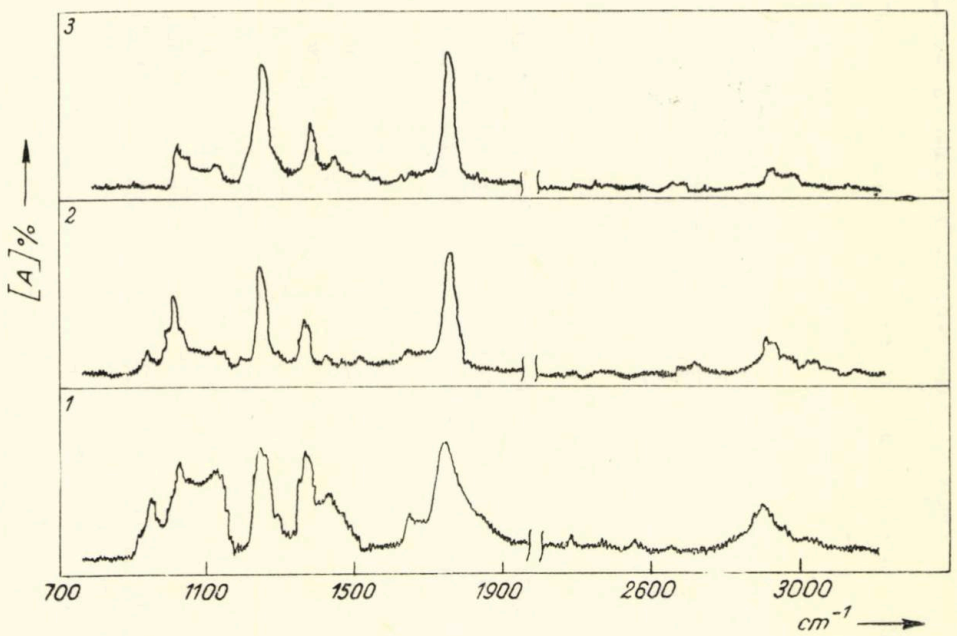


Fig. 1

benzen și are aspectul unui lichid vîscos și indicele de saponificare cuprins între 100 și 149 mg KOH/gr (față de proba martor care conține o cantitate egală de ulei).

Fracțiunea insolubilă în eter a avut în toate cazurile indicele de saponificare 655 — 660 mg KOH/gr. Cum rezultă din fig. 1 spectrul IR al

Tabela 1 — **Copolimerizarea în emulsie a acetatului de vinil cu ulei de in**

Nr. probei	Componenți introduși la polimerizare							Condiții de polimerizare		Caracteristicile dispersiei					Caracteristici			
	Sol. apoasă 4,8% alcool polivinilic	Alchilfenil sulfonat de sodiu	Acetat de vinil	Ulei de in		Inițiator		Temperatura de polimerizare	Timp de polimerizare	Vîscozitate	Conținut în solide	Diametrul particolelor	Stabilitatea la diluare %		Val. K	Fracțiune solubilă în eter		Rezistența la apă
	ml.	g.	ml.	ml.	% vol.	Persulfat de potasiu g	Peroxid de benzoil g	°C	ore	cP	%		sus	jos		%	I_s	minute
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100	0	107	0	0	0,1	0,1	62—85	4,5	15600	50,2	1—3	0	0,8	70,1	0	659	1
2	200	0	174	26	13,1	0,35	1,00	64—60	8,0	121000	51,4	1—3	1,1	0,6	45,2	17,1	106	3
3	80	0	75	15	16.7	0,1	0,9	63—85	4,5	7500	51,3	1—2	0,2	0,4	—	—	—	4
4	140	0,6	120	30	20,0	0,23	1,2	62—90	8,5	24600	51,2	sub 1	0,3	0,6	34,6	30,1	142	8
5	100	0,5	81	27	25,0	0,8	0,2	66—77	8,5	5300	49,8	sub 1	0,2	0,4	—	—	—	12
6	90	0	60	30	33,3	0,41	0,54	66—85	6,5	3480	48,0	0,5—2	1,2	0,2	47,0	39,4	109	15
7	80	0	60	30	33,3	0,8	1,2	71—84	6,0	9300	51,4	1—2	1,3	0,4	—	48,2	146	14
8	80	1,6	60	30	33,3	0,8	1,2	67—80	8,5	680	44,4	sub 1	0,1	1,2	37,0	—	—	14
9	80	2,9	60	30	33,3	0,8	2,4	67—82	7,5	69	45,7	sub 1	0	2,8	31,2	—	—	7
10	80	0	60	30	33,3	0,8	1,2	71—84	6,0	9300	51,4	1—2	1,3	0,4	—	—	—	14
11	140	0	100	50	33,3	0,35	1,2	60—85	8,0	20600	50,6	1—3	1,2	0,8	38,2	48,8	149	20
12	150	0	110	55	33,3	0,25	1,5	62—85	8,0	14500	47,2	1—3	1,0	0,7	38,5	47,1	146	18
13	200	0	150	75	33,3	1,0	0,3	65—80	5,0	10120	50,5	1—3	0.5	0,3	39,2	46,8	138	14
14	200	1,0	150	75	33,3	1,0	1,3	65—80	7,5	5500	50,2	sub 1,5	0,2	0,3	38,7	—	—	12
15	90	0	50	40	44,5	0,35	1,2	70—86	7,0	10700	46,6	1—3	1,1	0,7	35,6	50,1	112	5

Tabela 2 — **Copolimerizarea în emulsie apoasă a acetatului de vinil cu ulei de in polimerizat termic şi ulei de in izomerizat catalitic**

Nr. probei	Componenţi introduşi la polimerizare									Condiţii de polimerizare		Caracteristicile produsului obţinut						
	Soluţie apoasă 4,8% polivinilic	Acetat de vinilin		Ulei de in modificat				Iniţiator				Emulsie			Polimer			
		Cantitatea	Proporţia faţă de ulei	Felul modificării	Temperatura de modificare	Timp de modificare	Cantitatea	Persulfat de potasiu	Peroxid de benzoil	Temperatura	Timp	Viscozitate	Conţinut în solide	Diametrul particulelor	Val. K	Fracţiune solubilă în eter		Rezistenţa la apă
																%	IS mg KOH	
	ml.	ml.	%		°C	ore	ml.	g	g	°C	ore	CP	%				g	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	80	60	66,7	Polimerizare	230	3	30	0,25	0,5	67—80	8	2500	45,9	1—3	42,2	49,9	150	11
2	80	60	66,7	„	230	5	30	0,6	1,2	70—80	6	11300	52,2	1—3	43,4	59,1	158	10
3	80	60	66,7	„	230	6	30	0,6	1,2	71—90	5	7400	54,5	1—3	45,1	65,1	187	12
4	80	60	66,7	„	230	8	30	0,6	1,2	70—85	7	13100	54,3	1—3	43,6	67,2	204	14
5	85	70	70	Izomerizare	120	5	30	0,6	1	65	8	nu polimerizează						
6	85	60	66,7	„	120	3	25	0,8	1,2	62—70	11	5600	40,5	1—2	37,1	49,1	112	42
7	85	60	66,7	„	120	4	30	1,0	2,0	62—74	10	15300	38,9	1—3	36,3	47,5	105	40
8	85	60	66,7	„	120	5	30	1,5	1,5	60—80	8,5	4620	40,6	1—2	35,8	46,3	102	45

acestei fracțiuni (3) este identică cu spectrul (2) al unei probe de poliacetat de vinil pur, obținută prin polimerizarea în suspensie a acetatului de vinil, de asemenea identică cu spectrul (1) a poliacetatului de vinil, publicat în literatură [11].

În tabela 2, sînt prezentate cîteva rezultate caracteristice la copolimerizarea în emulsie a acetatului de vinil cu ulei de in polimerizat termic și ulei de in izomerizat catalitic.

Copolimerizarea acetatului de vinil cu ulei de in polimerizat termic, are loc cu viteză mai mare decît în cazul uleiului de in nemodificat. De asemeni, proporția de copolimer și cantitatea de acetat de vinil în copolimer, cresc față de probele obținute în condiții similare dar cu ulei de in nemodificat. Rezistența la apă a filmelor, este practir nemodificată.

Valoarea K a polimerilor este mai mare, ceace indică o frecvență mai scăzută a reacțiilor de transfer de catenă. Se poate presupune că în acest caz are loc, într-o proporție mare, o copolimerizare a uleiului cu acetat de vinil după o reacție de ediție în poziția 1 — 4 a dublelor legături conjugate (reacția 1).

Uleiul de in izomerizat catalitic, care conține lanțuri ale acidului eleostearic, înhibă puternic reacția de polimerizare a acetatului de vinil și procesul de formare a copolimerului acetat de vinil — ulei.

Polimerizarea s-a putut realiza numai cu concentrații a inițiatorilor de peste 2,5 % (raportat la amestecul de monomeri).

După 8—11 ore de reacție, conversia acetatului de vinil a fost de maximum 80%.

Rezistența la apă ridicată a peliculelor, se datorește probabil în acest caz, proprietăților îmbunătățite ale peliculelor obținute din uleiul de in izomerizat și nu copolimerului, a cărui proporție în amestecul de polimeri este mai mică decît în cazul polimerizării acetatului de vinil, în prezența uleiului de in sau a uleiului de in polimerizat termic.

C o n c l u z i i:

Prin polimerizarea în emulsie apoasă a acetatului de vinil, în prezența uleiului de in, se obține un amestec de poliacetat de vinil și un copolimer acetat de vinil — ulei, care spre deosebire de uleiul pur, este miscibil cu poliacetatul de vinil. Aceasta face ca după uscarea emulsiei, să se obțină un film transparent, cu unele proprietăți și în special rezistența la apă, îmbunătățită față de pelicula pe bază de homopolimer.

Procesul de polimerizare al acetatului de vinil în prezența uleiului de in, are loc după schemele generale, produse pentru copolimerizarea stirenului cu uleiuri vegetale nesaturate.

Catedra de tehnologia substanțelor anorganice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Drinberg A. I.* — Tehnologia plenkoobrazuiuşcih vecestv, Goshimizdat, Leningrad 1955 pag. 501
2. * * * — Paiant and Varnisch, VIII, 28 No. 8 234 (1948)
3. *Armitage F., Hewit D. H., Sleghtholme I. I.* — J. Ooil and Colour Chemists' Ass. XI. 31 Nr. 341 (1948)
4. *Bogatirev P. M., Rogovskaia H. H.* — Buleten po obmeny opîtom v lakokrasocionoi promîşlenosti No. 5 51 (1953)
5. *Champetier G., Rabate H.* — Chemie des Peintures, Vernis et Pigments, Dunod, Paris, 1956, vol. I pag. 68—73
6. *Kimura Tadasi, Ysida Yvas, Yosida, Keinosuka* — Sci. and. Ind. 36, No. 3, 129, 142 (1962) după R. J. Him 23 Ts, 49 (1962)
7. *Brevet R.F.G.* 1115863 după Farben u. Lacke 68, 1,50 (1962)
8. *Iuhovscki G. L., Popenker R. F.* J.P.H., XXX, No. 4 (aprilie)
9. *Mayo F. R., Gould C. W. J.* — Am oil chemist's Soc. *41* No. 1,25 (1964)
10. *Brevet S.U.A.* 2992 197 (11.07.1961) după R. J. Him 23 , 579 (1962)
11. *Landolt — Börnstein* — Zahlenwerte und Funktionen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, Berlin. Vol. I. P. II. pag. 434.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

ENERGETICĂ

C.Z. 621.311

OCOLIREA ÎNTRERUPTORILOR ÎN STAȚII EXTERIOARE CU SISTEME DE BARE COLECTOARE DUBLE ȘI TOȚI SEPARATORII DISPUȘI ÎN LINIE

C. DINCULESCU, P. BUHUȘ

În țara noastră ca și în mai multe alte țări exploatarea solicită tot mai des realizarea în stațiile de înaltă tensiune a unor legături prin care să se asigure posibilitatea de manevrare pentru ocolirea întreruptorilor, fără întreruperea alimentării.

Prin aceasta se urmărește a se evita întreruperile în funcționarea circuitelor de linie sau de transformatori atunci cînd trebuie efectuate lucrări la întreruptori și restabilirea rapidă a alimentării în caz de avarie la întreruptori. În acest mod se evită perturbările și pagubele pe care le-ar suferi economia națională datorită nelivrării de energie în perioadele cînd circuitele ar fi întrerupte pentru a se putea lucra la întreruptori. Privite din acest punct de vedere, investițiile suplimentare pentru creierea unor posibilități de ocolire a întreruptorilor trebuie considerate recuperabile, uneori în termene foarte scurte, devenind apoi o sursă de beneficii pentru economia națională.

Lucrările la întreruptori se execută în mod periodic cu ocazia reviziilor planificate sau neplanificate, prevăzute de instrucțiunile fabricilor constructoare.

La noi în țară reviziile generale planificate se recomandă a se face cel puțin o dată la 3 ani la întreruptorii cu ulei și cel puțin o dată la 2 ani la întreruptorii cu aer comprimat. Reviziile generale neplanificate trebuie executate după cel mult 4 deconectări de scurtcircuite (B.1). În exploatare însă adeseori se simte nevoia de a se face unele revizii mai frecvent.

Avariile la întreruptori sînt mult mai rare, frecvența lor anuală fiind apreciată în prezent între 1 și 5%. Totuși intervalul de timp care este uneori necesar pentru remediere poate constitui cauza unor pagube economice importante.

Avînd în vedere considerentele de mai sus în multe țări s-a ajuns să se folosească pe o scară tot mai largă scheme în care se asigură posibilități de ocolire pentru întreruptori.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej„ București, 28—30 mai 1965.

1. *Posibilitățile de ocolire la schemele cu bare colectoare duble și cîte un întreruptor pe circuit.*

În cazul schemelor cu bare colectoare duble ocolirea întreruptorilor poate fi realizată fie prin prevederea în plus a unui sistem de bare de transfer (fig. 1 a și 1 b) fie, în lipsa acestuia, folosind — la nevoie — ca bară de transfer unul dintre sistemele de bare colectoare (fig. 1 c și 1 d).

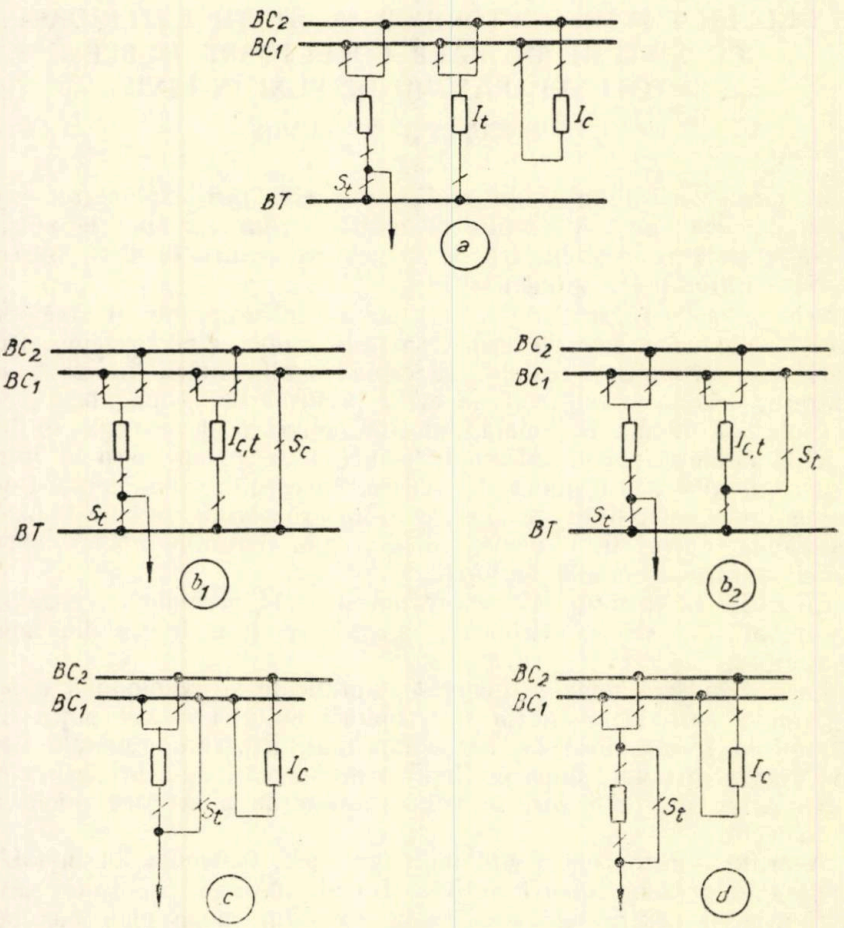


Fig. 1. Scheme cu două sisteme de bare colectoare și posibilități de ocolire a întreruptorilor

În schemele cu bare duble și bară de transfer, dacă numărul și importanța circuitelor o justifică, se prevede cîte un întreruptor de cuplă transversală și un întreruptor de transfer (fig. 1 a). Primul asigură posibilitatea unei funcționări elastice, cu circuitele repartizate între cele

două sisteme de bare. În funcție de condițiile concrete de funcționare din punctul respectiv al sistemului, se poate lucra cu cele două sisteme de bare colectoare conectate prin întreruptorul de cuplă transversală, permanent sau numai scurte intervale de timp, cu ocazia regrupării circuitelor între cele două bare.

Cupla de transfer asigură posibilitatea ocolirii pe rînd a oricărui întreruptor de linie sau de transformator, putîndu-se realiza alimentarea circuitului respectiv de la oricare din cele două sisteme de bare, manevrele fiind făcute fără întrerupere. În timp ce un circuit este alimentat prin întreruptorul de transfer și bara de transfer, pentru restul circuitelor se pot folosi fără alte restricții cele două sisteme de bare colectoare și întreruptorul de cuplă transversală.

Investițiile în doi întreruptori de cuplă trebuie să fie justificate de condițiile de elasticitate în funcționare care se impun în stația respectivă precum și de mărimea pagubelor și perturbărilor probabile care se evită prin adoptarea unei astfel de soluții.

Dacă condițiile de exploatare o permit, se poate adopta o schemă mai simplă în care un singur întreruptor primește sarcina de a împlini pe rînd atît rolul de întreruptor de transfer cît și cel de întreruptor de cuplă transversală. O astfel de schemă este prezentată într-o primă variantă în fig. 1 b 1. Pentru realizarea circuitului cuplei transversale este necesară închiderea separatorului S_c care leagă una din barele colectoare cu bara de transfer.

Într-o serie de cazuri, cum de altfel se propune uneori și la noi în țară, pentru a se scurta manevra și a nu se mai pune sub tensiune bara de transfer cînd se face o manevră prin cuplă transversală, separatorul S_c se racordează direct la legătura de la bornele întreruptorului, realizîndu-se schema din varianta 1 b 2.

În ambele variante, 1 b 1 și 1 b 2, față de schema precedentă 1 a, se realizează o economie de un întreruptor și un separator. În a doua variantă 1 b 2 stația poate fi micșorată cu suprafața necesară pentru o celulă.

Soluțiile 1 a și 1 b nu sînt total echivalente. Separatorul S_c se poate folosi numai dacă pe bara de transfer nu este legat deja un alt circuit. Atîta timp cît întreruptorul Ic, t este cuplat la bara de transfer, cele două sisteme de bare colectoare de bază nu mai pot fi legate prin cuplă transversală, ceea ce micșorează corespunzător elasticitatea de funcționare.

Renunțarea la bara de transfer și la încă doi din separatorii circuitelor de cuplă reprezintă pasul următor în reducerea schemei (fig. 1 c). Separatorul de transfer al fiecărui circuit este de astă dată legat la unul din sistemele de bare colectoare care, după ce este complet degajat, se folosește ca bară de transfer. Întreruptorul cuplei transversale primește în acest caz și rolul de întreruptor de transfer. Pe lîngă aceasta, pe durata reviziei sau înlocuirii unui întreruptor nu se mai dispune decît de posibilitatea de a se funcționa cu toate circuitele racordate la unul dintre sistemele de bare colectoare.

O astfel de schemă, cu o posibilitate rigidă de ocolire, poate găsi aplicație în cazul stațiilor de 110—220 kV avînd un număr relativ mic de circuite, de exemplu 4—6, atunci cînd nu se consideră justificat a se face investiții suplimentare pentru un întreruptor de transfer și cînd se apreciază că pentru intervale de timp relativ scurte este posibil a se funcționa cu toate circuitele racordate la un singur sistem de bare colectoare.

Față de schema clasică cu două sisteme de bare colectoare de bază și trei separatori pe circuit — doi de bare și unul de plecare — ultima soluție asigură posibilitatea de a ocoli fiecare dintre întreruptori numai cu cîte un singur separator în plus, cel de transfer. Investițiile suplimentare pentru ocolire vor fi de ordinul a 5—7% față de cca. 20% cît ar fi necesar în cazul soluției cu bare colectoare duble, bară de transfer și 2 întreruptori de cuplă.

Se repetă și aici aceleași observații asupra diferenței de echivalență între cele două soluții ca elasticitate de funcționare.

O soluție ceva mai elastică decît cea din schema 1 c este prezentată în fig. 1 d. În acest caz rolul de bară de transfer îl poate juca oricare dintre cele două sisteme de bare colectoare, separatorul de ocolire fiind racordat la bornele a doi sepatorii care încadrează întreruptorul. În exploatare avantajul acestei scheme constă în simplificarea manevrei de degajare a sistemului de bare ce urmează a fi folosit ca bară de transfer. În acest scop ar putea fi de exemplu ales sistemul de bare la care este deja racordat circuitul respectiv. În schimb, față de soluția anterioară 1 c, mai este necesar pentru fiecare circuit cîte un separator suplimentar, plasat între separatorii de bare și întreruptor.

Ca și în soluțiile precedente, cînd întreruptorul de cuplă transversală este folosit pentru înlocuirea unui întreruptor de linie sau de transformator, el este imobilizat și nu se mai pot folosi barele colectoare duble pentru repartizarea funcționării circuitelor între ele.

Pentru cazul particular al unei stații în care se pune problema ocolirii întreruptorilor a 5 circuite, în tabela 1 este prezentată o comparație a principalelor elemente prin care se deosebesc schemele discutate. Transformatorii de tensiune și descărcătorii cu rezistență variabilă ai fiecărui sistem de bare se consideră legați în paralel prin același separator.

Tabela 1

Tipul de schemă după notațiile din fig. 1	Nr. total de sisteme de bare colectoare și transfer	Nr. de întreruptori	Nr. de separatori	Posibilitatea de a se funcționa continuu cu circuitele racordate la bare colectoare diferite
a	3	7	27	da
b	3	6	26	parțial
c	2	6	24	nu
d	2	6	29	nu

O mențiune specială trebuie făcută în legătură cu modul în care este privită problema ocolirii întreruptorilor din circuitele celor doi transformatori care se prevăd în mod obișnuit în stațiile coborîtoare. Adoptarea unor posibilități de ocolire pentru acești întreruptori se recomandă ori de cîte ori dispoziția constructivă permite realizarea comodă a legăturilor necesare în acest scop.

In schimb, atunci cînd pentru realizarea acestor legături s-ar întîmpina dificultăți constructive mari sîntem conduși la soluția de a renunța la ocolirea întreruptorilor din circuitele de transformatori. In acest caz, pe durata reviziilor la unul din acești întreruptori, tranzitul de energie trebuie asigurat fie prin supraîncărcarea celui de al doilea transformator, în limitele și pe durata admisă de fabrica constructoare, fie prin asigurarea unei alimentări de rezervă, la tensiunea rețelei de alimentare a consumatorilor (B 2).

2. *Dispoziții constructive.*

Soluțiile constructive care se vor discuta în cele ce urmează vor fi dezvoltări ale dispoziției pentru stații exterioare cu separatori de bare în linie, care se folosește tot mai mult atît în țara noastră cît și în alte țări europene. Avantajul acestei soluții de înălțime medie constă în posibilitatea de a se dispune separatorii de bare cu deschidere laterală sub barele colectoare și de a folosi izolatorii acestor separatori pentru prinderea legăturii transversale la întreruptori. In acest mod se poate obține o reducere a lungimii celulei și a numărului de izolatori pentru legăturile transversale la întreruptori. In schimb se mărește puțin lățimea celulei iar înălțimea de suspensie a legăturilor transversale limitează gabaritul căii de rulare de lîngă întreruptori.

In stația sub tensiune întreruptorii trebuie transportați cu camerele de stingere demontate. Transportul lor nedemontați sau accesul unor automacarale ar putea fi asigurat fie prin mărirea înălțimilor de suspensie ale tuturor legăturilor din stație, fie prin prevederea drumului între transformatorii de curent și întreruptori care însă ar trebui ridicați mult mai sus față de sol și ar deveni mai greu accesibili pe timpul reviziilor.

In dispozițiile care se vor prezenta vor fi folosite concepțiile și elementele constructive adoptate la noi în țară precum și aparatajul de producție autohtonă. Exemplele se vor referi la stații de 110 kV.

Dispoziția pentru primele două scheme care sînt prevăzute cu bare de transfer (1 a și 1 b) este bine cunoscută la noi în țară (fig. 2). In secțiune transversală se deosebesc patru zone cu lățime de cîte 8 m. Intr-una din aceste zone se dispun întreruptorii, transformatorii de curent și separatorii de plecare. De o parte a acestei zone se prevăd alăturate cele două zone pentru sistemele de bare colectoare iar de cealaltă parte, sub ieșirile în linie, zona barelor de transfer. Circuitul cuplei combinate — transversale și de transfer — poate fi realizat într-o singură celulă, dispunînd însă cel puțin unul din separatorii de lîngă bara de transfer cu polii în linie. La 110 kV lățimea celulelor este de 9 m.

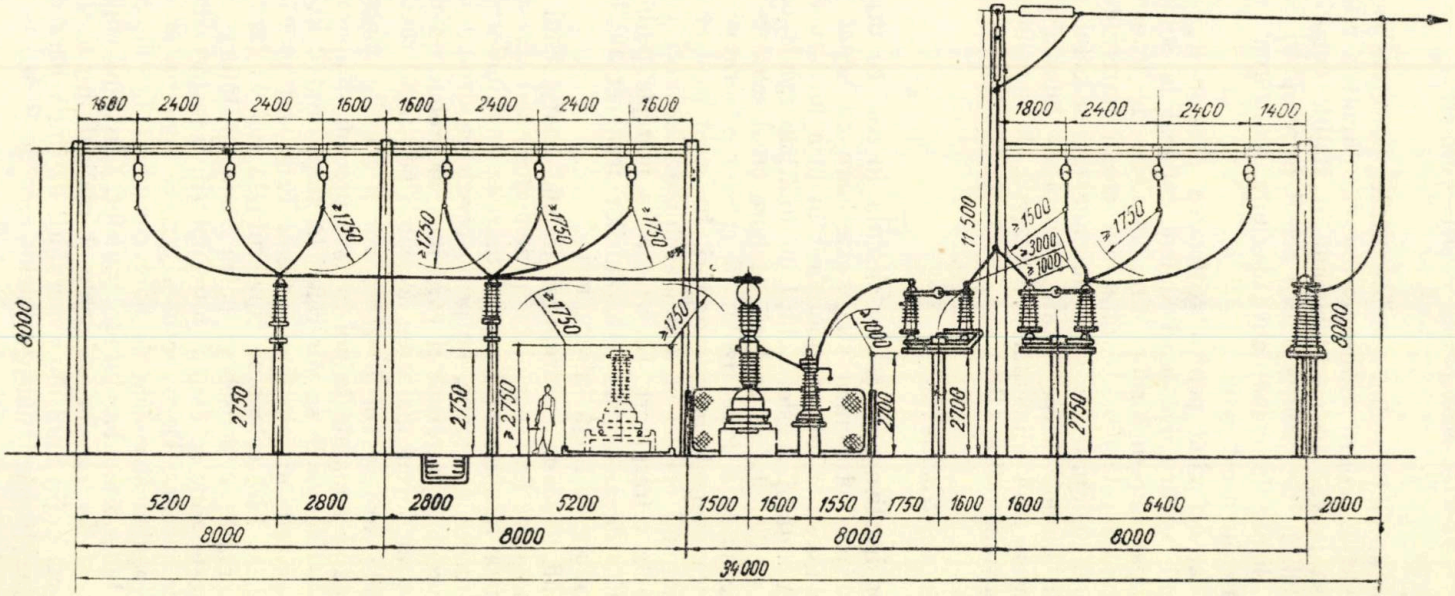

1680
2400
2400
1600
1600
2400
2400
1600
1800
2400
2400
1400
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1500
≥3000
≥1000
≥1750
≥1000
11 500
8000
8000
2750
2750
≥2750
2700
2700
2750
5200
2800
2800
5200
1500
1600
1550
1750
1600
1600
6400
2000
8000
8000
8000
8000
34000

Fig. 2

În fig. 3 a, 3 b și 4 se prezintă dispoziții cu caractere originale pentru schemele în care ocolirea întreruptorilor se face fără bare de transfer, conform schemelor 1 c și 1 d.

Un prim aspect caracteristic al acestor soluții îl constituie dispunerea separatorilor de ocolire în linie, în axul cadrelor de ieșire. În acest mod la unul din izolatorii fiecărui pol se pot lega ieșirile către linie iar la celălalt izolator coborîrile de la legăturile ocolitoare. Aceste legături sînt suspendate la o înălțime suficient de mare așa fel încît reviziile la întreruptori să se poată face fără pericol. Pentru a se asigura distanța de izolație față de montanții cadrelor de ieșire lățimea celulei trebuie mărită pînă la 10 m. În schimb se obține avantajul de a se putea face revizii la separatori și atunci cînd celulele vecine sînt sub tensiune, deoarece este asigurată distanța minimă de securitate prevăzută de normele din țara noastră.

O a doua trăsătură caracteristică comună o constituie dispunerea cu polii în linie și a restului separatorilor din fiecare celulă. În acest mod se contribuie la reducerea lungimii celulei, ceea ce compensează mărirea suprafeței la care s-a ajuns prin lărgirea de la 9 m la 10 m. Totodată această generalizare a dispoziției în linie a separatorilor permite realizarea unor legături paralele cu axul celulei între separatorii de linie și separatorii de ocolire. Distanța dintre o astfel de legătură și cuțitul de pe celălalt izolator poate în acest mod să fie păstrată la distanța de izolație care se asigură între cele două cuțite deschise. Această condiție nu ar mai putea fi respectată în cazul unei legături scurte între un separator de ocolire cu polii în linie și un separator de ieșire cu polii dispuși transversal față de barele colectoare.

Deosebirile dintre cele două dispoziții sînt condiționate de concepția diferită ca schemă a legăturilor de ocolire.

În dispoziția pentru schema 1 c, de ocolire mai rigidă a unui întreruptor de linie, dată în fig. 3 a, între cele două sisteme de bare se propune prevederea unor portale centrale de același tip cu portarele de ieșire. Din cauza lanțurilor de izolatori, cel puțin una dintre legăturile la barele colectoare rezultă puțin înclinată.

Dacă se dorește o soluție mai compactă este recomandabil ca toți întreruptorii, inclusiv cei pentru circuitele de transformatori, să fie dispuși într-un singur șir. În acest caz legăturile la transformatori, care se realizează pe deasupra barelor colectoare, pot fi totodată folosite și pentru ocolirea întreruptorilor respectivi. Separatorii de transfer vor fi de astă dată racordați la celălalt sistem de bare care se găsește mai aproape de transformatori (fig. 3 b). Rezultă o dispoziție asemănătoare cu cele folosite în S.U.A. (B. 3) cu deosebirile că polii separatorului sînt dispuși în linie, iar legăturile pe deasupra întregei stații nu se mai prevăd numai cu scopul de a realiza ocolirea ci în primul rînd pentru a se putea dispune toți întreruptorii pe un singur șir. În acest mod celulele ne mai fiind dispuse în eșichier se obține și o importantă reducere a suprafeței ocupate de stație.

Pentru schema 1 d de ocolire mai elastică, în care se poate folosi ca bară de transfer oricare din cele două sisteme de bare colectoare, se

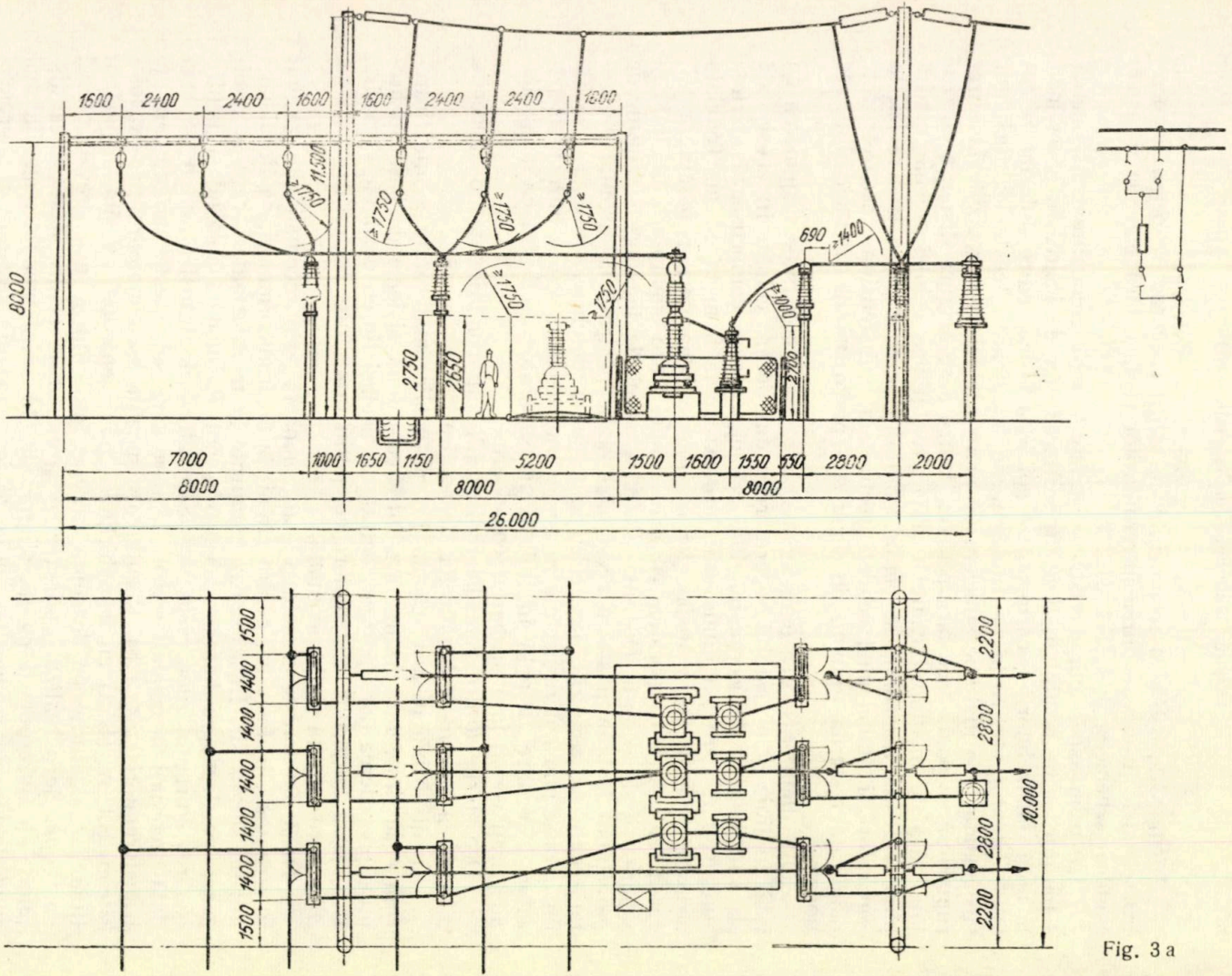
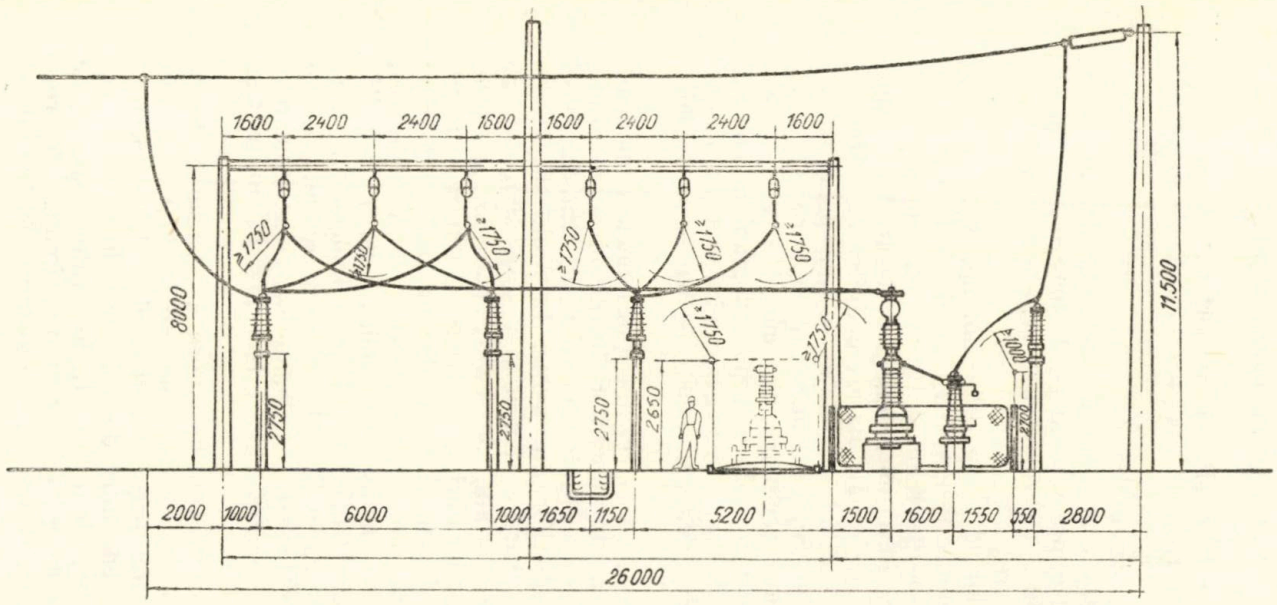
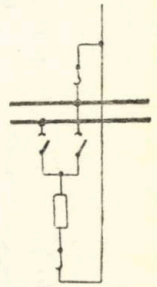

1600
2400
2400
1600
1600
2400
2400
1600
8000
11.500
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
690
≥1400
≥1000
2750
2650
2750
7000
1000
1650
1150
5200
1500
1600
1550
650
2800
2000
8000
8000
8000
26.000
1500
1400
1400
1400
1400
1400
1500
2200
2800
2800
2200
10.000

Fig. 3 a


1600
2400
2400
1600
1600
2400
2400
1600
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
≥1750
8000
11.500
2750
2750
2750
2650
2200
2000
1000
6000
1000
1650
1150
5200
1500
1600
1550
350
2800
26000



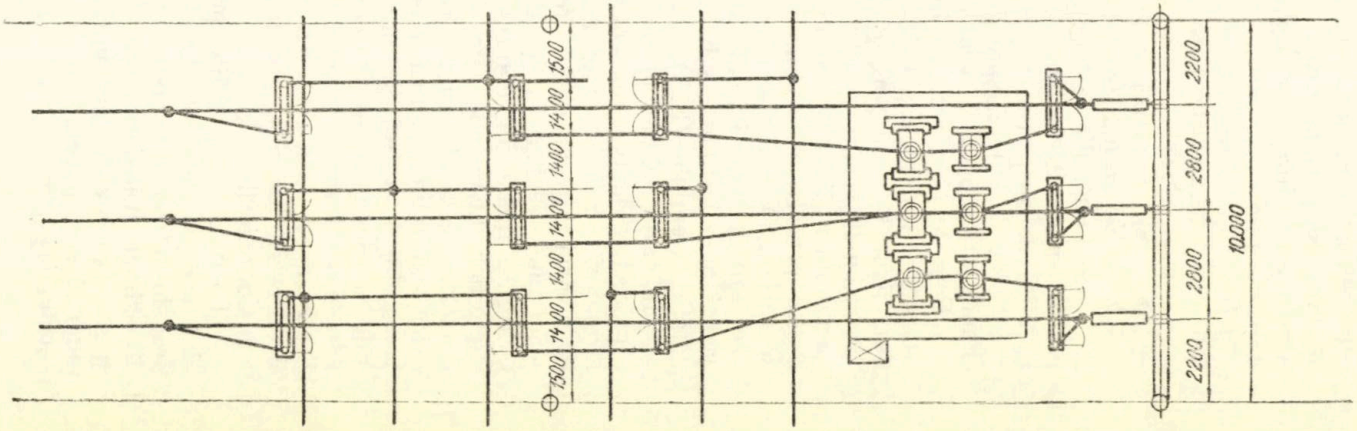

1500
1400
1400
1400
1400
1500
2200
2800
2800
2200
10000

Fig. 3 b

propune dispoziția din fig. 4. In această soluție, pentru suspendarea legăturilor de ocolire se propune ca, în lungul liniei de demarcație dintre zona întreruptorilor și zona sistemului de bare alăturat, să se prevadă portale înalte de tipul celor de ieșire. Polii separatorului suplimentar dintre întreruptor și separatorii de bare sînt dispuși în axul acestor portale.

Față de soluția propusă în R.F.G. (B. 4) cu portalele dispuse central între sistemele de bare și coborîrile în axul acestor portale ar rezulta cîteva avantaje:

a — Se scurtează legăturile de ocolire.

b — Nu se mai trece pe deasupra unuia din sistemele de bare.

c — Coborîrile la legăturile dintre separatorii de bare nu se mai fac printre sistemele de bare și pentru ele nu mai sînt necesare lanțuri de izolatori de suspensie suplimentare.

Calea de rulare, spre deosebire de dispozițiile din fig. 3, se mută în cîmpul întreruptorilor ceea ce conduce la lărgirea acestuia de la 8 la 13 m.

Este de menționat că în dispoziții realizate în trecut, separatorul de transfer a fost prevăzut deasupra întreruptorului, la peste 10 m înălțime, fiind fixat de rigla portalului de ieșire. In afara condițiilor mai grele de dimensionare pentru portal, la o astfel de soluție se mai pune și problema unor dificultăți suplimentare în exploatare în legătură cu vizibilitatea contactelor, asigurarea unei acționări manuale și accesul în caz de revizii. O astfel de dispoziție a fost de exemplu adoptată la Dneproghes atît în etapa inițială cît și cu ocazia reconstrucției de după al doilea război mondial, cînd, sub alte aspecte, s-au adus dispoziției unele îmbunătățiri esențiale (B. 3).

In cazul soluției propuse în fig. 4 ar rezulta totuși unele complicații constructive la ocolirea elastică a întreruptorilor din circuitele de transformatori, dacă se adoptă dispunerea întreruptorilor de transformatori în același șir cu restul întreruptorilor din stație. Legătura de ocolire s-ar putea realiza la înălțimea barelor colectoare suspendîndu-se de o riglă fixată în consolă de portalul de ieșire, către zona întreruptorilor. Legăturile către transformatori ar trece pe deasupra, suspendîndu-se de o altă riglă fixată tot în consolă, dar de astă dată către exteriorul stației, pentru a permite realizarea legăturilor verticale în axul portalului de ieșire. Se apreciază că astfel de complicații nu ar fi justificate și că pentru întreruptorii de transformatori ar fi indicat ori să se adopte o schemă de ocolire rigidă ca în fig. 3 b, ori să se renunțe la ocolire ceea ce, după cum s-a arătat în paragraful anterior, este recomandat de prescripțiile din țara noastră atunci cînd există rezervă în puterea transformatorilor.

La toate dispozițiile prezentate, transformatorii de tensiune de pe linii au fost racordați direct la linie. Pentru o lucrare la unul din acești transformatori este necesară întreruperea funcționării liniei respective. In schimb transformatorii de curent fiind dispuși lîngă întreruptori pot fi scoși în revizie fără întreruperea circuitului. In intervalul respectiv de timp ei sînt înlocuiți de transformatorii de curent din circuitul întreruptorului prin care se face transferul. Atunci cînd transformatorii de curent

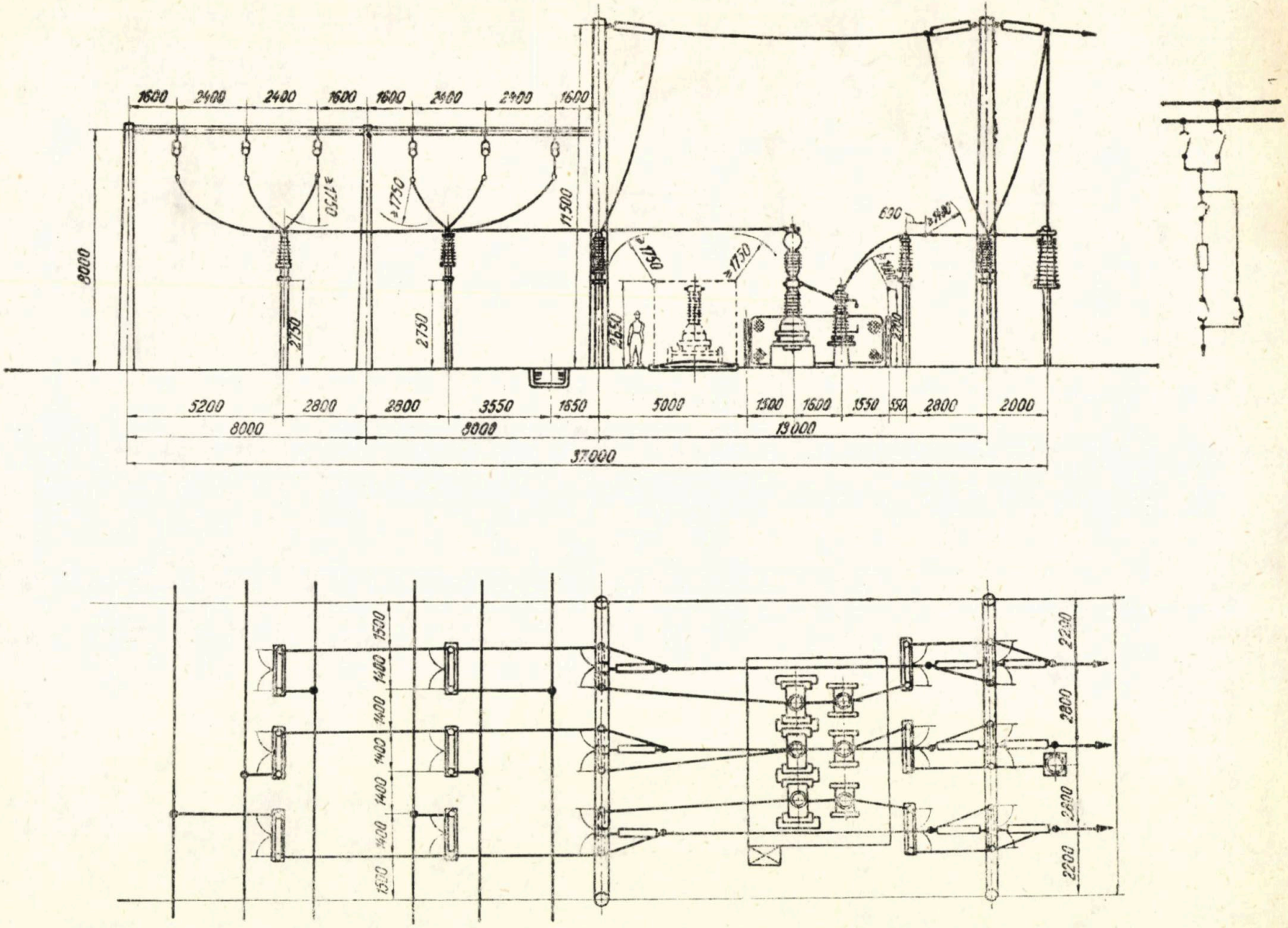
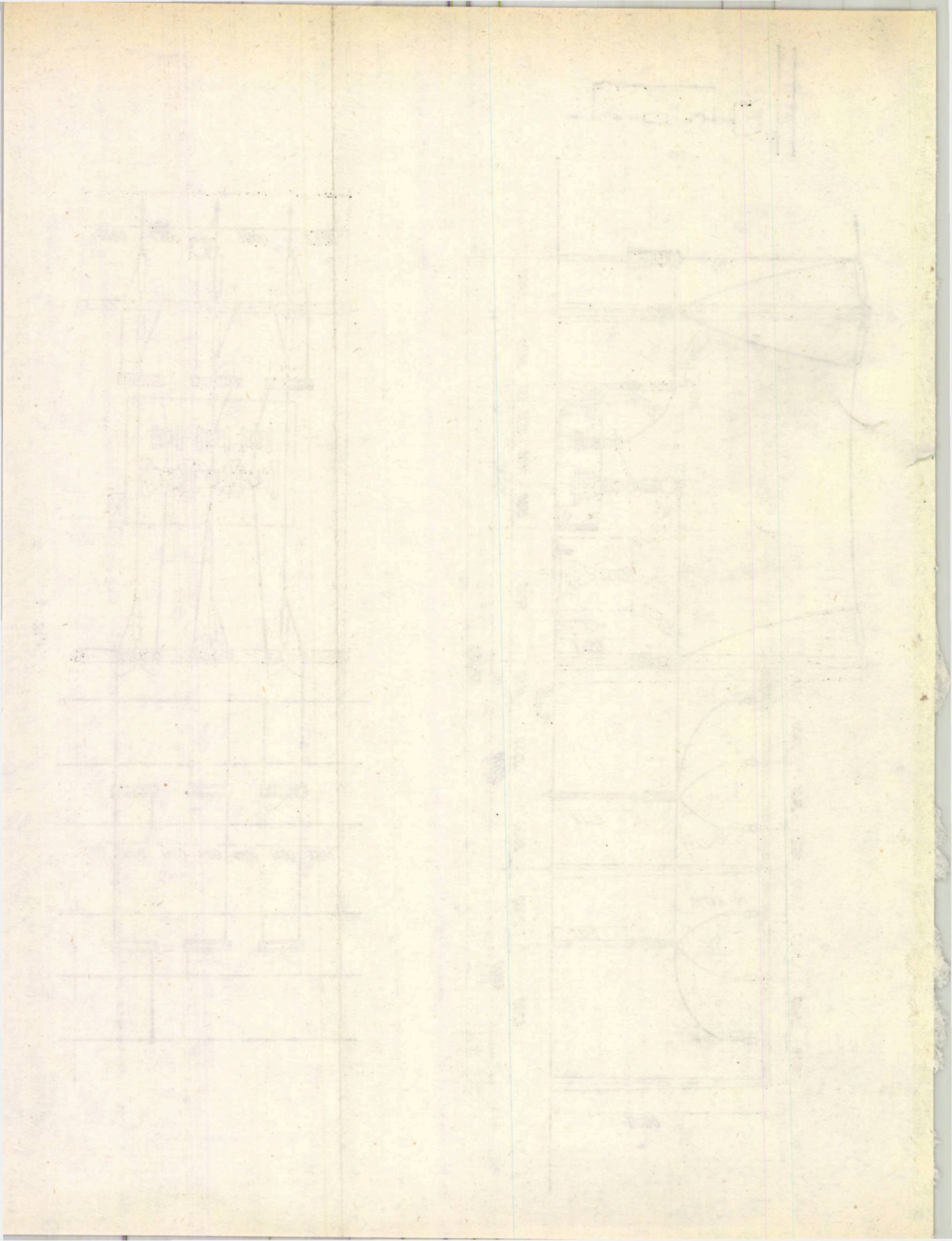

1600
2400
2400
1600
1600
2400
2400
1600
8000
≥1750
≥1750
11.500
2750
2750
2650
≥1750
≥1750
690
≥1400
5200
2800
2800
3550
1650
5000
1500
1600
1550
550
2800
2000
8000
8000
13000
37.000
1500
1400
1400
1400
1400
1400
1500
2200
2800
2800
2200

Fig. 4



ai liniilor au rapoarte de transformare și uneori alimentează protecții diferite, în cazul ocolirii rezultă complicații, fiind necesare modificări ale rapoartelor de transformare. Pentru ușurarea exploatării, unii constructori fie prevăd pe cupla de transfer două rînduri de transformatori *de curent* cu rapoarte de transformare diferite, fie dispun transformatorii de curent alături de cei de tensiune așa fel încît toți transformatorii de măsură rămîn permanent în circuit, în afara unor posibilități de ocolire (B. 4).

O comparație a suprafețelor ocupate de cîte o celulă de 110 kV în cazul schemelor de ocolire discutate și al dispozițiilor propuse este prezentată în tabela 2.

Tabela 2

Schema	Ocolirea întreruptorilor de transformator	Suprafața ocupată de o celulă	
		mp	%
Fără posibilități de ocolire (fig. 2)	—	234	100
Cu bară de transfer (schema 1 a și 1 b, fig. 2)	da	306	131
Fără bară de transfer și ocolire rigidă (schema 1 c și fig. 3)	nu	260	111
	da	280	120
Fără bară de transfer și ocolire elastică (schema 1 d și fig. 4)	nu	310	132
	ocolire rigidă	330	141

Soluția fără bară de transfer și ocolire rigidă rezultă cea mai economică. Față de schema fără posibilități de ocolire această soluție presupune cele mai mici creșteri ale suprafețelor necesare de teren. Investițiile suplimentare, necesare în special pentru separatorii de transfer, sînt de ordinul procentelor și s-ar recupera — de economia națională — de la prima revizie dacă cu această ocazie s-ar evita pagubele datorite nelivrării timp de o oră a unei sarcini medii de cca. 5—10 MW. În plus, în cazul unei extinderi neprevăzute a stației, se poate trece cu un volum mic de lucrări și cu întreruperi de scurtă durată la o schemă cu bare și cuplă de transfer.

Schemele și dispozițiile constructive prezentate se pot desigur folosi și la stații exterioare cu tensiuni mai mici sau mai mari de 110 kV. În tabela 3 se prezintă lățimile necesare pentru celulele echipate cu separatori de fabricație autohtonă, cu polii dispuși în linie.

Este de remarcat că la tensiunea de 220 kV, la care în țara noastră s-au realizat celule cu separatori de bare în linie cu lățimea de 17 m, ar putea fi suficientă o amplificare a acestei dimensiuni cu 6%. La 35 kV lățime de ordinul a 6 m s-au adoptat la mai multe dispoziții clasice cu portal central și polii separatorilor alăturați.

Tabela 3

Tensiunea nominală	kV	35	60	110	220
Lățimea pentru 3 poli de separator dispuși în linie	m	3,8	4,0	7,0	14,0
Distanța minimă de securitate față de părți sub tensiune din celulele alăturate	m	2,2	2,5	3,0	4,0
Pasul celulei	m	5,5	6,5	10,0	18,0

La celulele de 110 kV s-ar putea adopta și un pas mai redus decît cel indicat din tabela 3 — de exemplu de ordinul a 9,5 m — în cazul în care pe durata lucrărilor de revizii s-ar prevede paravane despărțitoare față de părțile sub tensiune din celulele vecine.

3. *Concluzii.*

A. În stațiile cu număr mare de circuite care trebuie să funcționeze racordate la bare colectoare diferite se consideră indicat a se prevede bare de transfer și cîte un întreruptor de cuplă transversală și unul de transfer (schema 1 a).

B. În instalațiile la care pe durata ocolirii unui întreruptor se apreciază că nu sînt necesare treceri de circuite de pe un sistem de bare colectoare pe altul, se poate adopta un singur întreruptor prin care să se realizeze atît ocolirea cît și cupla transversală (schema 1 b).

C. Pentru stațiile cu un număr mai mic de circuite, care pe durata ocolirii unui întreruptor pot fi toate racordate la un singur sistem de bare colectoare, este recomandabilă adoptarea unei soluții de ocolire fără bare de transfer.

Ocolirea rigidă (schema 1 c) duce la construcții mai economice decît ocolirea elastică (schema 1 d).

D. Dispozițiile cu toți separatorii în linie care se propun pentru ocolirea fără bare de transfer, față de soluțiile folosite în străinătate, prezintă unele avantaje în ceea ce privește suprafața ocupată precum și siguranța și comoditatea în exploatare.

Catedra de centrale electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. M.I.G. — D.G.E.E.: Prescripții de exploatare tehnică a centralelor și rețelelor electrice. I.C.S.E., 1960.
2. M.M.E.E.: Prescripții pentru proiectarea stațiilor de transformare și conexiuni de 110 și 35 kV. Prescripția nr. 24-1962.
3. *Dvoskin L. I.:* Komponovki i konstrukții raspredelitelnîh ustroistv vîsocogo napriejenia. Gosenergoizdat 1960.
4. *Kulik Peter:* Die Umgehung des Leistungsschalters in Freiluftschaltanlagen. Elektro-Anz. Ausg. ges. Ind. 1964, 17, nr. 33, 490 491.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

TERMOTEHNICĂ

C.Z. 536.5

ANALIZA TERMODINAMICĂ A PROCESELOR TEORETICE DE UMPLERE ȘI EVACUARE A GAZULUI DIN CILINDRUL DETENTORULUI CU PISTON *

VSEVOLOD RADCENCO

Utilizarea detentoarelor în tehnica temperaturilor joase permite obținerea frigului într-un mod foarte eficace și anume, prin destinderea adiabatică a gazului însoțită de efectuarea unui lucru mecanic.

Din punct de vedere constructiv se pot deosebi detentoarele cu piston care prelucrează debite de gaz reduse la presiuni inițiale mijlocii și mari și turbodetentoarele în care se destind debite mari de gaz avînd presiuni de intrare reduse.

Detentoarele cu piston echipează în mod curent instalațiile industriale și de laborator de lichefiere a aerului, heliului, hidrogenului și gazelor naturale.

Deși prezintă numeroase puncte de asemănare cu motoarele cu ardere internă și compresoarele cu piston din punct de vedere al mecanismului de mișcare și distribuției, totuși funcționarea în condițiile unor temperaturi joase imprimă detentoarelor cu piston o serie de trăsături specifice care se manifestă mai ales în rezolvarea problemelor de etanșare și ungere a pistonului.

În funcție de temperatura gazului admis în cilindrul detentorului etanșarea și ungerea pistonului se realizează cu segmenți și uleiuri speciale avînd punct de congelare coborît, cu manșete de piele sau masă plastică prin frecare uscată și pe seama rezistenței hidraulice a jocului dintre piston și cilindru folosind ungerea cu gaz.

Majoritatea construcțiilor de detentoare cu piston sînt prevăzute cu sisteme de distribuție complicate avînd ca elemente principale supapele de admisie și evacuare care imprimă gazului o circulație în contracurent caracterizată prin pierderi termogazodinamice importante; aceste pierderi pot fi limitate prin funcționarea la turații reduse.

În ultimii ani se manifestă tendința de a simplifica sistemul de distribuție și de a aplica schema de circulație în echicurent a gazului care să permită reducerea pierderilor și mărirea turației de funcționare a detentoarelor cu piston. Din acest punct de vedere se remarcă realizarea unor

* Manuscris prezentat la redacție la 2 martie 1965.

detentoare cu piston experimentale caracterizate fie prin înlocuirea supapei de evacuare cu ferestre de evacuare [1] fie prin înlocuirea ambelor supape cu ferestre [2].

Diagrama teoretică de funcționare a detentorului cu piston prevăzut cu supape de admisie și evacuare este arătată în figura 1. Ipotezele care stau la baza definirii acestei diagrame sînt următoarele:

1. agentul termic care evoluează în cilindrul detentorului se comportă ca un gaz ideal;

2. pierderile de presiune datorită laminării gazului în procesele de admisie și evacuare sînt nule;

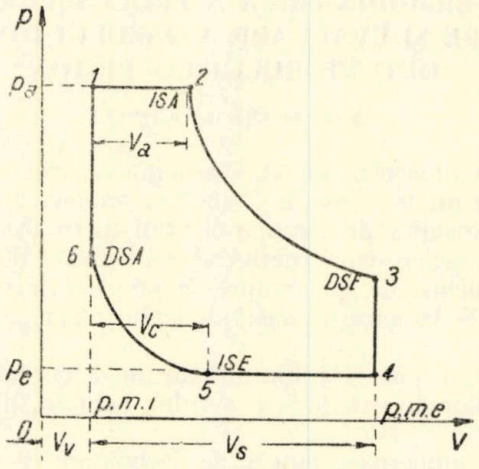


Fig. 1

3. între capacul cilindrului și pistonul aflat la punctul mort interior rămîne un spațiu denumit volum vătămător (V_v);

4. deschiderea supapelor de admisie (*DSA*) și evacuare (*DSE*) se face în punctul mort interior (p.m.i.) și respectiv exterior (p.m.e.);

5. procesul de destindere 2—3 este o transformare adiabatică reversibilă (izentropică) care începe în momentul închiderii supapei de admisie (ISA) și se termină o dată cu deschiderea supapei de evacuare;

6. procesul de precomprimare 5—6 este o transformare izentropică care începe odată cu închiderea supapei de evacuare (*ISE*) și ia sfîrșit în momentul deschiderii supapei de admisie;

7. procesul de umplere 6—1—2 este un proces adiabatic compus din faza ireversibilă de umplere la volum constant 6—1 care începe o dată cu deschiderea supapei de admisie și faza ireversibilă de umplere la presiune constantă 1—2 care se termină în momentul închiderii supapei de admisie;

8. procesul de evacuare 3—4—5 este un proces adiabatic compus din faza ireversibilă de evacuare la volum constant 3—4 care începe la deschiderea supapei de evacuare și faza ireversibilă de evacuare la presiune constantă 4—5 care se termină o dată cu închiderea supapei de evacuare.

Ca o consecință a ipotezei a doua, în timpul fazelor de umplere și evacuare la presiune constantă presiunea gazului din cilindru rămîne permanent egală cu presiunea p_a din conducta de admisie și respectiv p_e din cea de evacuare.

Din cele arătate rezultă că diagrama teoretică de funcționare a detentorului cu piston se compune din două procese reversibile (destinderea și precomprimarea) și două procese ireversibile (umplerea și evacuarea).

Ținînd seama de caracterul ireversibil al proceselor de umplere și evacuare, analiza termodinamică a acestor procese în cadrul ipotezelor enumerate prezintă importanță atît din punct de vedere teoretic cît și practic. În esență această analiză urmărește stabilirea expresiilor generale ale temperaturii gazului la finele procesului de umplere și în conducta de evacuare și precizarea influenței factorilor constructivi și funcționali asupra acestor temperaturi.

Analiza termodinamică a celor două procese poate fi făcută atît prin aplicarea metodei globale care ține seama numai de starea inițială și finală a agentului, cît și prin metoda diferențială care urmărește desfășurarea procesului între cele două stări.

Diagrama teoretică de funcționare a detentorului cu piston prevăzut cu supape de admisie și evacuare (fig. 1) poate fi definită prin precizarea următorilor factori funcționali și constructivi:

— gradul de destindere: $\pi = \frac{p_a}{p_e}$ (1)

— coeficientul spațiului vătămător: $a_v = \frac{V_v}{V_s}$ (2)

— gradul de umplere: $\delta_a = \frac{V_2}{V_s}$ (3)

— gradul de precomprimare: $\delta_c = \frac{V_5}{V_s}$ (4)

în care V_s este volumul cursei pistonului.

Dacă se notează cu V_a și V_c volumele descrise de piston în procesele de admisie la presiune constantă și respectiv de compresie, atunci cele două procese pot fi caracterizate și prin:

— gradul de admisie: $\varepsilon_a = \frac{V_a}{V_s}$ (5)

— gradul de compresie: $\varepsilon_c = \frac{V_c}{V_s}$ (6)

Se observă că, între gradele de umplere și precomprimare și respectiv cele de admisie și compresie există următoarele relații de legătură:

$$\delta_a = \frac{V_a + V_v}{V_s} = \varepsilon_a + a_v \tag{7}$$

$$\delta_c = \frac{V_c + V_v}{V_s} = \varepsilon_c + a_v \tag{8}$$

Diagramele teoretice de funcţionare ale detentoarelor cu piston experimentale cu supapă de admisie şi ferestre de evacuare şi respectiv cu ferestre de admisie şi evacuare menţionate mai sus sînt arătate în figurile 2 şi 3.

Se observă că aceste diagrame reprezintă două cazuri particulare ale diagramei de funcţionare a detentorului cu supape de admisie şi evacuare (fig. 1). Caracteristica generală a celor două diagrame constă în aceea că

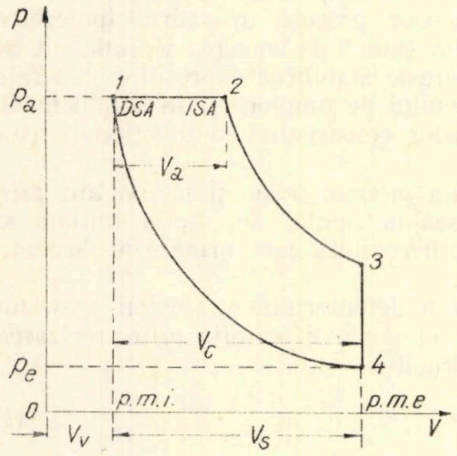


Fig. 2

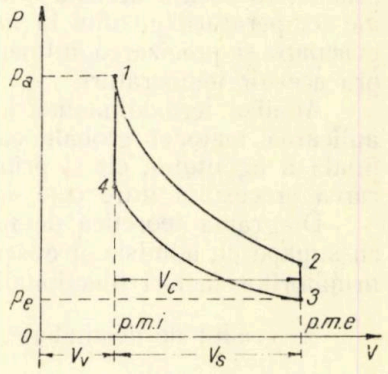


Fig. 3

procesul de precomprimare se desfăşoară pe întreaga cursă a pistonului, ceea ce determină eliminarea fazei de evacuare la presiune constantă. Se vede deci că, înlocuirea supapelor de evacuare prin ferestre de evacuare impune următoarele condiţii:

$$V_c = V_s\,;\ \varepsilon_c = 1\,;\ \delta_c = 1 + a_v \tag{9}$$

In ceea ce priveşte procesul de umplere se remarcă reducerea lui fie numai la faza de umplere la presiune constantă (fig. 2), fie numai la volum constant (fig. 3). Eliminarea etapei de umplere la volum constant în cazul detentorului cu supapă de admisie şi ferestre de evacuare este dictată de necesitatea reducerii volumului vătămător. Înlocuirea supapei de admisie cu ferestre de admisie impune în cel de al doilea caz eliminarea etapei de umplere la presiune constantă ceea ce se materializează prin condiţiile:

$$V_a = 0\,;\ \varepsilon_a = 0\,;\ \delta_a = a_v \tag{10}$$

Din cele arătate se desprinde concluzia că deosebirile dintre diagramele teoretice de funcţionare ale diferitelor tipuri de detentoare sînt determinate în esenţă de deosebirile în modul de organizare a proceselor de umplere şi evacuare a gazului din cilindru. Aceste deosebiri definite de condiţiile (9) şi (10) vor permite stabilirea unor expresii mai simple pentru temperatura gazului la finele procesului de umplere şi în conducta

de evacuare, prin particularizarea expresiilor generale obținute în cadrul analizei termodinamice a proceselor de umplere și evacuare.

Ireversibilitatea proceselor de umplere și evacuare determină, așa cum se arată în figura 4, reducerea căderii de temperatură $\Delta T = T_a - T_e$ care se obține în procesul de evoluție a gazului admis în cilindrul detentorului în raport cu căderea maximă de temperatură $\Delta T_{ad} = T_a - T_{e_{ad}}$ care s-ar putea obține prin destinderea izentropică a gazului în același interval de presiuni.

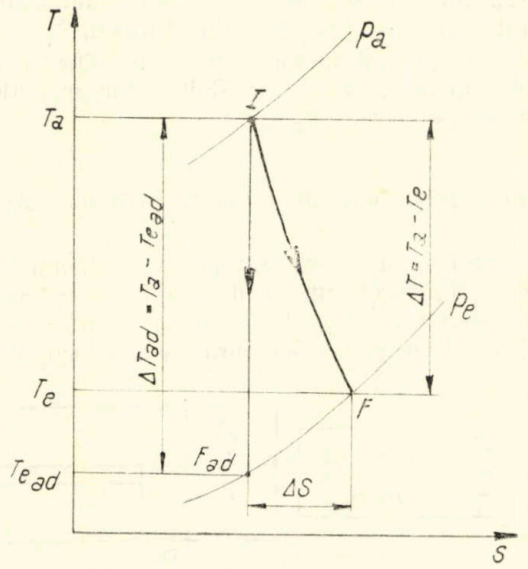


Fig. 4

Perfecțiunea proceselor care au loc în cilindrul detentorului cu piston poate fi apreciată prin randamentul adiabatic teoretic care compară tocmai cele două căderi de temperatură:

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{\Delta T}{\Delta T_{ad}} = \frac{T_a - T_e}{T_a - T_{e_{ad}}} \tag{11}$$

în care T_a este temperatura gazului admis în cilindru;

T_e — temperatura gazului din conducta de evacuare;

$T_{e_{ad}}$ — temperatura gazului la finele unei destinderi adiabatice reversibile.

Datorită ireversibilității celor două procese, entropia specifică a gazului care evoluează în cilindru crește cu Δs iar randamentul adiabatic teoretic înregistrează o scădere corespunzătoare. Pentru mărirea lui $\eta_{0_{ad}}$ este necesară reducerea gradului de ireversibilitate al proceselor de umplere și evacuare, în acest scop fiind necesară studierea influenței fiecărui factor constructiv și funcțional asupra modului de desfășurare a celor două procese.

1. Procesul de umplere

Ireversibilitatea procesului de umplere cu gaz a cilindrului detentorului cu piston este determinată în esență de doi factori și anume:

— egalarea presiunii gazului rezidual aflat în cilindru în momentul deschiderii supapei de admisie cu presiunea gazului din conducta de admisie;

— amestecarea gazului rezidual cu gazul admis însoțită de uniformizarea temperaturii în masa gazului din cilindru.

Spre deosebire de primul factor care se manifestă numai în faza de umplere la volum constant, cel de la doilea factor acționează, pe toată durata procesului de umplere.

1.1. *Analiza procesului de umplere prin metoda globală*

Etapele procesului de umplere sînt arătate schematic în figura 5.

In prima etapă (fig. 5,α) supapa de admisie este închisă iar pistonul se află la punctul mort interior. În cilindru se află o cantitate de gaz rezidual G_6 la presiunea p_6 și temperatura T_6 care ocupă volumul $V_6 = V_1$.

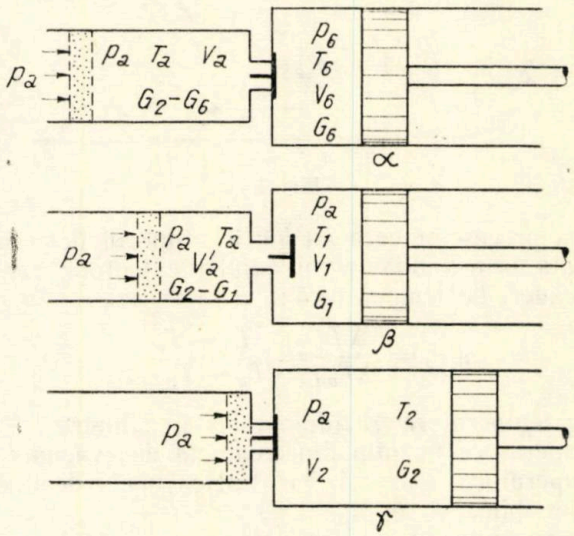


Fig. 5

Cantitatea de gaz care va pătrunde în cilindru în timpul procesului de umplere 6—1—2 este, evident $G_2 - G_6$; ea ocupă un volum V_a și se află la presiunea $p_a > p_6$ și temperatura T_a. Pentru a separa această cantitate de gaz de restul gazului, în conducta de admisie, s-a reprezentat un piston imaginar supus din exterior acțiunii presiunii de admisie p_a.

În etapa a doua (fig. 5, β) se deschide supapa de admisie și o parte din gazul aflat în conducta de admisie pătrunde în cilindru pînă cînd presiunea din cilindru devine egală cu cea de admisie p_a, pistonul rămînînd la p.m.i. La sfîrșitul acestei etape, gazul din cilindru este caracterizat prin presiunea p_a și temperatura T_1 iar cel din conducta de admisie ocupă un volum mai mic, V'_a la aceeași presiune p_a și temperatură T_a. Cantitatea de gaz din cilindru crește de la G_6 la G_1 iar cea din conducta de admisie scade de la $G_2 - G_6$ la $G_2 - G_1$.

În etapa a treia (fig. 5, γ) are loc umplerea la presiune constantă în timpul căreia pistonul se deplasează de la p.m.i. către p.m.e. descriind volumul $V_a = V_2 - V_1$. În această etapă, întreaga cantitate de gaz aflată în conducta de admisie pătrunde în cilindru. La închiderea supapei de admisie, gazul dn cilindru ocupă volumul V_2 fiind caracterizat prin presiunea p_a și temperatura T_1.

Pentru studierea procesului se aplică prima formă a ecuației matematice a primului principiu al termodinamicii:

$$\delta Q = dU + A\,p\,dV \tag{12}$$

care se integrează între starea inițială α și cea finală γ ținînd seama că $\delta Q = 0$:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} dU + A\int_{\alpha}^{\gamma} p\,dV = 0 \tag{13}$$

sau

$$U_\gamma - U_\alpha + A\,p_a\,(V_\gamma - V_\alpha) = 0 \tag{14}$$

în care:

$$U_\alpha = G_6\,c_v\,T_6 + (G_2 - G_6)\,c_v\,T_a \tag{15}$$

$$U_\gamma = G_2\,c_v\,T_2 \tag{16}$$

$$V_\alpha = V_1 + V_a \tag{17}$$

$$V_\gamma = V_2 \tag{18}$$

Pe baza relațiilor (15) ... (18) expresia (14) devine:

$$G_2\,c_v\,T_2 - G_6\,c_v\,T_6 - (G_2 - G_6)\,c_v\,T_a + A\,p_a\,(V_2 - V_1 - V_a) = 0 \tag{19}$$

Volumele V_1, V_a și V_2 se pot determina prin aplicarea ecuației de stare:

$$V_1 = \frac{G_6\,R\,T_6}{p_6} \tag{20}$$

$$V_a = \frac{(G_2 - G_6)\,R\,T_a}{p_a} \tag{21}$$

$$V_2 = \frac{G_2\,R\,T_2}{p_a} \tag{22}$$

Dacă se efectuează înlocuirile volumelor V_1, V_a și V_2 pe baza relațiilor (20) ... (22) și se raportează expresia (19) la $G_2 c_v$ rezultă:

$$T_2 - \frac{G_6}{G_2} T_6 - \left(1 - \frac{G_6}{G_2}\right) T_a + \frac{AR}{c_v}\left[T_2 - \frac{G_6}{G_2}\frac{p_a}{p_6} T_6 - \left(1 - \frac{G_6}{G_2}\right) T_a\right] = 0 \tag{23}$$

Ținînd seama că $AR/c_v = k - 1$, după reduceri se obține:

$$k T_2 - \frac{G_6}{G_2} T_6 - (k-1)\frac{p_a}{p_6}\cdot\frac{G_6}{G_2} T_6 - k\left(1 - \frac{G_6}{G_2}\right) T_a = 0 \tag{24}$$

Pentru calculul raportului G_6/G_2 se aplică ecuația de stare în punctele 6 și 2 ale diagramei:

$$\frac{G_6}{G_2} = \frac{p_6 V_1/R T_6}{p_a V_2/R T_2} = \frac{p_6}{p_a}\cdot\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{T_2}{T_6} \tag{25}$$

După înlocuirea raportului G_6/G_2 se obține expresia finală:

$$k T_2 - \frac{p_6}{p_a}\cdot\frac{V_1}{V_2} T_2 - (k-1)\frac{V_1}{V_2} T_2 - k\left(1 - \frac{p_6}{p_a}\cdot\frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{T_2}{T_6}\right) T_a = 0 \tag{26}$$

din care se determină temperatura T_2:

$$T_2 = T_a \frac{k}{k - (k-1)\dfrac{V_1}{V_2} + \left(k\dfrac{T_a}{T_6} - 1\right)\dfrac{p_6}{p_a}\cdot\dfrac{V_1}{V_2}} \tag{27}$$

Se observă că raportul V_1/V_2 poate fi exprimat în funcție de coeficientul spațiului vătămător și gradul de umplere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_v/V_s}{V_2/V_s} = \frac{a_v}{\delta_a} \tag{28}$$

Ținînd seama de relația (28) expresia temperaturii T_2 devine:

$$T_2 = T_a \frac{k}{k - (k-1)\dfrac{a_v}{\delta_a} + \left(k\dfrac{T_a}{T_6} - 1\right)\dfrac{p_6}{p_a}\cdot\dfrac{a_v}{\delta_a}} \tag{29}$$

Expresia (29), ca expresie generală a temperaturii gazului la finele procesului de umplere, arată că temperatura T_2 depinde de:

— presiunea p_a și temperatura T_a a gazului admis;
— presiunea p_6 și temperatura T_6 a gazului rezidual;

— coeficientul spațiului vătămător a_v și gradul de umplere δ_a;

— natura gazului precizată prin exponentul adiabatic k.

Se observă că, în cazul detentorului ideal, caracterizat prin condiția $a_v = 0$, expresia (29) se reduce la $T_2 = T_a$.

Pe baza expresiei generale (29) se pot stabili două expresii particulare ale temperaturii la finele procesului de umplere și anume:

a) în cazul detentorului experimental cu ferestre de admisie și evacuare (fig. 3) se impun condițiile (10) iar temperatura T_1 la finele umplerii la volum constant este dată de expresia [2, 3]:

$$T_1 = T_a \frac{k}{1 + \left(k \frac{T_a}{T_4} - 1\right) \frac{p_4}{p_a}} \tag{30}$$

Din expresia (30) se observă că încălzirea maximă a gazului ca urmare a umplerii la volum constant are loc, la limită, pentru $p_4/p_a \to 0$ și are valoarea:

$$\Delta T = T_1 - T_a = (k - 1) T_a \tag{31}$$

Dacă temperatura gazului admis este egală cu cea a gazului din cilindru, $T_a = T_4$, expresia (30) devine [4]:

$$T_1 = T_a \frac{k}{1 + (k - 1) \frac{p_4}{p_a}} \tag{32}$$

b) în cazul detentorului experimental cu supapă de admisie și ferestre de evacuare (fig. 2) se impune condiția $p_6 = p_a$ iar temperatura T_2 la finele umplerii la presiune constantă este dată de expresia:

$$T_2 = T_a \frac{1}{1 + \left(\frac{T_a}{T_1} - 1\right) \frac{a_v}{\delta_a}} \tag{33}$$

În ipoteza $T_a = T_1$ expresia (33) se reduce la $T_2 = T_a$ ceea ce era evident.

1.2. *Analiza procesului de umplere prin metoda diferențială*

Caracterul diferit al modului de desfășurare a celor două etape ale procesului de umplere impune studierea prin metoda diferențială a fiecărei etape în parte, ceea ce va permite stabilirea legilor de variație a temperaturii gazului din cilindrul detentorului cu piston.

1.2.1. *Umplerea la volum constant*

Pentru stabilirea ecuației diferențiale care guvernează etapa de umplere la volum constant se consideră două momente intermediare ale acestei etape, separate printr-un interval de timp $\Delta\tau$, așa cum se arată în figura 6.

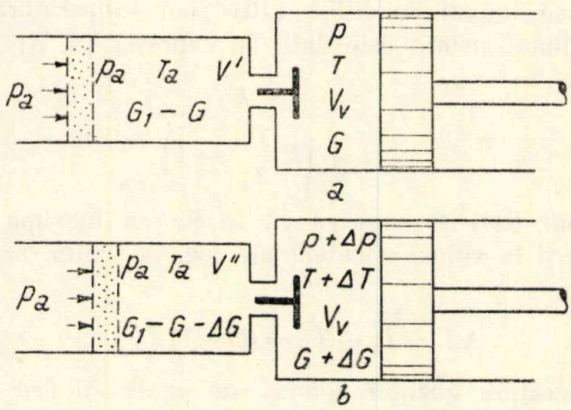


Fig. 6

Inițial, (fig. 6, a) în cilindru se află o cantitate de gaz G, care ocupă volumul V_v, la presiunea p și temperatura T. În conducta de admisie, cantitatea de gaz $G_1 - G$ care va pătrunde în cilindru în etapa de umplere la $V = ct$, ocupă volumul V' la presiunea p_a și temperatura T_a.

În momentul următor (fig. 6, b) în cilindru intră o cantitate de gaz ΔG ceea ce determină creșterea presiunii și temperaturii gazului din cilindru cu Δp și respectiv ΔT. Cantitatea de gaz din conducta de admisie scade cu ΔG, iar volumul ocupat se reduce la V''.

După aplicarea ecuației matematice a primului principiu al termodinamicii, prin reducerea termenilor asemenea și neglijarea infiniților mici de ordin superior, trecînd la limită se obține următoarea ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{dT}{kT_a - T} = \frac{dG}{G} \tag{34}$$

Deoarece scopul calculului este stabilirea unei legi de variație a temperaturii în funcție de presiunea gazului din cilindru se procedează la înlocuirea corespunzătoare a variabilei G. În acest scop se aplică succesiv ecuația de stare pentru gazul aflat în cilindru în cele două momente con-

siderate. După raportarea celor două expresii și trecerea la limită se obține:

$$\frac{dG}{G} = \frac{1 + \frac{dp}{p}}{1 + \frac{dT}{T}} - 1 \tag{35}$$

Ținînd seama de relația (35) ecuația diferențială care descrie procesul devine:

$$k T_a \frac{dT}{T(k T_a - T)} = \frac{dp}{p} \tag{36}$$

După integrarea nedefinită și determinarea constantei de integrare cu ajutorul condițiilor inițiale (fig. 1) rezultă:

$$T = T_a \frac{k}{1 + \left(k \frac{T_a}{T_6} - 1\right) \frac{p_6}{p}} \tag{37}$$

Pentru determinarea temperaturii gazului la finele etapei de umplere la $V = ct$ se pune condiția $p = p_1 = p_a$ și se obține:

$$T_1 = T_a \frac{k}{1 + \left(k \frac{T_a}{T_6} - 1\right) \frac{p_6}{p_a}} \tag{38}$$

Se observă că expresia (38) are o structură identică cu expresia (30) dedusă prin particularizarea expresiei generale (29).

1.2.2. *Umplerea la presiune constantă*

Ca și în cazul precedent, se consideră două momente intermediare ale etapei de umplere la presiune constantă, așa cum se arată în figura 7.

În momentul inițial (fig. 7, a), cantitatea de gaz G din cilindru ocupă volumul V și se află la presiunea de admisie p_a și temperatura T. Cantitatea de gaz din conducta de admisie este egală cu cea care va intra în cilindru în timpul etapei de umplere la $p = ct$, adică $G_2 - G$; ea ocupă un volum V' și se află la presiunea p_a și temperatura T_a.

În intervalul de timp foarte scurt care separă cele două momente, pistonul se deplasează iar volumul cilindrului crește cu ΔV ceea ce permite intrarea unei cantități suplimentare de gaz ΔG din conducta de admisie. Dacă se presupune că $T_a > T_1$, atunci prin amestecarea cantităților de gaze G și ΔG caracterizate prin temperaturi diferite, temperatura în cilindru va crește cu ΔT. Prin reducerea cantității de gaz din conducta de admisie, volumul ocupat scade la V'', presiunea și temperatura rămînînd permanent constante.

Pentru stabilirea ecuației diferențiale care descrie procesul descris, se recurge la aplicarea celei de a doua forme a ecuației matematice a primului principiu al termodinamicii:

$$\delta Q = dI - A_i V\,dp \tag{39}$$

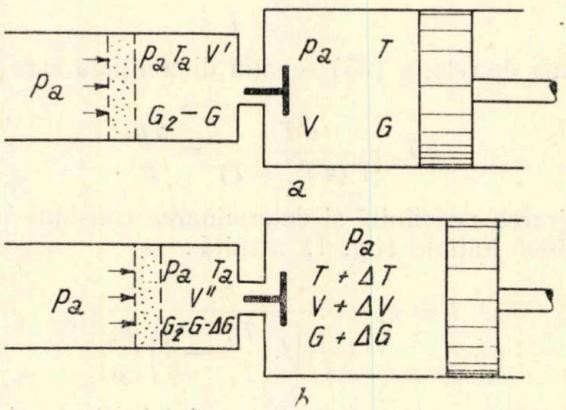


Fig. 7

Ținînd seama că $\delta Q = 0$ iar procesul se desfășoară la presiune constantă rezultă:

$$dI = 0 \tag{40}$$

După efectuarea înlocuirilor, reducerea termenilor asemenea și neglijarea infiniților mici de ordin superior, trecînd la limită se obține următoarea ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{dT}{T_a - T} = \frac{dG}{G} \tag{41}$$

Ca și în cazul precedent se procedează la schimbarea variabilei aplicînd succesiv ecuația de stare gazului din cilindru în cele două momente considerate. După raportarea expresiilor și trecerea la limită se obține:

$$\frac{dG}{G} = \frac{1 + \dfrac{dV}{V}}{1 + \dfrac{dT}{T}} - 1 \tag{42}$$

Pe baza relației (42) ecuația diferențială devine:

$$T_a \frac{dT}{T(T_a - T)} = \frac{dV}{V} \tag{43}$$

După integrarea nedefinită și determinarea constantei de integrare cu ajutorul condițiilor inițiale (fig. 1) rezultă:

$$T = T_a \frac{1}{1 + \left(\frac{T_a}{T_1} - 1\right)\frac{V_1}{V}}. \tag{44}$$

Pentru determinarea temperaturii gazului la finele etapei de umplere la $p = ct$ se pune condiția $V = V_2$ și se obține:

$$T_2 = T_a \frac{1}{1 + \left(\frac{T_a}{T_1} - 1\right)\frac{V_1}{V_2}} \tag{45}$$

în care $V_1/V_2 = a_v/\delta_a$.

Expresia stabilită este identică cu expresia (33) rezultată prin particularizarea expresiei generale (29).

2. Procesul de evacuare

Factorii care determină ireversibilitatea procesului de evacuare sînt de aceeași natură ca și în cazul procesului de umplere și anume:

— egalarea presiunii gazului aflat în cilindru în momentul deschiderii supapei de evacuare cu contrapresiunea din conducta de evacuare prin scurgerea unei cantități de gaz din cilindru:

— amestecarea tranșelor de gaz avînd temperatură variabilă însoțită de uniformizarea temperaturii în masa gazului din conducta de evacuare.

Ca și în cazul precedent, primul factor se manifestă numai în etapa de evacuare la volum constant sau liberă spre deosebire de cel de al doilea factor care acționează pe toată durata procesului de evacuare.

Spre deosebire de etapa de umplere la presiune constantă cînd ireversibilitatea apare ca urmare a procesului de amestecare a gazelor de temperaturi diferite în interiorul cilindrului, în etapa de evacuare la presiune constantă ireversibilitatea este determinată de amestecarea tranșelor de gaz în conducta de evacuare, procesul de evacuare 4—5 (fig. 1) a gazului din cilindru fiind teoretic reversibil.

2.1. *Analiza procesului de evacuare prin metoda globală*

Ca și la studiul procesului de umplere, se procedează la schematizarea procesului de evacuare așa cum se arată în figura 8.

În prima etapă (fig. 8, a) supapa de evacuare este închisă iar pistonul se află la p.m.e. Cantitatea de gaz G_3 din cilindru, ocupă volumul V_3 fiind caracterizată prin presiunea p_3 și temperatura T_3.

Prin deschiderea supapei de evacuare, gazul din cilindru se scurge în conducta de evacuare învingînd contrapresiunea p_e, astfel încît în etapa

a doua (fig. 8, b) în cilindru rămîne cantitatea de gaz G_4 care ocupă volumul $V_4 = V_3$ la presiunea p_e și temperatura $T_4 < T_3$. Destinderea cantității de gaz G_4 de la presiunea p_3 pînă la presiunea p_e are un caracter adiabatic.

Cantitatea de gaz evacuată din cilindru, $G_3 - G_4$ este caracterizată prin presiunea p_e și temperatura T_e' volumul ocupat V_e' fiind creiat prin deplasarea pistonului imaginar reprezentat în conducta de evacuare.

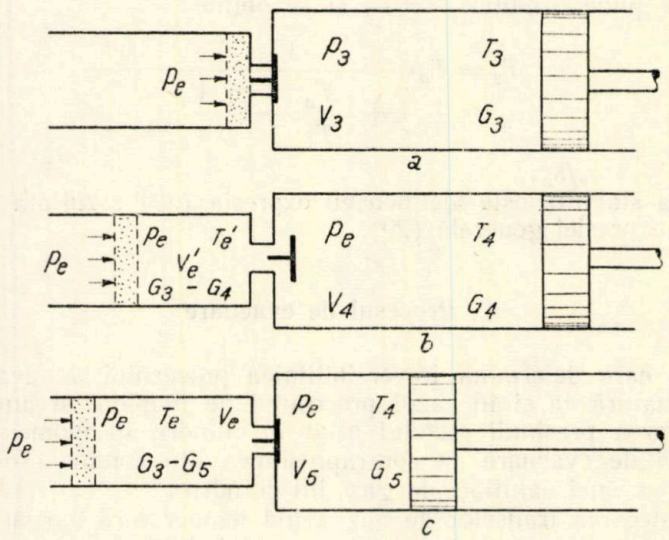


Fig. 8

În ultima etapă (fig. 8, c), pistonul se deplasează spre p.m.i. pînă cînd volumul ocupat de gaz în cilindru scade la V_5, presiunea și temperatura rămînînd egale cu cele din etapa precedentă. În această etapă, care se desfășoară la presiune constantă, cantitatea de gaz din conductă crește pînă la valoarea $G_3 - G_5$ și ocupă un volum V_e la presiunea p_e și temperatura finală T_e.

Procesul de evacuare se termină odată cu închiderea supapei de evacuare care are loc în punctul 5.

Pentru stabilirea expresiei generale a temperaturii gazului evacuat se procedează la integrarea ecuației (12) între starea inițială a și cea finală c ținînd seama că $\delta Q = 0$:

$$\int_a^c dU + A \int_a^c p\, dV = 0 \tag{46}$$

Rezultă:

$$U_c - U_a + A\, p_e (V_c - V_a) = 0 \tag{47}$$

în care se fac următoarele înlocuiri:

$$U_a = G_3 c_v T_3 \tag{48}$$

$$U_c = G_5 c_v T_4 + (G_3 - G_5) c_v T_e \tag{49}$$

$$V_a = V_3 \tag{50}$$

$$V_c = V_5 + V_e \tag{51}$$

După efectuarea înlocuirilor se obține:

$$G_5 c_v T_4 + (G_3 - G_5) c_v T_e - G_3 c_v T_3 + A p_e (V_5 + V_e - V_3) = 0 \tag{52}$$

Pentru determinarea temperaturii gazului evacuat se ține seama că:

$$V_e = \frac{(G_3 - G_5) R T_e}{p_e} \tag{53}$$

Se obține expresia:

$$T_e = \frac{c_v (G_3 T_3 - G_5 T_4) + A p_e (V_3 - V_5)}{c_p (G_3 + G_5)} \tag{54}$$

care se poate pune sub o altă formă dacă se efectuează următoarele înlocuiri:

$$G_3 = \frac{p_3 V_3}{R T_3} \tag{55}$$

$$G_5 = \frac{p_e V_5}{R T_4} \tag{56}$$

și se ține seama că fracțiunea de gaz G_4 rămasă în cilindru a suferit un proces de destindere adiabatică:

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_e}{p_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{57}$$

Ținînd seama de relațiile (55) ... (57) temperatura finală T_e este dată de următoarea expresie:

$$T_e = T_3 \frac{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p_e}{p_3}\right) + \frac{p_e}{p_3}\left(1 - \frac{V_5}{V_3}\right)}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{V_5}{V_3}} \tag{58}$$

Raportul V_5/V_3 poate fi exprimat în funcție de mărimile a_v și δ_c definite de relațiile (2) și (4):

$$\frac{V_5}{V_3} = \frac{V_5}{V_v + V_s} = \frac{V_5/V_s}{V_v/V_s + 1} = \frac{\delta_c}{1 + a_v} \tag{59}$$

Inlocuind raportul V_5/V_3 în expresia (58) rezultă:

$$T_e = T_3 \frac{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p_e}{p_3}\right) + \frac{p_e}{p_3}\left(1 - \frac{\delta_c}{1+a_v}\right)}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{\delta_c}{1+a_v}} \tag{60}$$

Expresia generală (60) arată că temperatura gazului evacuat depinde de:

— presiunea p_3 și temperatura T_3 a gazului din cilindru în momentul deschiderii supapei de evacuare;

— contrapresiunea p_e din conducta de evacuare;

— coeficientul spațiului vătămător a_v și gradul de precomprimare δ_c;

— natura gazului precizată prin exponentul adiabatic k.

Prin aplicarea condițiilor (9), expresia generală (60) permite stabilirea unei expresii particulare pentru temperatura gazului din cilindrii detentoarelor cu ferestre de evacuare. Ținînd seama de notațiile utilizate (fig. 2 și 3) rezultă [2]:

$$T_e = T_3 \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{p_e}{p_3}}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{61, a}$$

$$T_e = T_2 \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{p_e}{p_2}}{1 - \left(\frac{p_e}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{61, b}$$

Ultima expresie poate fi pusă sub o altă formă dacă se scrie că:

$$\left(\frac{p_e}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{p_e}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{p_e}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_3} \tag{62}$$

Dacă se introduce condiția (62) în expresia (61, b) și se determină T_2 rezultă:

$$T_2 = T_e \frac{k}{1 + \left(k \frac{T_e}{T_3} - 1\right)\frac{p_e}{p_2}} \tag{63}$$

Este interesant de remarcat că relațiile (30) și (63) deduse în cadrul studiului proceselor de umplere și evacuare la volum constant au o structură asemănătoare.

În cazul cînd închiderea supapei de evacuare are loc chiar în p.m.i. evacuarea gazului din cilindru se realizează pe toată cursa pistonului; în această situație particulară se impun condițiile:

$$\varepsilon_c = 0\,;\ \delta_c = a_v \tag{64}$$

Ținînd seama de condițiile (64) expresia generală (60) devine:

$$T_e = T_3 \frac{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p_e}{p_3}\right) + \frac{p_e}{p_3} \cdot \frac{1}{1 + a_v}}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{a_v}{1 + a_v}} \tag{65}$$

În cazul detentorului ideal, caracterizat prin condiția $a_v = 0$, expresia (65) se reduce la [4]:

$$T_e = T_3 \frac{1}{k}\left[1 + (k-1)\frac{p_e}{p_3}\right] \tag{66}$$

Dacă destinderea gazului în detentor este totală, adică $p_3 = p_e$ expresia (60) se reduce la $T_e = T_3$ ceea ce era evident.

2.2. *Analiza procesului de evacuare prin metoda diferențială*

Ca și în cazul procesului de umplere este necesară studierea separată a celor două etape care compun procesul de evacuare.

2.2.1. *Evacuarea la volum constant*

Ecuația diferențială care descrie această etapă se stabilește, considerînd două momente intermediare în desfășurarea etapei, arătate în figura 9.

În primul moment (fig. 9, a), cantitatea de gaz G din cilindru ocupă volumul V_2 la presiunea p și temperatura T_c'. În conducta de evacuare se află, evident, cantitatea de gaz $G_3 - G$ care ocupă volumul V la presiunea p_e și temperatura T.

În momentul următor, datorită evacuării din cilindru a unei cantități elementare de gaz ΔG, presiunea scade cu Δp iar temperatura devine T_c''. volumul rămînînd același. Creșterea cantității de gaz din conducta de evacuare, determină mărirea volumului ocupat cu ΔV la aceeași presiune p_e. Ca urmare a amestecului cantităților de gaze $G_3 - G$ și ΔG temperatura gazului din conducta de evacuare scade cu ΔT.

Prin aplicarea ecuației matematice (12) a primului principiu al termodinamicii rezultă :

$$(G-\Delta G)\,c_v\,T_c''+(G_3-G+\Delta G)\,c_v\,(T-\Delta T)-G\,c_v\,T_c'-$$
$$-(G_3-G)\,c_v\,T+A\,p_e\,(V+\Delta V-V)=0 \tag{67}$$

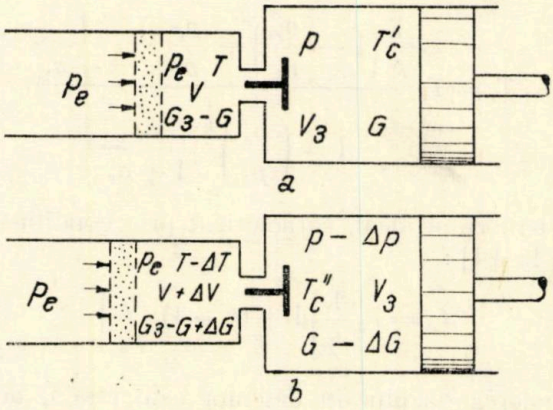


Fig. 9

Pentru prelucrarea matematică a ecuației (67) se ține seama de următoarele relații :

$$V+\Delta V=\frac{(G_3-G+\Delta G)\,R\,(T-\Delta T)}{p_e} \tag{68}$$

$$V=\frac{(G_3-G)\,R\,T}{p_e} \tag{69}$$

$$G-\Delta G=\frac{(p-\Delta p)\,V_3}{R\,T_c''} \tag{70}$$

$$G=\frac{p\,V_3}{R\,T_c'} \tag{71}$$

$$G_3=\frac{p_3\,V_3}{R\,T_3} \tag{72}$$

$$\frac{T_c''}{T_c'}=\left(\frac{p-\Delta p}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{73}$$

$$\frac{T_c'}{T_3}=\left(\frac{p}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{74}$$

Ținînd seama de relațiile (68) ... (74) expresia (67) devine:

$$\left\{1-\left[1+\left(\frac{p_3}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\frac{\Delta T}{T}-\left(1-\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}T=\frac{1}{k}T_3\left(\frac{p}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}}\frac{\Delta p}{p} \tag{75}$$

Se dezvoltă în serie termenul:

$$\left(1-\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{1}{k}}=1-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta p}{p}+\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2+\cdots \tag{76}$$

și se neglijează infiniții mici de ordin superior.

După înlocuirea relației (76) în expresia (75) și trecerea la limită se obține următoarea ecuație diferențială liniară și neomogenă:

$$\frac{dT}{dp}+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{\frac{k-1}{k}}\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)}T=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p_3^{\frac{k-1}{k}}\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)}T_3 \tag{77}$$

Dacă se notează cu:

$$F_1(p)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{\frac{k-1}{k}}\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)} \tag{78}$$

$$F_2(p)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p_3^{\frac{k-1}{k}}\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)}T_3 \tag{79}$$

atunci soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$T=e^{-\int F_1(p)\,dp}\left[\int F_2(p)\,e^{\int F_1(p)\,dp}\,dp+C\right] \tag{80}$$

Se observă că:

$$\int F_1(p)\,dp=\int\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{p^{\frac{k-1}{k}}\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)}dp=\int\frac{d\left(p^{\frac{1}{k}}\right)}{p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}}= \tag{81}$$

$$=\ln\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)$$

iar

$$e^{\int F_1(p)\,dp}=e^{\ln\left(p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}}\right)}=p^{\frac{1}{k}}-p_3^{\frac{1}{k}} \tag{82}$$

și

$$\int F_2(p)\cdot e^{\int F_1(p)\,dp}\,dp=\int\frac{1}{k}\cdot\frac{T_3}{p_3^{\frac{k-1}{k}}}dp=\frac{1}{k}\cdot\frac{T_3}{p_3^{\frac{k-1}{k}}}p \tag{83}$$

Ținînd seama de observațiile (81) ... (83) temperatura gazului evacuat la un moment oarecare este dată de expresia :

$$T = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{T_3}{p_3^{\frac{k-1}{k}}} p + C}{p^{\frac{1}{k}} - p_3^{\frac{1}{k}}} \tag{85}$$

După determinarea constantei de integrare C pe baza condițiilor inițiale rezultă :

$$T = T_3 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{p}{p_3}}{1 - \left(\frac{p}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{85}$$

Pentru deteminarea temperaturii gazului din conducta de evacuare la finele etapei de evacuare la volum constant (fig. 8, b) se impune condiția $p = p_e$ și rezultă :

$$T'_e = T_3 \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{p_e}{p_3}}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{86}$$

Se observă de asemenea că expresia (86) este identică cu expresiile (61, a și b) obținute prin particularizarea expresiei generale (60).

2.2.2. *Evacuarea la presiune constantă*

Cele două momente oarecare ale etapei de evacuare la presiune constantă sînt arătate în figura 10.

În momentul inițial (fig. 10, a) cantitatea de gaz G din cilindru ocupă volumul V la temperatura T_4 și presiunea p_e iar cea din conducta de evacuare $G_3 - G$ se află la temperatura T și aceeași presiune ocupînd volumul V'.

Datorită deplasării pistonului spre p.m.i., volumul ocupat de gaz scade cu ΔV (fig. 10, b) presiunea și temperatura rămînînd constante. Cantitatea de gaz ΔG evacuată din cilindru determină mărirea volumului gazului din conducta de evacuare pînă la valoarea V''. Prin amestecarea cantităților de gaze $G_3 - G$ și ΔG temperatura în conducta de evacuare scade cu ΔT la aceeași presiune p_e.

Aplicînd ecuația (39) se obține următoarea ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{dT}{T-T_4}=\frac{dG}{G_3-G} \tag{87}$$

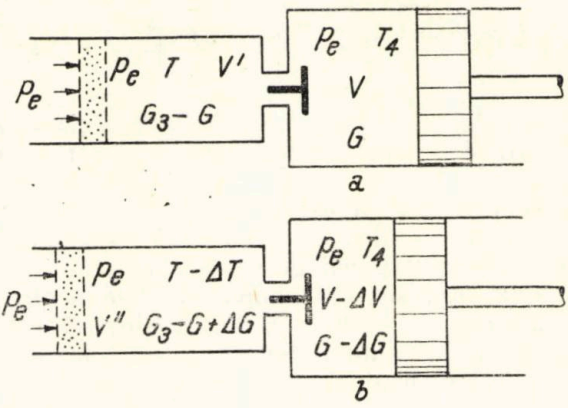


Fig. 10

Pentru înlocuirea variabilei G se aplică în mod convenabil ecuația de stare ceea ce permite stabilirea următoarelor relații:

$$\frac{dG}{G}=\frac{dV}{V} \tag{88}$$

$$\frac{G_3}{G}=\frac{p_3}{p_e}\cdot\frac{T_4}{T_3}\cdot\frac{V_4}{V} \tag{89}$$

Ținînd seama de relațiile (88), (89) și (57) ecuația (87) devine:

$$\frac{dT}{T-T_4}=\frac{dV}{V_4\left(\frac{T_3}{p_e}\right)^{\frac{1}{k}}-V} \tag{90}$$

După integrarea ecuației diferențiale (90) și determinarea constantei de integrare prin condițiile inițiale rezultă:

$$T=\frac{\left(1-\frac{V}{V_4}\right)\left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}T_4+\left[1-\left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}\right]T'_e}{1-\frac{V}{V_4}\left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{91}$$

Pentru stabilirea relației de legătură între temperaturile T_e și T'_e se pune condiția $V = V_5$ observîndu-se că $V_5/V_4 = \delta_c/1 + a_v$; rezultă :

$$T_e = \frac{\left(1 - \frac{\delta_c}{1 + a_v}\right)\left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}} T_4 + \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}\right] T'_e}{1 - \frac{\delta_c}{1 + a_v}\left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}}} \tag{92}$$

Dacă în expresia lui T_e se procedează la înlocuirea temperaturii T'_e dată de expresia (86) și se ține seama de relația (57) se obține expresia generală (60).

În concluzie se constată că expresiile (29) și (60) stabilite pentru temperatura la finele procesului de umplere și temperatura gazului din conducta de evacuare sînt expresii generale care permit, prin particularizare, stabilirea unor expresii mai simple valabile pentru cazurile cînd umplerea sau evacuarea se realizează într-o singură etapă : la volum constant sau la presiune constantă. Se constată că aceste expresii generalizează formulele de calcul ale acestor temperaturi, publicate în literatura tehnică de specializare și pot fi folosite, în limita aproximației oferite de ipotezele de calcul, în analiza termodinamică a proceselor care au loc în diferitele tipuri de detentoare cu piston.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Gridin V. B.:* Priamotocinii porșnevoi detander s obratnîm sjatiem. Kislorod, N. 3, 1959, pag. 16—25.
2. *Doll R., Eder F. X.:* Neuartige expansionsmachine zur erzeugung tiefer temperaturen. Kältetechnik, N. 1, 1964, pag. 5—11.
3. *Gifford W. E., Mc. Mahon H. O.:* Advances in Cryogenic Engineering, V. 5, 1960, pag. 354—356.
4. *Bosnacovici F:* Tehniceskaia termodinamica, partea I, 1955, pag. 109—112.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

ELECTRONICĂ

C.Z. : 621.391

SINTEZA UNEI CLASE DE AUTOMATE CARE MODELEAZĂ OPERATORI ÎN LOGICI n-VALENȚE SAU FUNCȚII DE TIMP DATE

EDMOND NICOLAU

După cum s-a arătat [1], [2], neuronul este un dispozitiv informațional de tip social. Schematic neuronul poate fi reprezentat ca în figura 1. În figura 1 *a* s-a reprezentat un neuron la care s-a pus în evidență o sinapsă excitatorie — figurată printr-o săgeată — la care se aplică semnalul x — și o sinapsă inhibitorie — figurată printr-un cerc — la care se aplică semnalul y; semnalul de ieșire este z.

După cum se arată în figura 1 *b*, la un neuron pot sosi mai multe sinapse, unele excitatorii și altele ihibitorii ; se poate atașa o pondere fiecărei sinapse.

Aproximativ, funcționarea neuronului poate fi redată numai prin următorii parametrii : pragul p; intensitatea maximă L a semnalului de la ieșire ; timpul de latență η (fig. 1 *c*). Într-o ipoteză liniară, se definește și panta k a caracteristicii răspuns r — semnul de intrare s.

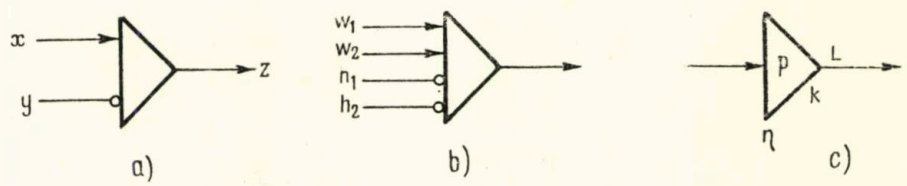


Fig. 1

În ceea ce privește semnalul de intrare, el este

$$s = \sum (w_i x_i - h_j y_y) \qquad (i \in I \quad j \in J) \tag{1}$$

I fiind mulțimea indicilor sinapselor excitatorii, J mulțimea indicilor sinapselor inhibitorii, w și h — ponderi.

Neuronul poate fi considerat liniar sau cuantizat, prezentînd fie caracteristica din figura 2, fie caracteristica din figura 3 *a*. Pentru a pune în evidență faptul că un neuron este cuantizat, se notează deasupra simbolului acelui neuron, NC (fig. 3 *b*).

*) Manuscris prezentat la redacție la 29.XII.1964.

În aproximația liniară se poate scrie

$$y = \begin{cases} 0 & s < p \\ k(s-p) & p < s < P \\ L & P < s \end{cases} \tag{2}$$

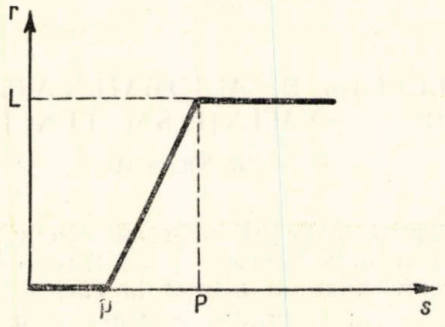


Fig. 2

Subzistă relația

$$k = L(P-p) \tag{3}$$

S-a scris $)r($ pentru a pune în evidență întîrzierea răspunsului r în raport cu excitația:

$$)r(t)(= r(t+\eta) \tag{4}$$

unde η poate fi interpretată ca întîrzierea sinaptică.

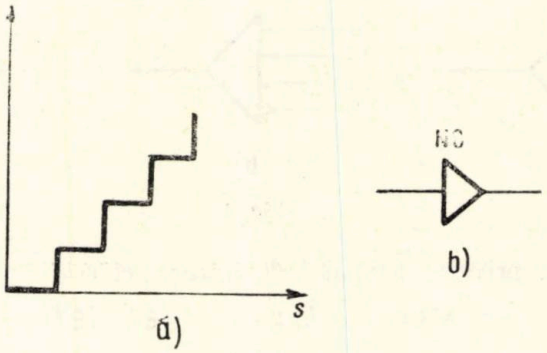


Fig. 3

Modelul neuronal al lui McCulloch și Pitts corespunde unei simplificări a modelului nostru, în sensul că L are aceeași valoare (notată convențional 1) la toți neuronii, iar $k = \infty$ astfel încît

$$)r(= \begin{cases} 0 & p > s \\ 1 & s \geqslant p \end{cases} \tag{5}$$

Dacă la un astfel de neuron se notează răspunsul cu z, atunci z există numai atunci cînd se aplică un stimul excitator x, și în același timp nu există un stimul inhibitor y:

$$)z(=x \,\&\, \neg\, y) \tag{5}$$

sau, utilizînd implicația:

$$)x(=\neg\,(x \to y) \tag{7}$$

Dar acest model de neuroni nu corespunde realității fiziologice.

Rămînînd în cadrul fenomenelor discontinui, putem avea o mai mare apropiere de fenomenele reale, considerînd că răspunsul neuronului este cuantizat:

$$)r(=\begin{cases} 0 & p>s \\ k\left[n\dfrac{s-p}{P\quad p}+1\right] & P>s>p \\ L & s>P \end{cases} \tag{8}$$

unde $[u]$ este partea întreagă a lui u, adică cel mai mare între mai mic sau egal cu u.

În cele ce urmează prin *neuron cuantizat* (prescurtat NC) se înțelege un element la care relația dintre răspunsul r și semnalul de intrare s este redată de (8). Fiecare neuron este caracterizat prin mărimile p, P, L (sau K), η.

Ne propunem a arăta că orice operator într-o logică n-valentă, în care funcțiile sînt date prin tabele de adevăr, poate fi sintetizată utilizînd numai elemente NC.

Pentru început să considerăm o funcție de o variabilă:

$$y=(n,\,1,\,i)\,x$$

unde $(n,\,1,\,i)$ este operatorul numărului i, din mulțimea operatorilor de o variabilă, din cadrul logicii n-valente. Operatorul $(n,\,1,\,i)$ e dat prin o tabelă de adevăr

x	0	1	$n-1$
y	α_0	α_1	α_{n-1}

unde cele n valori pe care le poate lua variabila x sînt notate convențional $0,\,1,\ldots n-1$ și formează mulțimea V_n:

$$V_n=\{0,\,1,\cdots\cdots,\,n-1\}.$$

Evident,

$$\alpha_i \in V_n.$$

Se consideră că variabila x este modelată prin intensitatea semnalului de intrare într-o rețea. Se poate imagina o rețea ca cea din figura 4 *a* care traduce intensitatea semnalului de la intrare în numărul ieșirilor excitate: este un traductor de tip intensitate/număr, mai scurt I/N (fig. 4 *b*). Se pot însă imagina și rețele neuronale care traduc intensitatea stimulului de intrare în *poziția* spațială a unui neuron excitat:

este așa numitul traductor intensitate/poziție, a cărui schemă se dă în figura 5 *a*. În esență este vorba de un număr de neuroni avînd praguri diferite și excitați în paralel, de către același semnal. La semnale slabe, nici unul din neuroni nu produce semnal la ieșire.

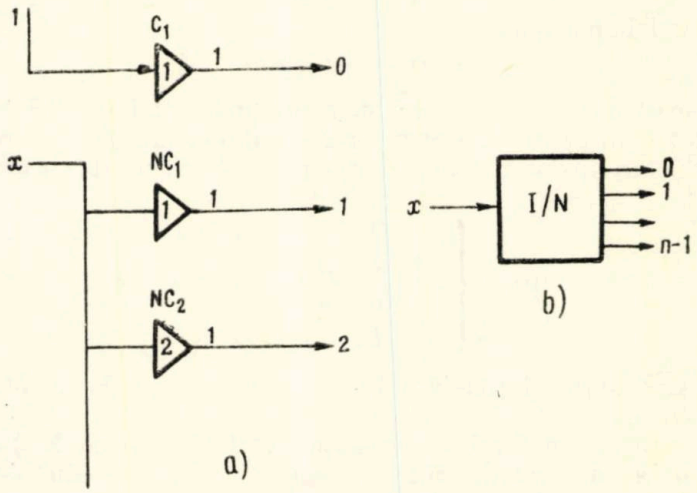


Fig. 4

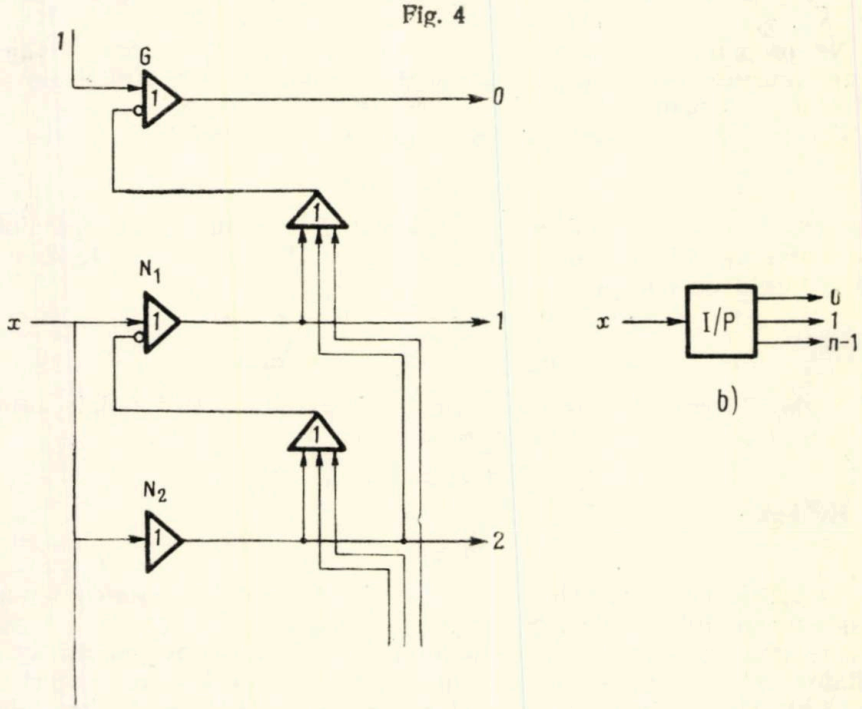


Fig. 5

Pentru a semnala existența unui semnal 0 la intrare, se poate prevedea un neuron suplimentar G care generează în permanență : G poate fi imaginat ca făcînd parte dintr-o rețea care generează spontan impulsuri, atîta timp cît nu e inhibată.

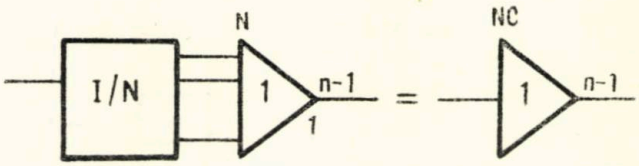


Fig. 6

În momentul în care se depășește valoarea 1, se depășește pragul neuronului N_1, care produce semnal la ieșire. În același timp, acest semnal inhibă pe G, astfel încît apare semnal numai la ieșirea notată 1.

Procesul se repetă identic pentru fiecare valoare logică, un neuron fiind excitat, iar ceilalți n — 1 fiind în repaus sau inhibați. Dintre aceștia unii nu produc semnal la ieșire, deoarece semnalul de la intrare nu este suficient pentru a depăși pragul : sînt neuronii în repaus. La alții pragul este depășit, dar ei sînt inhibați de semnalele ce vin de la alți neuroni cu praguri mai mari, și care, de asemenea, sînt excitați. Evident, pantele sînt alese convenabil.

În figura 6 se arată o schemă care este formată cu neuroni liniari și are o ieșire cuantizată.

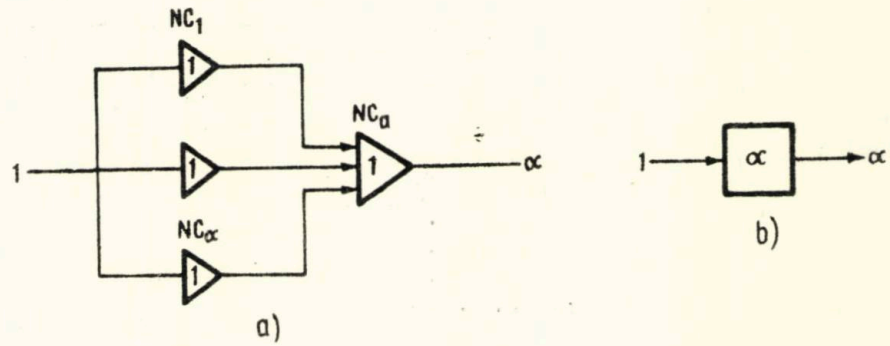


Fig. 7

Revenind la problema inițială, să considerăm un traductor I/P, căruia la intrare i se aplică un semnal cuantizat. Se obține o traducere a valorii logice într-o poziție spațială : o valoare logică a variabilii de la intrare, corespunde unei singure ieșiri excitate, la care se obține un semnal de o valoare standard, să presupunem 1.

Pentru a face ca valorii v_i de intrare să-i corespundă valoarea α_i la ieșirea i — singura excitată în cazul aplicării semnalului de intrare — se conectează la borna de ieșire i un transformator funcțional care schimbă pe 1 în α_i (fig. 7).

Există posibilitatea utilizării unei scheme în care semnalul de intrare declanșează α_i neuroni identici, de prag 1 : semnalele lor — admise egale tot cu 1 — sînt apoi însumate de un neuron ce produce la ieșire un semnal de intensitate α_i. Dar există și alte posibilități.

Reprezentînd simbolic un astfel de transformator ca în figura 7 *b*, schema unui model al operatorului $(n, 1, i)$ poate fi redată prin schema din figura 8.

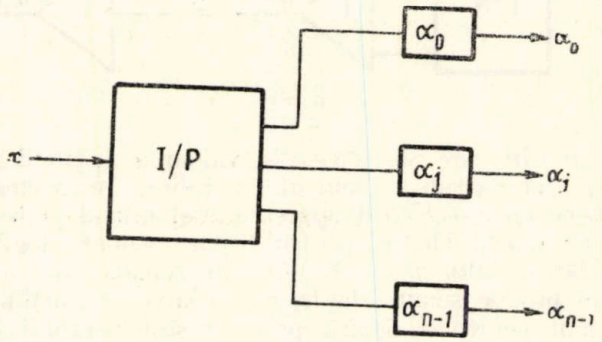


Fig. 8

Pentru funcțiile de mai multe variabile, se recurge la ceea ce se poate numi o schemă canonică conjunctivă. Anume se modelează separat fiecare linie a tabelului de adevăr.

Fie astfel funcția :

$$z = (n, 2, k)\,(x, y)$$

unde operatorul $(n, 2, k)$ este operatorul numărului k din mulțimea operatorilor de două variabile, în cadrul unei logici n-valente. Fie tabela de adevăr :

$x \backslash y$	v_j
	.
	.
	.
v_i	$\cdots\ \alpha_{ij}$

Se consideră mai întîi variabila x și un traductor $(I/P)_x$ cu o intrare și n ieșiri : fiecare din ele corespunde unei linii a tabelei de adevăr.

În mod analog există un traductor $(I/P)_y$. Pentru o pereche de valori (v_i, v_j) a celor două variabile, trebuie să obținem la ieșire intensitatea α_{ij}.

În acest scop se consideră toate perechile de ieșiri din $(I/P)_x$ și $(I/P)_y$ și se stabilește cîte o legătură de la aceste ieșiri la un neuron cu pragul 2 : el nu este declanșat decît dacă semnalele (x, y) au valorile (v_i, v_j). În acest caz, de la ieșirea din acest neuron de coincidență se

trece la un transformator $1/\alpha_{ij}$ așa cum s-a arătat în cazul precedent (fig. 9).

În cazul general al unei funcții de m variabile, se trece la operatorul (n, m, k) :

$$u = (n, m, k)\,(x_1, x_2, \cdots x_m).$$

Metoda este cea preconizată : cele m semnale corespunzînd celor m variabile independente se aplică la m traductoare I/P ; se ajunge la

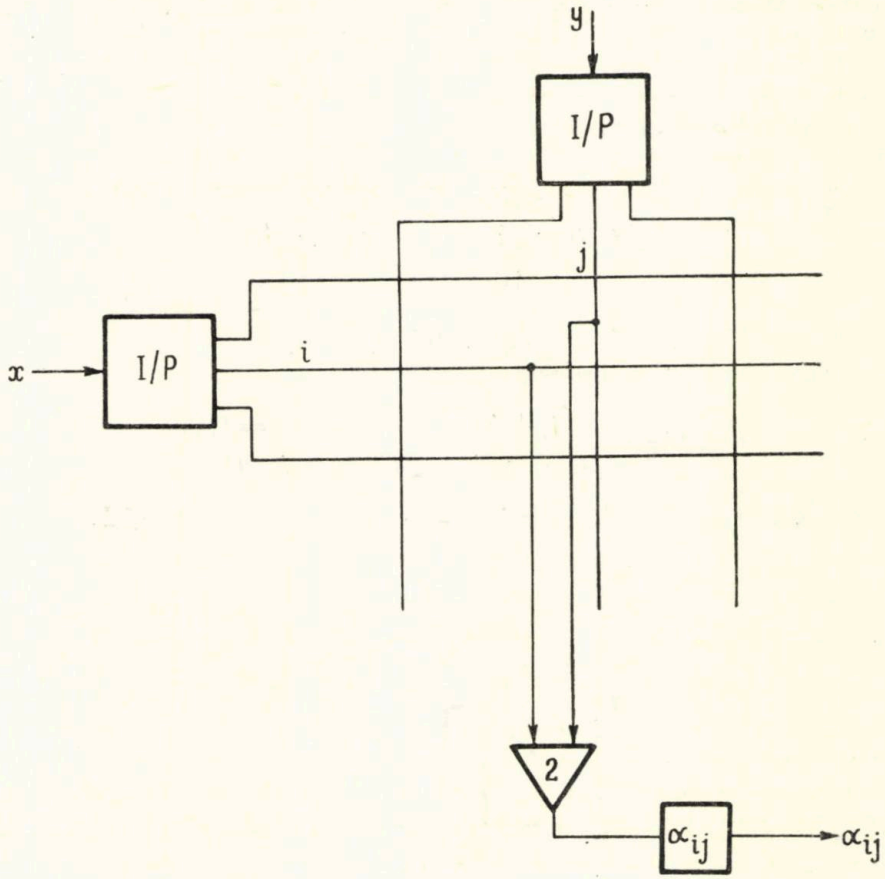


Fig. 9

situația în care pentru o combinație de valori date variabilelor de la intrare, m din cele $m \times n$ ieșiri ale traductoarelor prezintă semnal (cîte un semnal la ieșirea fiecărui traductor). Fiecare grup de m ieșiri din traductoare, merg la cîte un neuron de coincidență, cu prag m. În total e nevoie de n^m astfel de neuroni de coincidență. Fiecare din acești neuroni este urmat de un transformator ce transformă pe 1 în $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_m}$.

Cu aceasta problema este rezolvată.

Mai e necesar de precizat un detaliu referitor la timp : fiecare element lucrează cu o întîrziere sinaptică. Semnalul de ieșire va fi în general întîrzit față de semnalul de la intrare, datorită traductorului I/P, circuitului de coincidență și traductorului. Deci în total cu 4η (traductorul introduce o întîrziere 2η).

Dacă unele circuite corespunzînd unor operatori au o întîrziere mai mică, ea poate fi prelungită totdeauna pînă la 4η, prin adăugarea unor neuroni — transformatori 1/1.

A doua categorie de probleme ce se pun în legătură cu automatele neuronale este cea a sintezei rețelelor care produc la ieșire un semnal ce variază în timp după o lege dată, la intrare aplicîndu-se un singur impuls care declanșează procesul.

Semnalul aplicat la intrare este

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t_0 < t < t_0 + d \\ 0 & t_0 + d < t \end{cases} \tag{9}$$

unde d este durata aplicării impulsului.

Semnalul de la ieșire este

$$s_0(t) = \begin{cases} 0 & t_0 + b < t < t_0 + c + i = t_0 + a \\ f(t) & t_0 + a < t < t_0 + b \quad (b > a) \end{cases} \tag{10}$$

unde g este constanta de întîrziere a rețelei iar max. $f(t) \leqslant L$.

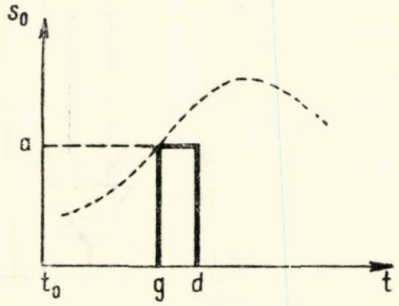


Fig. 10

Sinteza unui astfel de circuit este reductibilă la cazul mai simplu, (fig. 10) în care

$$s_0(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 + g \\ a & t_0 + g < t < t_0 + d \\ 0 & t_0 + d < t \end{cases} \tag{11}$$

Producerea semnalelor dreptunghiulare necesare se poate face utilizînd rețele neuronale de tip ON, care produc un semnal la ieșire numai pentru perioada început a aplicării semnalului de intrare (fig. 11). Schema operatorului ce corespunde ecuației (10) se dă în figura 12.

Pentru a produce la ieșire funcția de timp dorită, între momentele t' și t'', la intrarea rețelei din figura 12 se aplică semnalul de la ieșirea

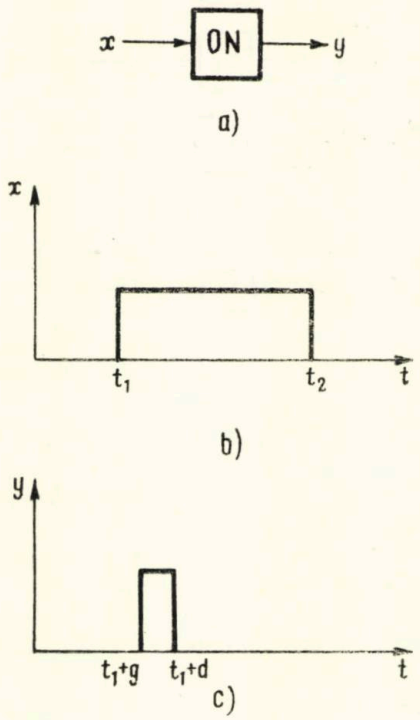


Fig. 11

rețelei din figura 13. Acestei rețele cu memorie, i se aplică un stimul excitator în momentul t' și unul inhibitor în momentul t''.

Fie η întîrzierea sinatpică. Intervalul $[a, b]$ în care trebuie realizată funcția $f(t)$, se împarte în domenii

$$[a,\ a+n\eta] \qquad (n=0,1,\cdots N).$$

În fiecare din aceste intervale se aproximează $f(t)$ prin $f(t_n)$ unde

$$t_n = a+n\eta$$

În fiecare interval neuronul trebuie să primească un impuls de comandă, cu o întîrziere corespunzătoare, ceea ce se poate realiza simplu, dispunînd în paralel lanțuri de n neuroni ($n = 1, 2, \ldots N$). Pe fiecare lanț se dispune un neuron final care asigură intensitatea dorită. Toate cele N lanțuri converg pe un neuron de ieșire.

Rețeaua descrisă are avantajul că este simplă, dar necesită un număr mare de neuroni. Totodată ea asigură un program fix.

Menționăm, de asemenea, posibilitatea realizării unor automate cu memorie, plecînd tot de la neuronii cuantizați. Posibilitățile de memorare

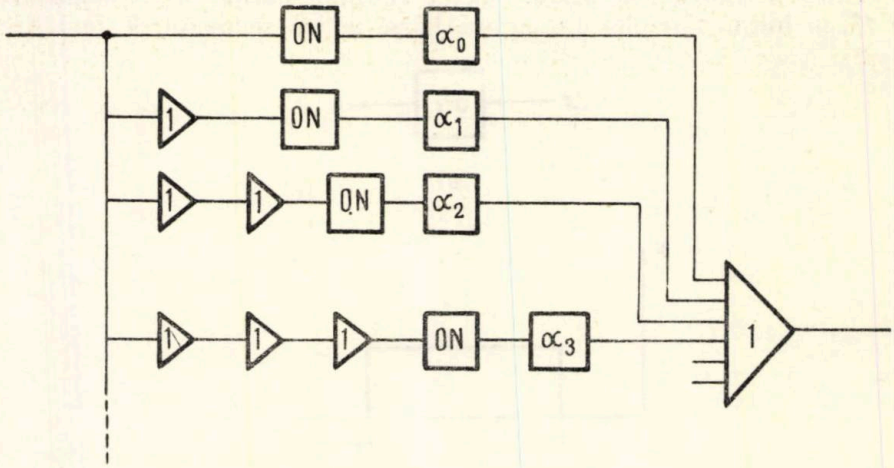


Fig. 12

sînt multiple: se pot realiza atît rețele cu memorie circulantă, cît și neuronii cu ajutorul unor neuroni la care sub influența stimulilor exteriori variază pragul sau amplitudinea semnalului de la ieșire. Dar aceste chestiuni nu intră, în cadrul prezentei comunicări.

În concluzie, cu ajutorul neuronilor cuantificați se pot modela operatorii unei logici n-valente, se pot realiza generatori care produc o mărime

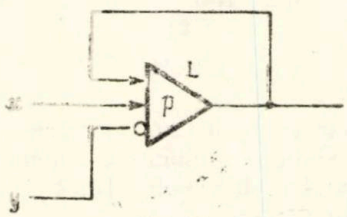


Fig. 13

variind în timp după o lege dată și se pot realiza, de asemenea, circuite de memorie.

Deci, cu ajutorul neuronilor cuantificați se poate realiza orice automat finit a cărui funcționare poate fi dată prin tabele de adevăr (mașina Turing, circuite secvenționale, calculatoare digitale, calculatoare hibride etc.). Problemele expuse în prezenta lucrare au fost discutate cu Dr. C. Bălăceanu.

Catedra de radiocomunicații
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Cibernetica, Editura științifică, București, 1961, pag. 85.
2. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Contribuții la cibernetica neuronului, Automatica și electronica 6 (1962),, 6, p. 251—257.
3. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* La Cybernétique du neurone, Eléctronique médicale, 1964, nr. 28, p. 43—48.
4. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Neuronul ca element analogic, Probleme de automatizare V, Editura Academiei Republicii Populare Române, p. 127—141.
5. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Schema logico-matematică a neuronului, Neurologia, psihiatria și neurochirurgia, 7 (1962), 6, p. 517—526.
6. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Contribuții la studiul rețelelor instruibile, Automatica și electronica, 7 (1963), 3, p. 100—106.
7. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Contribuții la cibernetica vederii, Oftalmologia, VIII (1964), 2, p. 179—190.
8. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Cibernetica neuronului, Comunicare prezentată la cel de-al IV-lea Congres Internațional de Cibernetică, Namure, 1964.
9. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Rețele neuronale, Comunicare prezentată la cel de-al IV-lea Congres Internațional de Cibernetică, Namure, 1964.
10. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Contribuții la studiul transmiterii informației prin sinapsă, Neurologia, psihiatria, neurochirurgia, VIII, (1963), 6, p. 531—540.
11. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Modele de rețele neuronale. Comunicare prezentată la Simpozionul de modelare, organizat de USSM, Secția de patologie comparată, Brașov, octombrie 1964.
12. *Edm. Nicolau, C. Bălăceanu:* Neurocibernetica, Editura științifică, București (în curs de apariție).
13. *C. Bălăceanu, Edm. Nicolau:* Cibernetica motilității. Comunicare prezentată la USSM, Secția de neurologie, 1965.
14. *Edm. Nicolau:* Introducere în cibernetică, Editura tehnică, București, 1964.
15. *Edm. Nicolau:* Analogie, model, similitudine, Materialismul dialectic și științele contemporane ale naturii, vol. IV, Editura politică, București, 1964, p. 95.
16. *Edm. Nicolau:* Modelarea activității logice, Materialismul dialectic și științele naturii, vol. X, Editura politică, București, 1965, p. 66.
17. *Edm. Nicolau:* Cibernetica și automatica intelectuală. Problema de automatizare I, Editura Academiei Republicii Populare Române, p. 107—113.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

C.Z. 621.38

STUDIUL OSCILAȚIILOR LIBERE ÎN CIRCUITUL LC CU CAPACITATEA NELINIARĂ A JONCȚIUNII p-n CU AJUTORUL PLANULUI FAZELOR *

MIRCEA PETRESCU

După cum este știut, valoarea capacității neliniare a barierei joncțiunii *p-n* aliate depinde invers proporțional de rădăcina pătrată a tensiunii de polarizare inversă [1]. Această proprietate remarcabilă a condus la utilizarea frecventă a capacității barierei joncțiunii *p-n* pentru obținerea oscilațiilor modulate în frecvență. În legătură cu această aplicație a apărut necesitatea studiului oscilațiilor libere în circuitul *LC* care conține o astfel de capacitate neliniară. O primă încercare de a rezolva această problemă s-a făcut în [2].

Din punct de vedere al teoriei oscilațiilor este de mare importanță determinarea condițiilor inițiale (respectiv a amplitudinii oscilațiilor) pentru care în circuitul neliniar amintit pot apărea oscilații libere. Această chestiune poate fi abordată în modul cel mai comod cu ajutorul planului fazelor [3]. Pentru simplitate în lucrarea de față s-a presupus că atît inductanța cît și capacitatea neliniară sînt fără pierderi, cu alte cuvinte circuitul examinat este conservativ.

Se poate arăta [4] că oscilațiile libere într-un circuit *LC* fără pierderi care conține capacitatea neliniară a unei joncțiuni *p-n* aliate polarizată în sens invers conducției (fig. 1) sînt descrise de următoarea ecuație diferențială :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{LC_0} \cdot \frac{1}{C_0(E_c + U_0)} \cdot q^2 + \frac{1}{LC_0} \cdot q = \frac{E_c}{L}, \qquad (1)$$

* Manuscris prezentat la redacție la 5 ianuarie 1965.

unde : q este sarcina electrică acumulată în capacitatea joncțiunii.
E_c — tensiunea de polarizare aplicată joncțiunii,
U_0 — diferența de potențial de contact pentru joncțiunea considerată ;
C_0 — capacitatea joncțiunii în punctul de funcționare determinat de polarizare E_c,
L — inductanța circuitului.

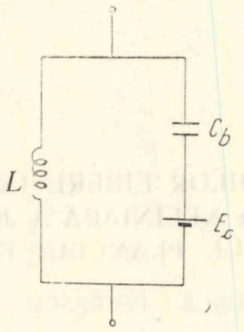


Fig. 1

Analiza oscilațiilor libere în circuitul din fig. 1 se poate face mai comod dacă ecuația (1) conține numai mărimi normate. În acest scop se introduc notațiile :

$$y = \frac{q}{C_0 (E_c + U_0)},$$

$$A_2 = \frac{E_c}{E_c + U_0}, \tag{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0},$$

$$\tau = \omega_0 t.$$

Cu noile notații ecuația diferențială a circuitului analizat devine :

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \cdot y^2 + y = A_2. \tag{3}$$

Determinarea condițiilor inițiale pentru care în circuit pot exista oscilații libere este recomandabil să se facă cu ajutorul planului fazelor. Întrucît ne interesează numai o soluție periodică, va fi suficient să găsim condițiile în care traiectoriile de fază ale ecuației (3) vor fi curbe închise.

Derivata a doua a sarcinii normate y poate fi exprimată conform relației :

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2. \tag{4}$$

Atunci ecuația (3) ia forma:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}y^2+y=A_2\,, \tag{5}$$

sau

$$d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2=(-y^2-2y+2A_2)\,dy\,. \tag{6}$$

După integrarea ecuației (6) se obține:

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2=-\frac{1}{3}y^3-y^2+2A_2y+A\,, \tag{7}$$

unde A este o constantă de integrare determinată de condițiile inițiale.

Prin urmare, traiectoriile de fază corespunzătoare ecuației (3) vor fi determinate de expresia:

$$\frac{dy}{d\tau}=\pm\sqrt{f(y)} \tag{8}$$

unde

$$f(y)=-\frac{1}{3}y^3-y^2+2A_2y+A\,. \tag{9}$$

Ramura pozitivă și ramura negativă ale funcțiunii $\sqrt{f(y)}$ vor forma împreună o curbă închisă numai în cazul în care polinomul de gradul 3 $f(y)$ va avea trei rădăcini reale. Pentru aceasta este necesar ca discriminatul D al ecuației $f(y)=0$ să îndeplinească condiția:

$$D\leqslant 0\,. \tag{10}$$

Discriminantul D este dat de relația:

$$D=m^2+n^3\,, \tag{11}$$

unde

$$\begin{aligned} m^2&=1+6A_2+9A_2^2-9A_2A-3A+\frac{9}{4}A^2\,,\\ n^3&=-(1+2A_2)^3\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Introducînd (12) în (11) expresia lui D devine

$$D=\frac{9}{4}A^2-3(1+3A_2)A-(3+8A_2)A_2^2\,. \tag{13}$$

Condiția (10) va fi îndeplinită dacă mărimea A va fi cuprinsă între valorile A_i și A_s, care sînt rădăcinile ecuației $D=0$:

$$\begin{aligned} A_i&=\frac{2}{3}\left[(1+3A_2)-(1+2A_2)^{\frac{3}{2}}\right],\\ A_s&=\frac{2}{3}\left[(1+3A_2)+(1+2A_2)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Pentru $A = A_i$ sau $A = A_s$, $D = 0$ și două din cele trei rădăcini reale ale ecuației $f(y) = 0$ se confundă.

Prin urmare, traiectoriile de fază ale ecuației (3) vor fi curbe închise dacă constanta de integrare A va satisface inegalitățile:

$$\frac{2}{3}\left[(1+3A_2)-(1+2A_2)^{\frac{3}{2}}\right] \leqslant A \leqslant \left[(1+3A_2)+(1+2A_2)^{\frac{3}{2}}\right]. \quad (15)$$

Pentru a construi traiectoriile de fază ale ecuației (3) este necesar să găsim pozițiile limită ale curbei $f(y)$, corespunzătoare relațiilor (15). În acest scop vom calcula rădăcinile ecuației $f(y) = 0$ pentru $A = A_i$ și $A = A_s$. Ținînd seamă de faptul că pentru $A = A_i$ și $A = A_s$ discriminantul D este nul, se obțin ușor următoarele valori ale rădăcinilor:

pentru $A = A_i$:

$$\begin{aligned} y_{i1} &= -1+2\sqrt{1+2A_2}, \\ y_{i2} &= y_{i3} = -1-\sqrt{1+2A_2}; \end{aligned} \quad (16)$$

pentru $A = A_s$:

$$\begin{aligned} y_{s1} &= -1-2\sqrt{1+2A_2}, \\ y_{s2} &= y_{s3} = -1+\sqrt{1+2A_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

În fig. 2 este reprezentată funcțiunea $f(y)$ în cazul $A_2 = 0{,}7525$ pentru cele două valori limită ale constantei de integrare A: $A = A_s = 4{,}8$ și $A = A_i = -0{,}47$. Mărimile A_2, A_s și A_i au fost calculate în

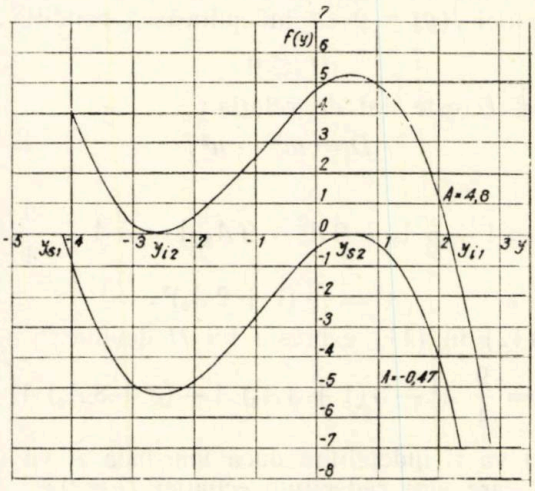


Fig. 2

ipoteza utilizării capacității neliniare a unei diode din siliciu de tip D—808, pentru $U_0 = 0{,}658$ V. În același timp am presupus că tensiunea de polarizare aplicată joncțiunii este $E_c = 2$ V, valoare des întîlnită în practica folosirii acestor diode în calitate de capacități comandabile.

Este clar că pentru $A > 4{,}8$ ecuației (8) nu îi vor corespunde traiectorii de fază închise și prin urmare în acest caz nu sînt posibile oscilații stabile. Pe de altă parte, dacă $A < 0{,}47$ expresia (8) are sens numai pentru valorile lui y mai mici decît unica rădăcină reală a ecuației $f(y) = 0$, așa dar traiectoriile de fază nu vor fi închise nici în acest caz și oscilațiile vor fi deasemenea instabile.

In acest fel, pentru $A_2 = 0{,}7525$ în circuitul analizat pot exista oscilații libere stabile numai dacă sînt îndeplinite condițiile:

$$-0{,}47 \leqslant A \leqslant 4{,}8 \tag{18}$$

Traiectoriile de fază în acest caz particular sînt reprezentate în fig. 3 pentru cîteva valori arbitrar alese ale parametrului A. Din examinarea tabloului traiectoriilor de fază rezultă că oscilațiile libere în circuitul LC conservativ cu capacitatea neliniară a joncțiunii $p—n$ sînt departe de forma armonică, în special la amplitudini de oscilație mari. Aceasta era de așteptat, deoarece influența neliniarității joncțiunii $p—n$ este cu atît mai puternică, cu cît este mai mare amplitudinea oscilațiilor.

Să determinăm condițiile inițiale care corespund inegalităților (15). Conform fig. 1 în momentul inițial (adică în momentul conectării capacității încărcate a joncțiunii $p—n$ cu inductanța L) curentul prin capacitate este nul:

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)_0 = 0. \tag{19}$$

Ținînd seamă de relația (19) devine clar că, pentru o valoare determinată a parametrului A, ecuația $f(y) = 0$ va da trei valori posibile ale mărimii y în momentul inițial. Evident că pentru A corespunzător condițiilor (15), numai două din aceste trei valori posibile se vor găsi pe o traiectorie de fază închisă și anume acelea care sînt cuprinse între rădăcinile y_{i1} și y_{i2} (fig. 2).

Prin urmare, în circuitul oscilant conservativ cu capacitatea neliniară a joncțiunii $p—n$ pot exista oscilații libere stabile numai pentru acele valori inițiale ale sarcinii electrice normate care satisfac condițiile:

$$-1 - \sqrt{1 + 2A_2} \leqslant y_0 \leqslant -1 + 2\sqrt{1 + 2A_2}. \tag{20}$$

Pentru valorile lui y_0 cuprinse între aceste limite, traiectoriile de fază în planul $\frac{dy}{d\tau}$, y vor fi curbe închise (fig. 3).

Se poate arăta că inegalitățile (20) pot fi înlocuite cu alte condiții, mai restictive din punctul de vedere al valorilor posibile ale lui y_0. Pentru aceasta este suficient să observăm că în planul $\frac{dy}{d\tau}$, y punctul $y_{s2} = -1 + \sqrt{1 + 2A_2}$ este centru stabil al traiectoriilor de fază. Așadar, pentru valorile inițiale ale lui y ne putem limita la condițiile:

$$-1 + \sqrt{1 + 2A_2} \leqslant y_0 \leqslant -1 + 2\sqrt{1 + 2A_2}. \tag{21}$$

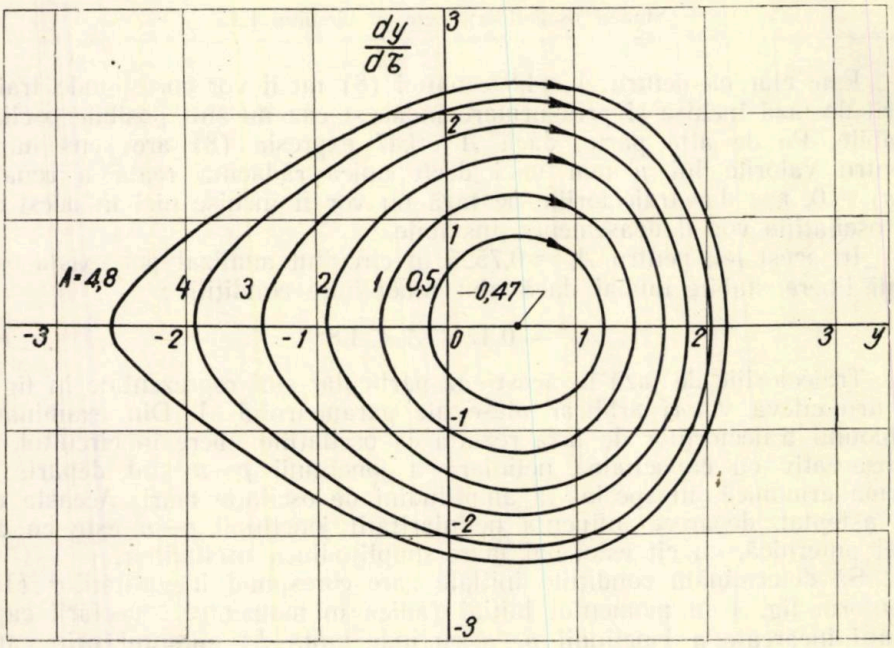

dy/dz
A=4,8
4
3
2
1
0,5
-0,47
-3
-2
-1
0
1
2
3
y

Fig. 3

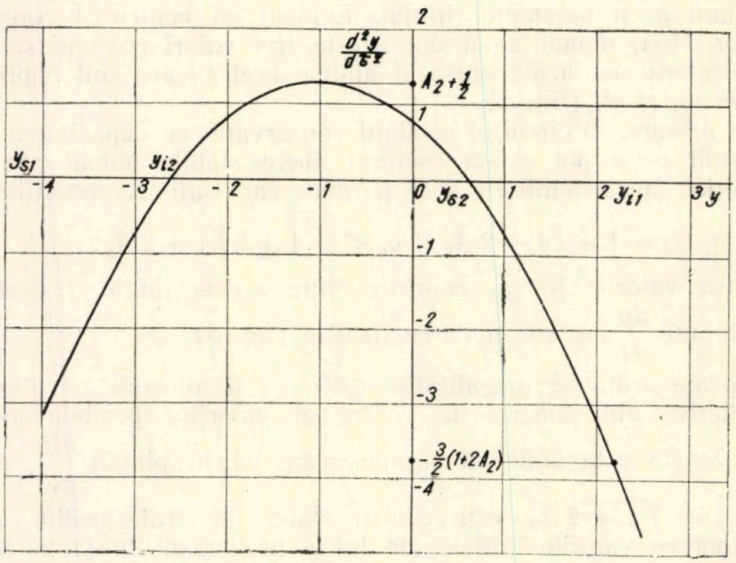

d²y/dz²
A2+1/2
-3/2(1+2A2)
yS1
yi2
yS2
yi1
y

Fig. 4

În acest caz punctele reprezentative vor descrie în planul $\frac{dy}{d\tau}$, y aceleași traiectorii de fază care corespund îndeplinirii relațiilor (20).

Acum pot fi ușor determinate valorile inițiale corespunzătoare ale tensiunii normate la bornele inductanței circuitului oscilant $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)$. Pentru aceasta este necesar să fie considerată legătura dintre mărimile $\frac{d^2y}{d\tau^2}$ și y, realizată de ecuația (3).

Această legătură este reprezentată în fig. 4.

Din relațiile (3) și (21) obținem:

$$-\frac{3}{2}(1+2A_2) \leqslant \left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0. \tag{22}$$

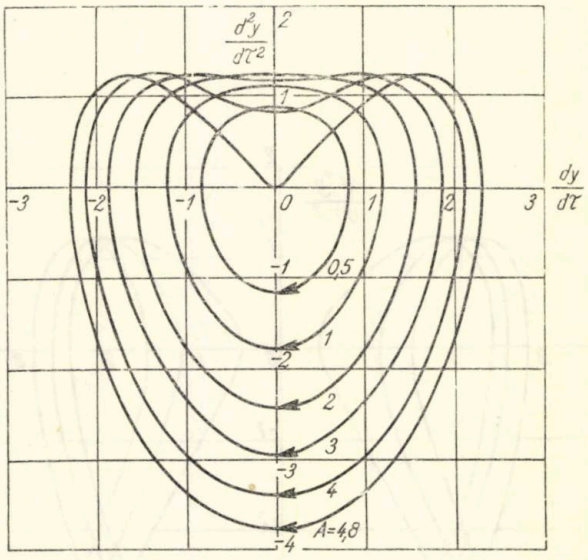


Fig. 5

Traiectoriile de fază în planul $\frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{dy}{d\tau}$ sînt date în fig. 5. Ele au fost obținute prin excluderea pe cale grafică a mărimii y între ecuațiile (3) și (8) cu ajutorul fig. 3 și fig. 4. În planul $\frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{dy}{d\tau}$ originea coordonatelor este centru stabil.

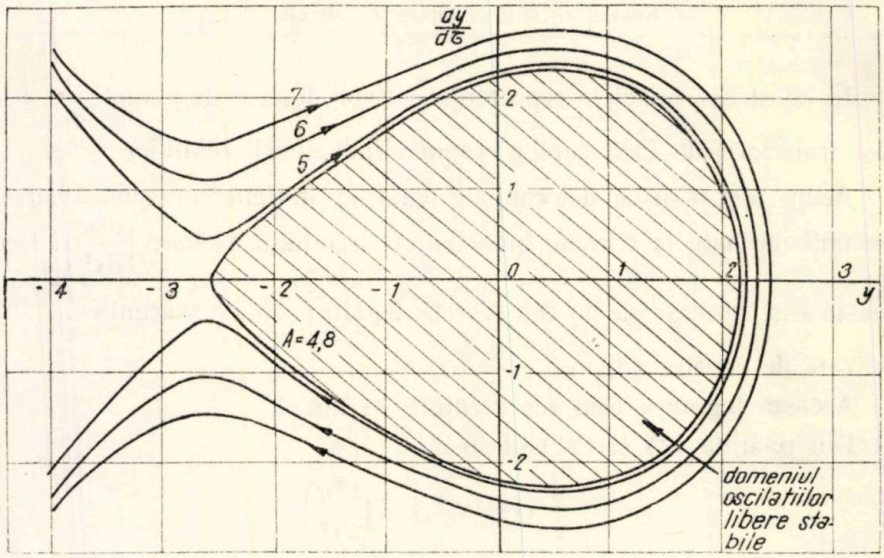

dy/dτ
7
6
5
2
1
0
1
2
3
-4
-3
-2
-1
y
A=4,8
-1
-2
domeniul
oscilatiilor
libere sta-
bile

Fig. 6

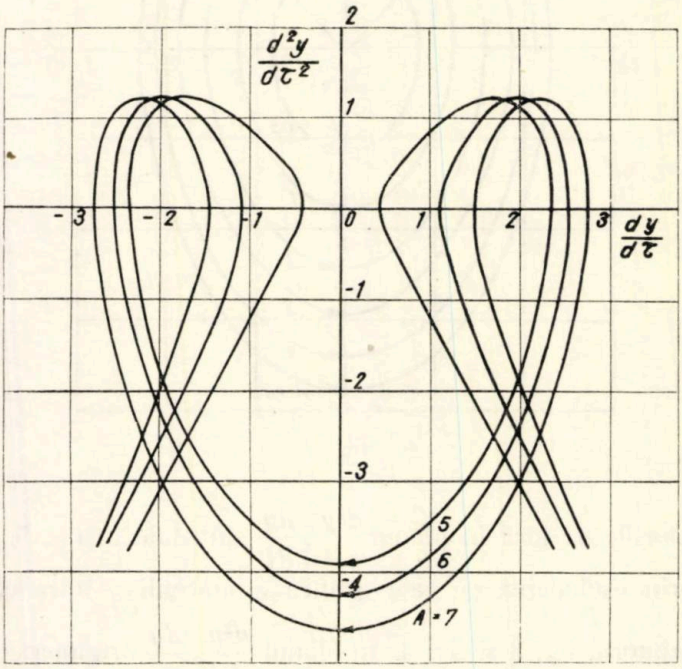

d²y/dτ²
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
dy/dτ
-1
-2
-3
-4
5
6
A=7

Fig. 7

Dacă nu sînt îndeplinite condițiile stabilite pentru valorile inițiale y_0 sau $\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)_0$, regimul liber al circuitului oscilant va fi instabil. În fig. 6 sînt reprezentate traiectoriile de fază în planul $\frac{dy}{d\tau}$, y pentru $A > A_l$, adică pentru $y_0 > -1 + 2\sqrt{1+2A_2}$. Punctele de echilibru $\frac{dy}{d\tau} = 0$ sînt șei instabile. Traiectoriile de fază instabile corespunzătoare în planul $\frac{d^2y}{d\tau^2}$, $\frac{dy}{d\tau}$ se pot observa în fig. 7.

Sensul de mișcare a punctului reprezentativ pe traiectoriile de fază se determină ușor. Pentru aceasta este suficient să observăm, spre exemplu, că pentru $y \geqslant y_{i2}$ (fig. 4) $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}\right) < 0$ și, prin urmare, în această regiune $\frac{dy}{d\tau}$ va scădea cu trecerea timpului. Aceasta înseamnă că pentru valorile pozitive ale lui $\frac{dy}{d\tau}$ punctul reprezentativ se va deplasa de la stînga la dreapta pe traiectoriile de fază (fig. 3). În același fel se determină sensul deplasării punctului reprezentativ pentru toate familiile de traiectorii de fază.

Catedra de tuburi electronice și tranzistori
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Drăgănescu:* Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit, Ed. Acad. R.P.R., 1962.
2. *V. P. Diomin:* O svobodnîh kolebaniah v konture s nelineinoi iomkostiu p — n perehoda, Radiotehnica i Electronica, 1959, nr. 10.
3. *W. J. Cunningham:* Introduction to Nonlinear Analysis, New-York, 1958.
4. *M. Petrescu:* Upravliaemîe immitnsî na poluprovodnicovîh priborah, candidatskaia dissertația, Moskova, MEI, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

TRANSPORTURI

C.Z. 629.113 : 621.316.7

AU SUJET DE LA STABILITÉ DE L'AUTOMOBILE AU FREINAGE *

C. GHIULAI, A. STOICESCU

La stabilité dynamique de l'automobile fait l'objet d'un grand nombre de recherches théoriques et expérimentales effectuées dans des differents pays pendant la dernière dizaine d'années et notamment pendant les derniers deux ou trois ans. L'acroissement continu de la vitesse de l'automobile et de la densité de la circulation routière — et du nombre d'accidents à la fois — en explique l'importance accordée au problème.

Parmis les publicationes représentatives, on peut citer en premier lieu celles de *Kamm*, à savoir: la conference presentée au IX-me Congrès FISITA à Londre en 1962 „Moyens d'obtenir la securité techniquement possible de de l'automobile" [5] — comme synthèse succinte du problème — et le travail plus recent „Recherches sur modèle et par calcul sur la stabilité de direction des automobiles" paru en 1963 (Deutsche Kraftfahrtforschung und Strassenverkerstechnik, Heft 164, V.D.I. — Verlag).

Les études de la stabilité directionelle de l'automobile ont comme dessein la determination des conditiones et de la mesure dont l'automobile peut garder la direction où elle est dirigée par son conducteur, lors même qu'elle est le siège des differentes forces transversales, au deplacement en ligne droite (vent de coté ; inclinaison transversale de la route etc.) ou aux virages (force centrifuge). On emploie les procedés classiques de la mecanique. En essence, on écrit les équationes d'equilibre dynamique de l'automobile en mouvement, considérée comme système a deux degrès de liberté — deplacement transversal du centre de gravité et rotation autour d'une axe verticale par le centre de gravité —, en considerant l'élasticité transversale des pneus ; on détérmine ensuite les equationes differencielles respectives par l'integration desquelles on cherche obtenir la trajectoire du centre de gravité et la deviation angulaire de l'axe longitudinale de l'automobile. Pour faciliter l'integration des equationes differencielles on

*) Manuscris prezentat la redacție 20 februarie 1965 .

est toujours obligè d'introduire des hypothèses simplificatoires ce qui rend necessaire les verifications expérimentales. Le calculateur electronique analogue devient aussi d'emploi de plus en plus repandu comme moyen auxiliaire. Les essais de stabilité dynamique d'une automobile rapide sur route sont difiiciles et dangereux ce qui explique leur nombre très restreint. De ce point de vue c'est à remarquer l'intérèt particulier qu 'elle présente une des recherches citées plus haut [4] par ses essais experimentaux sur modèle effectuès comme moyen de verification qualitative des resultats thèoriques.

Dans ce qui suit on présente une étude suggérée par des accidents survenus quelquefois au freinage dans des situationses d'encombrement de la route l'automobile freinée se trouvant du cotè droit extréme de la route avec les deux roues de ce coté sur la bande laterale noncarossable à coefficient d'aldhérence reduit.

On a poursuivi l'étude directe de la stabilité dans ces conditiones particulières. A l'intègration analitique des équationes differencielles, l'étude prèsente l'originalité d'appeler à des méthodes des mathématiques spéciales. Les resultats thèoriques ont étè concretisés par des applicationes numériques. Comme verification practique on à effectué des essais sur route.

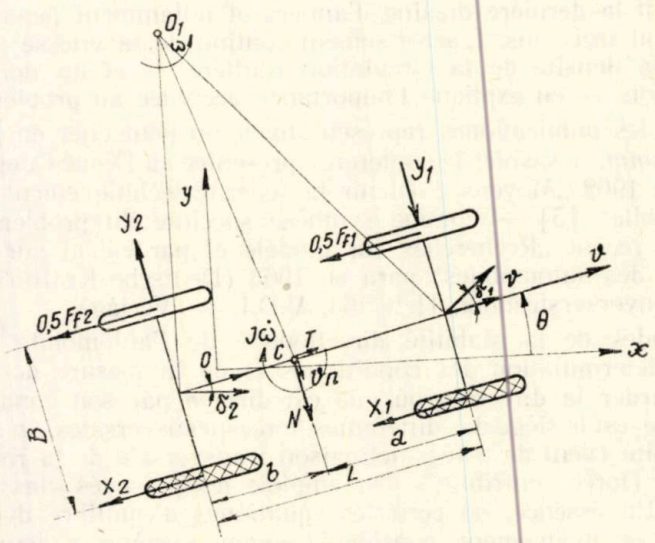


Fig. 1. Schéma des forces et des moments après le bloquage des roues freinées du coté droit.

Evidemment, une des causes perturbatrices pour la tenue de direction au freinage d'une automobile dont le volant est maintenu dans la position corespondante au deplacement rectiligne, c'est le moment dans le plan de la voie issu au freinage d'une repartition inégale des éfforts de freinage sur les roues d'une même essieu ou par le dépassement de la valeur de l'adhérence à une partie des roues suivie par leur blocage.

Dans ce qui suit on éxamine la déviation de l'automobile freinée dans le cas du bloquage de deux roues du même coté (coté droit) se trouvant sur une bande de la voie à adhérence reduite. On considere la route horizontale, sans bombement transversal, sans iregularités, et que les plans des roues directrices sont maintenues fixes dans leurs position de marche rectiligne.

On cherche a détérminer la trajectoire et la position de l'automobile avec le roues du coté droit bloquées, à un intervalle de temps après le bloquage au moins égal au temps de reaction d'un conducteur insuffisamment expérimentè.

Dans la figure 1 on représente le schéma d'une automobile freinée, après le blocage des deux roues du coté droit, en rapportant sa position à un système orthogonal fix O,x,y, dont l'axe Ox coresponde comme direction et sens au mouvement réctiligne de la voiture avant le blocage des roues.

Les roues du coté droit étant bloquées les réactiones transversales de la voie à cettes roues sont nulles. En plus, à cause du coefficient d'adhérence après glissement φ'_a plus reduit, les éfforts de freinage correspondants sont inferieurs à ceux des roues du coté gauche ; ainsi, l'automobile devient le siège d'un moment M_f dans le plan de la voie qui tend à le faire tourner de droit à gauche autour d'une axe verticale par le centre de gravité C. Ceci, à cause de l'elasticité transversale des pneus, fait apparaitre les angles de deviation („angles de roulage oblique") representés dans la figure par leurs valeurs moyenens δ_1 et δ_2.

On a noté :

F_{f_1}, F_{f_2} — les forces de freinage à l'essieu avant, respectivement arrière, avant le blocage des roues du coté droit, en Kgf ;

X_1, X_2 — les forces de freinage aux roues bloquées, en Kgf ($X_1 < 0{,}5\,F_{f_1}$ et $X_2 < 0{,}5\,F_{f_2}$) ;

Y_1, Y_2 — les réactiones transversales de la voie aux essieux, en Kgf ;

R_r, R_a — la résistance au roulement et la résistance de l'air, en Kgf (non representées dans la figure 1) ;

m — masse de l'automobile, en $\mathrm{Kgf \cdot s^2 \cdot m^{-1}}$;

I — moment d'inertie par rapport à l'axe verticale par le centre de gravité, en $\mathrm{Kgf \cdot m \cdot s^2}$;

a, b — distances du centre de gravité aux axes des essieux, en m ;

B — la voie de l'automobile, en m ;

v — la composante de la vitesse du centre de gravité sur la direction de l'axe longitudinale de l'automobile, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

v_n — la composante de la vitesse du centre de gravité sur la direction de la normale à l'axe longitudinale, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

ω — la vitesse angulaire du mouvement de rotation de l'automobile, en rad. s^{-1}.

L'equation du mouvement de l'automobile freiné avec les deux roues d'un coté (droit) bloquées

La position de l'automobile à un moment donné est determinée si on connait la position de son centre de gravité par rapport à un système d'axes rectangulaire fixe, choisi, et l'angle θ de l'axe longitudinale avec l'axe Ox („angle de route").

Si on représente la force d'inertie par ses deux composantes appliquées au centre de gravité — T sur la direction de l'axe longitudinale, et N sur la direction de la normale à l'axe longitudinale — on démontre [1] que

$$T = m\left(\frac{dv}{dt} - \omega v_n\right) \tag{1}$$

$$N = m\left(\omega v - \frac{dv_n}{dt}\right). \tag{2}$$

Les deux roues du coté droites une fois bloquées les reactiones transversales de la voie sont prélevées seulement par les roues du coté gauche

$$Y_1 = 0{,}5\, c_1 \alpha_1 \tag{3}$$

$$Y_2 = 0{,}5\, c_2 \alpha_2 \tag{4}$$

avec δ_1 — l'angle de deviation („angle de roulage oblique") des roues de l'essieu avant, rad ;

δ_2 — l'angle de deviation des roues arrières, rad ;

c_1, c_2 — coefficients de résistance a la deviation des pneus du pont avant et du pont arrière, $\frac{\text{Kgf}}{\text{rad}}$ (pour les deux roues).

Par l'application du principe de d'Allembert sur les deux axes, longitudinale et transversale de l'automobile en tenant compte de (3) et (4), et de l'equation des moments par raport au centre de gravité C, on a

$$m\left(\frac{dv}{dt} + \omega v_n\right) = -(0{,}5\, F_{f1} + 0{,}5\, F_{f2} + X_1 + X_2 + R_r + R_a) \tag{5}$$

$$m\left(\frac{dv_n}{dt} - \omega v\right) = Y_1 - Y_2 \tag{6}$$

$$I\dot{\omega} = (0{,}5\, F_{f1} + 0{,}5\, F_{f2} - X_1 - X_2)\frac{B}{2} - Y_1 a - Y_2 b. \tag{7}$$

Quant aux angles de deviation des roues on demontre [1]

$$\delta_1 = \frac{\omega a - v_n}{v}, \quad \delta_2 = \frac{v_n + \omega b}{v}. \tag{8}$$

En notant par M_f le moment dans le plan de la voie

$$M_f = (0{,}5\,F_{f1} + 0{,}5\,F_{f2} - X_1 - X_2)\,\frac{B}{2},$$

et ayant en vue les relationes (3), (4) et (8), les relationes (6) et (7) deviennent

$$m\,\omega\,v - m\,\frac{dv_n}{dt} = 0{,}5\,(c_1 + c_2)\,\frac{v_n}{v} + 0{,}5\,(c_2\,b - c_2\,a)\,\frac{\omega}{v} \tag{6'}$$

$$I\,\dot{\omega} = M_f + 0{,}5\,(c_1\,a - c_2\,b)\,\frac{v_n}{v} - 0{,}5\,(c_1\,a^2 + c_2\,l^2)\,\frac{\omega}{v}, \tag{7'}$$

ou, en mettant

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5\,(c_1 + c_2) &= \alpha \\ 0{,}5\,(c_2\,b - c_1\,a) &= \beta \\ 0{,}5\,(c_1\,a^2 + c_2\,b^2) &= \gamma \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

$$m\,\omega\,v - m\,\frac{dv}{dt} = \alpha\,\frac{v_n}{v} + \beta\,\frac{\omega}{v}. \tag{6'}$$

$$I\,\dot{\omega} = M_f - \beta\,\frac{v_n}{v} - \gamma\,\frac{\omega}{v}. \tag{7'}$$

Par élimination de v_n entre (6') et (7') on obtient :

$$m\,\beta\,v^2\,\omega + I\,\alpha\,v\,\dot{\omega} - m\,\beta\,v\,\frac{dv_n}{dt} = \alpha\,v\,M_f + (\beta^2 - \alpha\,\gamma)\,\omega. \tag{10}$$

La dérivation de (7') par rapport au temps donne

$$I\,v\,\dot{\omega} + I\,\dot{v}\,\dot{\omega} = v\,\frac{dM_f}{dt} + M_f\,\dot{v} - \beta\,\frac{dv_n}{dt} - \gamma\,\dot{\omega}. \tag{7''}$$

Par élimination de $\frac{dv_n}{dt}$ entre (7'') et (10) :

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Iv} + \frac{\dot{v}}{v}\right)\dot{\omega} + \left(\frac{\beta}{I} + \frac{\alpha\,\gamma - \beta^2}{I\,m\,v^2}\right)\omega =$$

$$= \frac{1}{I}\,\frac{dM_f}{dt} + \left(\frac{\dot{v}}{v}\,\frac{1}{I} + \frac{\alpha}{I\,m\,v}\right)M_f \tag{11}$$

ou, avec $\alpha\,\gamma - \beta^2 = 0{,}25\,c_1\,c_2\,L^2$,

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\alpha}{m\,v} + \frac{\gamma}{I\,v} + \frac{\dot{v}}{v}\right) + \left(\frac{\beta}{I} + \frac{0{,}25\,c_1\,c_2\,L^2}{I\,m\,v^2}\right)\omega = \frac{1}{I}\,\frac{dM}{dt} +$$

$$+ \left(\frac{\dot{v}}{v}\,\frac{1}{I} + \frac{\alpha}{I\,m\,v}\right)M_f \tag{12}$$

équation differencielle de la vitesse angulaire qui, en dehors de ω et ses dérivées contient aussi la vitesse v et l'accélération $\dot{v}$, toutes deux fonctionnes de temps inconnues pendant le période de freinage. Pour obtenir une equation uniquement en ω, à l'elimination il aurait été necessaire de s'en servir de la relation (5) en plus, ce qui aurait conduit à une équation compliquée difficilement integrable.

Ayant en vue l'intervalle de temps qui intéresse dans l'étude du mouvement après le blocage des deux roues freinées relativement petit (de l'ordre du temps de reaction du conducteur, c'est à dire jusqu-à une seconde) et que la vitesse initiale au debut du freinage est relativement grande, on peut considerer la vitesse v constante (donc $\dot{v} = 0$), approximation qui conduit à ce que l'équation (12) devient une équation ä coefficients constants :

$$\ddot{\omega} + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Iv}\right)\dot{\omega} + \left(\frac{\beta}{I} + \frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{I m v^2}\right)\omega = \frac{1}{I}\frac{dM_f}{dt} + \frac{\alpha}{Imv} M_f . \qquad (12')$$

La valeur du moment M_f dans le plan de la voie est nulle jusqu'au blocage de roues du coté droit ; donc, prennant comme origine du temps l'instant du blocage, le moment perturbateur peut être representé par le saut K (fig. 2) dont la valeur sera determinée plus loin.

Par l'application de la transformée de *Laplace* à chaqun des membres de l'équation (12'), compte tenu qu'au moment $t = +0$, ω, $\dot{\omega}$ et $\ddot{\omega}$ sont nulles, il en résulte :

$$p^2 \Omega(p) + \left(\frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Iv}\right) p\,\Omega(p) + \left(\frac{\beta}{I} + \frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{I m v^2}\right)\Omega(p) = \frac{K}{I} + \frac{\alpha}{Imv}\frac{K}{p} \qquad (13)$$

où $\Omega(p) = L\,\omega(t)$.

De (13), en notant

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{mv} + \frac{\gamma}{Iv} &= 2A \\ \frac{\beta}{I} + \frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{I m v^2} &= B \\ \frac{\alpha}{Imv} &= C \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

on obtient

$$\Omega(p) = \frac{pI^{-1} + C}{p(p^2 + 2Ap + B)} K . \qquad (15)$$

Pour trouver la fonction „originale" $\omega(t)$ on applique le théorème du développement de *Heaviside*. En notant

$$K(pI^{-1} + C) = P(p) \quad \text{et} \quad p^2 + 2Ap + B = R(p),$$

$$\omega(t) = \frac{P(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{R'(p_k)} \frac{e^{p_k t}}{p_k} \qquad (16)$$

où p_k sont les racines de l'équation $R(p) = 0$.
Le cas présent :

$$p_1 = -A + i\lambda,\quad p_2 = -A - i\lambda,\quad \lambda = \sqrt{B - A^2} \text{ et } R'(p) = 2p + 2A,$$

avec lesquelles

$$\omega(t) = \frac{KC}{B} + K\frac{\frac{A}{I} + i\frac{\lambda}{I} + C}{2(-A + i\lambda) + 2A}\cdot\frac{e^{(-A+i\lambda)t}}{-A + i\lambda} + \\ + K\frac{-\frac{A}{I} - i\frac{\lambda}{I} + C}{2(-A - i\lambda) + 2A}\cdot\frac{e^{(-A-i\lambda)t}}{-A - i\lambda} \tag{17}$$

ou

$$\omega(t) = \frac{KC}{B} + K\frac{e^{-At}}{2\lambda}\left[\frac{\left(-\frac{A}{I} + C + i\frac{\lambda}{I}\right)(\cos\lambda t + i\sin\lambda t)}{-\lambda + iA} + \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{A}{I} + C + i\frac{\lambda}{I}\right)(\cos\lambda t - i\sin\lambda t)}{-\lambda + iA}\right]. \tag{18}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, après des trans-

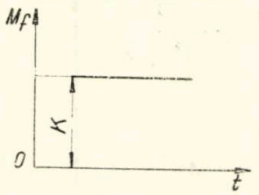


Fig. 2. Répresentation du saut du moment perturbateur dû au bloquage de deux roues du coté droit.

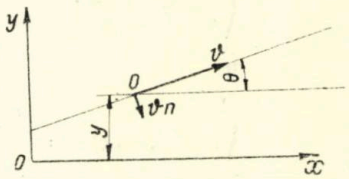


Fig. 3. Schéma simplifié de la position de l'automobile.

formationes, on obtient l'expression de la vitesse angulaire sous la forme

$$\omega(t) = \frac{KC}{B} + \frac{Ke^{-At}}{\lambda B}\left[\left(\frac{B}{I} - AC\right)\sin\lambda t - \lambda C\cos\lambda t\right] \tag{19}$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$\omega(t) = \frac{K\frac{\alpha}{m}v}{\frac{0{,}25\,c_1 c_2}{m}L^2 + \beta v^2}\left\{1 + e^{-At}\left[\left(\frac{B}{CI\lambda} - \frac{A}{\lambda}\right)\sin\lambda t - \cos\lambda t\right]\right\}. \tag{20}$$

Détermination de la position de l'automobile freinée avec les deux roues d'un coté (droit) bloquées

La détermination nécessite la connaissance des deux coordonées du centre de gravité et de „l'angle de route" θ (angle de l'axe longitudinal avec l'axe Ox) ; des deux coordonées, elle present de l'intérêt seulement l'ordonée y (fig. 3) qui donne la déviation laterale.

Pour l'angle $\theta(t)$ on peut écrire

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt$$

c'est à dire, en utilisant la relation (20)

$$\theta(t) = \frac{K\frac{\alpha}{m}}{\frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{m} + \beta v^2}\left[t + \left(\frac{B}{CI\lambda} - \frac{A}{\lambda}\right)\int_0^t e^{-At}\sin\lambda t\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^t e^{-At}\cos\lambda t\, dt\right]. \tag{21}$$

Les intégrales en paranthèse sont de la forme $\int e^{ax}\sin bx\, dx$ respectivement $\int e^{ax}\cos bx\, dx$, aisément calculables par parties, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} \int_0^t e^{-At}\sin\lambda t\, dt &= \frac{-A\sin\lambda t - \lambda\cos\lambda t}{A^2+\lambda^2}\, e^{-At} + \frac{\lambda}{A^2+\lambda^2} \\ \int_0^t e^{-At}\cos\lambda t\, dt &= \frac{-A\cos\lambda t - \lambda\sin\lambda t}{A^2+\lambda^2}\, e^{-At} + \frac{A}{A^2+\lambda^2} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

par le nemplecement desquelles en (21) on obtient la relation finale pour $\theta(t)$

$$\theta(t) = \frac{K\frac{\alpha}{m}v}{\frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{m} + \beta v^2}\left\{t - e^{-At}\left[\left(\frac{A}{CI\lambda} - \frac{A^2}{\lambda B} + \frac{\lambda}{B}\right)\sin\lambda t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{CI} - \frac{2A}{B}\right)\cos\lambda t\right] + \left(\frac{1}{CI} - \frac{2A}{B}\right)\right\}. \tag{23}$$

Le deplacement lateral du centre de gravité est

$$y = \int_0^t v_y\, dt$$

où v_y est la composante d'après l'axe Y de la vitesse v (fig. 3)

$$v_y = v \sin\theta - v_n \cos\theta . \tag{24}$$

Ayant en vue que les valeurs de θ sont petites dans l'interval de temps considéré on peut écrire

$$y = \int_0^t (v\theta - v_n)\, dt = \int_0^t v\theta\, dt - \int_0^t v_n\, dt . \tag{25}$$

De (7′) on obtient

$$v_n = \frac{v}{\beta} M_f - \frac{v}{\beta} I\dot{\omega} - \frac{\gamma}{\beta}\omega \tag{26}$$

avec lequelle (26) peut être écrite

$$y = v\int_0^t \theta(t)\, dt + \frac{vI}{\beta}\omega(t) + \frac{\gamma}{\beta}\theta(t) - \frac{v}{\beta} M_f t . \tag{27}$$

Pour l'intégrale ci-dessus, en tenant compte de (24) on peut écrire :

$$\int_0^t \theta(t)\, dt = \frac{K\frac{\alpha}{m} v}{\frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{m} + \beta v^2}\left[\frac{t^2}{2} + \left(\frac{1}{CI} - \frac{2A}{B}\right)t - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{A}{CI\lambda} - \frac{A^2}{\lambda B} + \frac{\lambda}{B}\right)\int_0^t e^{-At}\sin\lambda t\, dt - \left(\frac{1}{CI} - \frac{2A}{B}\right)\int_0^t e^{-At}\cos\lambda t\, dt\right].$$

Après l'introduction des deux integrales de (23) on arrive à

$$\int_0^t \theta(t)\, dt = \frac{K\frac{\alpha}{m} v}{\frac{0{,}25\, c_1 c_2 L^2}{m} + \beta v^2}\left\{\frac{t^2}{2} + \left(\frac{1}{CI} - \frac{2A}{B}\right)t + \left(\frac{A^2}{BCI\lambda} - \frac{A^3}{\lambda B^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{A\lambda}{B^2} - \frac{\lambda}{BCI} + \frac{2\lambda A}{B^2}\right) e^{-At}\sin\lambda t + \left(\frac{2A}{BCI} - \frac{3A^2}{B^2} + \frac{\lambda^2}{B^2}\right. e^{-At}\cos\lambda t -$$

$$\left.\left. - \frac{2A}{BCI} + \frac{3A^2}{B^2} + \frac{\lambda^2}{B^2}\right\}\right. \tag{28}$$

relation dont les resultats sont à introduire dans (28) pour obtenir la deviation latèrale y du centre de gravité C à un intervalle de temps donné t dès que le blocage des roues freinées du coté droit s'est produit.

Détermination du moment perturbateur dû au blocage de roues freinées d'un même coté (droit)

Le blocage de roues du coté droit se produit sur une bande de la voie occupée par cettes roues où le coefficient d'adhèrence avant glissement est $\varphi' < \varphi$, φ étant le coefficient d'adhèrence avant glissement pour les deux roues de gauche. Evidemment les forces de freinage aux deux roues du coté droit, bloquées, sont

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 0{,}5\,\varphi'_a\,Z'_1 \\ X_2 &= 0{,}5\,\varphi'_a\,Z'_2 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

où Z'_1, Z'_2 — la charge dynamique de l'essieu avant, respectivement arrière, dans le cas de son freinage avec toutes ses deux roues bloquées ;

φ'_a — la coefficient d'adhérence aprés glissement aux deux roues du coté droit bloquées $(\varphi'_a < \varphi')$.

En négligeant le résistance au roulage des deux roues du coté gauche, de l'equation des moments par rapport au centre de gravité C on peut écrire pour le moment perturbateur K

$$K = \frac{B}{2}\left[\frac{F_{f1} + F_{f2}}{2} - 0{,}5\,\varphi'_a(Z'_1 + Z'_2)\right]$$

ou, comme $Z'_1 + Z'_2 = G_a$ (avec G_a — le poids total de la voiture)

$$K = \frac{B}{4}(F_{f1} + F_{f2} - \varphi'_a\,G_a) \tag{30}$$

relation dans laquelle il reste à introduire les valeurs des efforts de freinage F_{f1} et F_{f2} des essieux (dans le cas du freinage sans blocage), determinés par calcul.

Application

La méthode exposée ci-desus à été apliquée au cas d'une limousine dont les caracteristiques sont :

— Dimensiones principales :

$L = 2950$ mm ; $B = 1450$ mm

— Poids, masses, position du centre de gravitè, moment d'inertie :

a) voiture à vide :

$G = 1640$ Kgf (poids de l''appareillage de mèsure 40 Kgf, inclus) dont

sur l'essieu avant $G_{01} = 870$ Kgf

sur l'essieu arrière $G_{02} = 770$ Kgf,

position du centre de gravité :

a = 1388 mm
b = 1562 mm
h_g = 640 mm

b) avec deux personnes à l'avant, appareillage inclus :

G_a = 1815 Kgf dont
sur l'essieu avant G_1 = 955 Kgf
sur l'essieu arriere G_2 = 860 Kgf

position du centre de gravité :
a = 1405 mm
b = 1545 mm
h_g = 660 mm

c) avec 5 personnes (trois à l'arrière), appareillage inclus :

G_a = 2075 Kgf dont
sur l'essieu avant G_1 = 1017 Kgf
sur l'essieu arriere G_2 = 1058 Kgf
position du centre de gravité :
a = 1515 mm
b = 1435 mm
h_g = 710 mm

— Masse de l'automobile :
avec 2 personnes m = 181 Kgf·s^2·m^{-1}
avec 5 personnes m = 208 Kgf·s^2·m^{-1}

— Moments d'inertie par rapport à l'axe verticale du centre de gravité :
avec 2 personnes I = 210 Kgf·m·s^2
avec 5 personnes I = 218 Kgf·m·s^2

— Pneus :
dimension des pneus (6,70 × 15)″
pression : roues avant 1,8 Kgf/cm^2
roues arrières 2,0 Kgf/cm^2
coefficients de resistance à la deviation, d'apres *Fonda* [8] :
pour un pneu
à l'avant 53 Kgf/degré
a l'arriere 57 Kgf/degré
pour l'ensemble de l'essieu
essieu avant c_1 = 106 Kgf/degré = 6080 Kgf/rad
essieu arrière c_2 = 114 Kgf/degré = 6720 Kgf/rad.

Au calcul on a considéré que le freinage se produit sur une route a recouvrement en beton — asphalte, en parfait état, la même sur laquelle on a effectué ulterieurement les essais de verification expérimentale ; les valeurs des coefficients d'adhérence (determinées par essais) sont :

— sur la route séche, avant le blocage de roues $\varphi = 0{,}66$

— pour les roues du coté droit, le coeficient d'adherence après leur blocage $\varphi'_a = 0{,}45$.

Le calcul a été effectué pour la même interval de temps $t = 1$s aprés le blocage des deux roues du coté droit, succesivement pour le cas de la voiture chargée de deux personnes à l'avant, appareillage de mesure inclus, et pour la voiture à pleine charge (5 personnes dont 3 sur le siège arrière), dans chaque cas pour 40, 50 et 70 km/h de vitesse.

Au calcul du saut de moment K (relation 30) on a pris pour les deux charges, le même effort total de freinage $F_{f_1} + F_{f_2} = 1190$ Kgf, qui corespond à une decélération $\dot{v} = 6{,}5$ m·s^{-1} pour la voiture à deux personnes, respectivement $\dot{v} = 5{,}7$ m·s^{-1} pour la voiture à pleine charge, decélérationes qu'on a mesurè à des essais de freinage sur la route suscitée pour la même force appliquée à la pédale (corespondant à la pression $p = 40$ Kgf/cm^2 dans la canalisation de commande des freins). Les valeurs du moment perturbateur sont : $K = 136$ Kgf·m dans le cas de la voiture à 2 personnes et $K = 93$ Kgf·m pour la voiture à pleine charge.

Du point de vue de la „susceptibilité au virage" („Lenkwilligkeit") :

— pour l'automobile à deux personnes

$$c_2 b - c_1 a = 6720 \cdot 1{,}545 - 6080 \cdot 1{,}405 = 990 > 0$$

— pour la pleine charge

$$c_2 b - c_1 a = 6720 \cdot 1{,}435 - 6080 \cdot 1{,}515 = 43 > 0$$

d'où on voit que dans le premier cas la voiture se trouve nettement en „insuffisence de virage" („Unterlenkung") donc en régime de stabilité directionelle ; la voiture à pleine charge, bien que en „insuffisence de virage" aussi, elle se trouve tout de même près du régime d'instabilité directionelle („exces de virage", „Überlenkung").

Coordonnées		Vitesse $\left[\frac{\text{Km}}{\text{h}}\right]$			
		40	50	60	70
θ [degrès]	Avec 2 pers.	5°30′	6°17′	6°53′	7°15′
	Avec 5 pers.	3°20′	4°15′	4°30′	4°40′
y [cm]	Avec 2 pers.	52	65	74	82
	Avec 5 pers.	35	46	50	56

Les résultats finales des calculs pour la deviation angulaire θ de l'axe longitudinale de la voiture et du deplacement transversale y du centre de gravité vers la gauche, après un intervale d'une seconde depuis le blocage de deux roues du cotè droit, sont centralisés dans le tableau ci dessus et dans les figures 4 et 5.

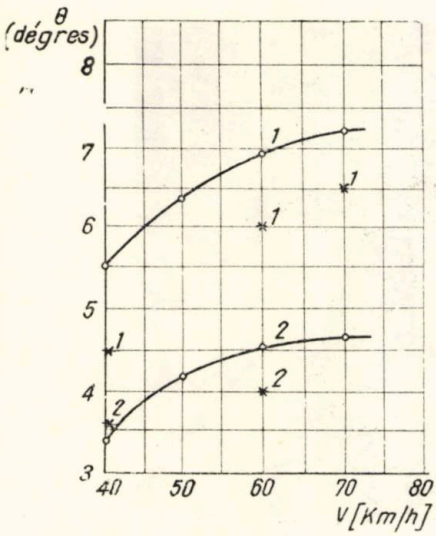


Fig. 4. Deviation angulaire de l'axe longitudinale.

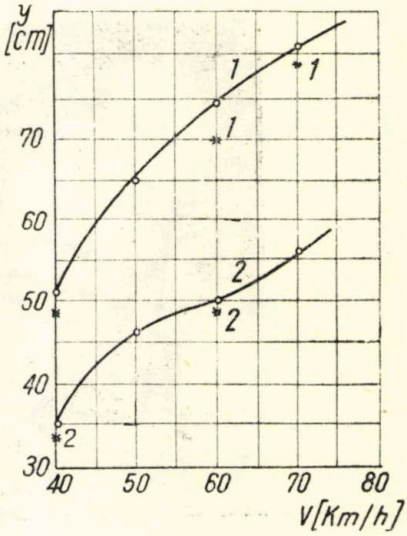


Fig. 5. Deviation transversale du centre de gravité vers la gauche.

Vérifications expérimentales

Comme vérificationes expérimentales on a effectué des essais de freinage avec blocage simultané des deux roues du coté droit, avec la même voiture dont les caracteristiques dimensionelles sont celles indiquées a l'occasion des calculs numeriques exposès ci-dessus.

La route : chaussée horizontale, de 10 m de largeur, en beton-asphalte. Sur la partie de freinage on a tracé 12 lignes longitudinales, blanches, de 50 mm de largeur distancées entre elles (d'axe en axe) de 260 mm, prollongées sur 60 m. L'abaissement du coefficient d'adhérence pour les deux roues du coté droit a été obtenue en recouvrant la voie dans la partie droite de la zone de freinage, sur une bande de 1500 mm de largeur, avec une mince couche continue de combustible *Diesel*. Les coefficients d'adhérence, détermines par dynamometrage de l'automobile remorquèe (qu'on les à introduit aussi dans les calculs numeriques) sont : coefficient d'adhèrence avant glissement sur la partie séche (valable pour les roues de gauche) $\varphi = 0{,}66$; sur la partie à combustible *Diesel*, après blocage des roues (valable pour les deux roues de droite) $\varphi'_a = 0{,}45$.

Avant les essais de freinage il a fallu déterminer une valeur sufisement élevée de l'effort total de freinage $F_{f_1} + F_{f_2}$ avant blocage de

roues sur la voie sèche à coefficient d'adhérence maximum $\varphi = 0{,}66$. Dans ce but, on a prevu un manomètre à l'issue de la pompe principale du système hidraulique de comande des freines (fig. 7, a et 7, b) ; pour obtenir la même pression à chaque essai (donc le même efort de freinage), à la pédale de frein on a ajoutè une vis de reglage limitateur de sa

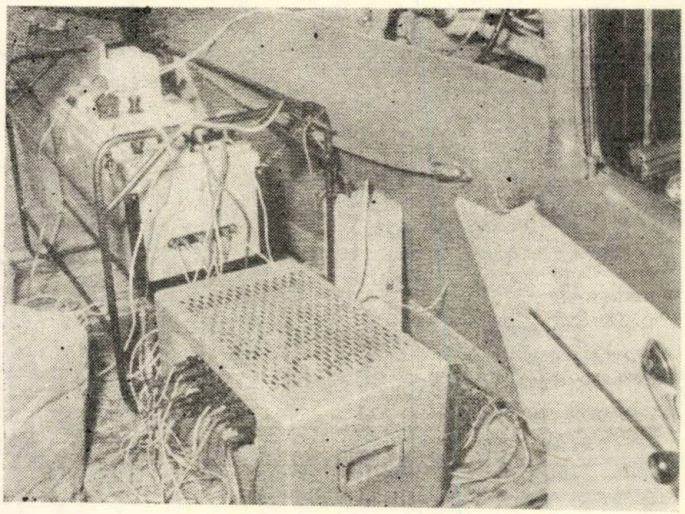


Fig. 6. Emplacement de l'oscilographe dans la voiture.

course, ce qui a permis de realiser une pression maxima $p = 40$ Kgf/cm^2. Dans ces conditions les décèlerationes obtenues sans aucun blocage de roue ont étè $\dot{v} = 5{,}7$ m/s^2 pour la voiture a 5 perssones et $\dot{v} = 6{,}5$ m/s^2 avec deux personnes.

Pour la vitesse on a utilisè le vitessemètre de bord préalablement etalonnè.

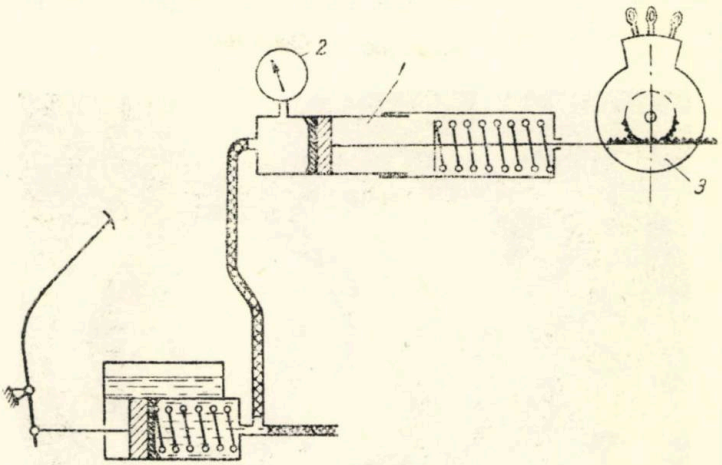
Comme appareils d'enregistrement on a employè une cameras à filmer de 16 mm et un oscillographe élèctromagnétique à trois boucles et base de temps, alimenté par une batterie d'accus separée de 12 V ce dernier comme moyen auxiliaire.

Les grandeurs oscillographièes et les traducteurs employès sont :

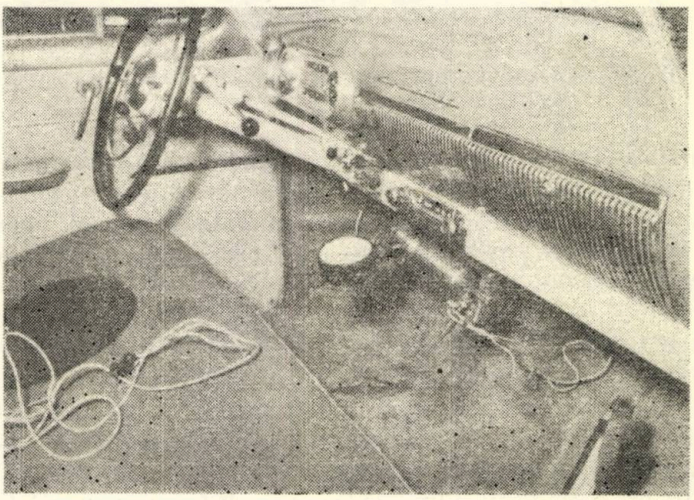
— la pression p dans le système hidraulique de freinage, inscrite par une des boucles à l'aide d'un potentiomètre de 10 Kilo-ohm comme traducteur monté en réostat variable avec son curseur rotative actionnè par la tige — cremaillère du piston d'un cylindre de pression, connecté avec le manomètre a l'issue de la pompe principale (fig. 7).

— le temps t, avec comme origine le moment du blocage de la roue du coté droit de l'essieu arrière. Il a étè enregistré par une deuxième boucle de l'oscillographe alimentée (en dérivation, à travers la résistence diviseur de tension de l'oscillographe), par un générateur

d'éclairage de bicyclette entrainé en rotation par frottement par le flanc du pneu (fig. 8). Par le bloquage du générateur à la fois avec la roue, la courbe de la tension enregistrée par l'oscillographe (sinusoidale) est devenue une ligne droite, ce qui a permis de determiner le temps à l'aide de la base de temps de l'oscillographe.



a — schéma ;



b — montage au tableau de bord du cylindre traducteur (1) avec manomètre (2) et potentiomètre (3).

Fig. 7. Dispositif de mesurage de la pression dans le système de freinage et le traducteur pour l'enregistrement.

— le moment de l'intervention du conducteur par actionnement du volant pour le redressement de la direction de la voiture après la déviation. Il a été inscrit par la troisième boucle de l'oscillographe, alimentée par la batterie d'accus par l'intermède d'un pontentiomètre de 20 Kiloohm comme traducteur dont la tige du curseur rotative solidarisée avec le pivot fixe de la fusée de la roue directrice de gauche et le corps solidarisè avec la fusée.

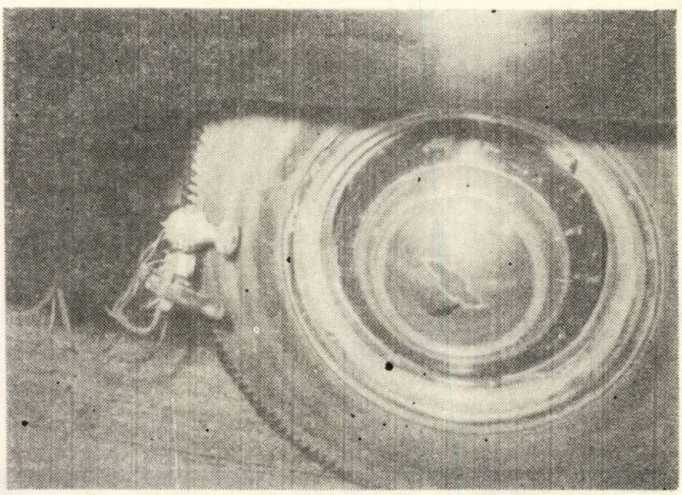


Fig. 8. Montage du générateur de bicyclette comme traducteur.

La ciné-camera de 16 mm a servi comme moyen de base au mesurage de l'angle de deviation θ de l'axe longitudinal de l'automobile pendant le freinage et du déplacement laterale y de son centre de gravité, par l'enregistrement filmé pendant le freinage, de la surface de la voie marquée avec les lignes blanches longitudinales. Pour avoir la possibileté d'obtenir un champ assez large sur le film, la ciné-camera a du être montée derrière la voiture (fig. 9) avec l'axe de l'objectif vertical et dans le plan longitudinal vertical de l'automobile, avec le coté long du cadre du film, parallèle au plan longitudinal ; le déclanchement de la camera, de l'interieur de la voiture, par dispositif à levier basculant et ficelle, imediatement avant le freinage.

Par la projection du film, cadre à cadre, on a pu determiner les deviationes angulaires θ en mesurant sur l'ecran l'angle fait par le coté longitudinal de la photo et les lignes blanches prises dans le champ. En connaissant la distance horizontale ($d = 1950$ mm) entre l'objectif et l'axe de l'essieu arriere et la distance b du centre de gravité à la même axe, la distance $d + b$ mesurée sur l'ecran (à l'echelle) a permis

de determiner la position C du centre de gravité de l'automobile (fig. 10) et après, à l'aide des lignes blanches, la valeur de la deviation laterale y du centre de gravité :

$$y = y_f + (d + b) \sin \theta .$$

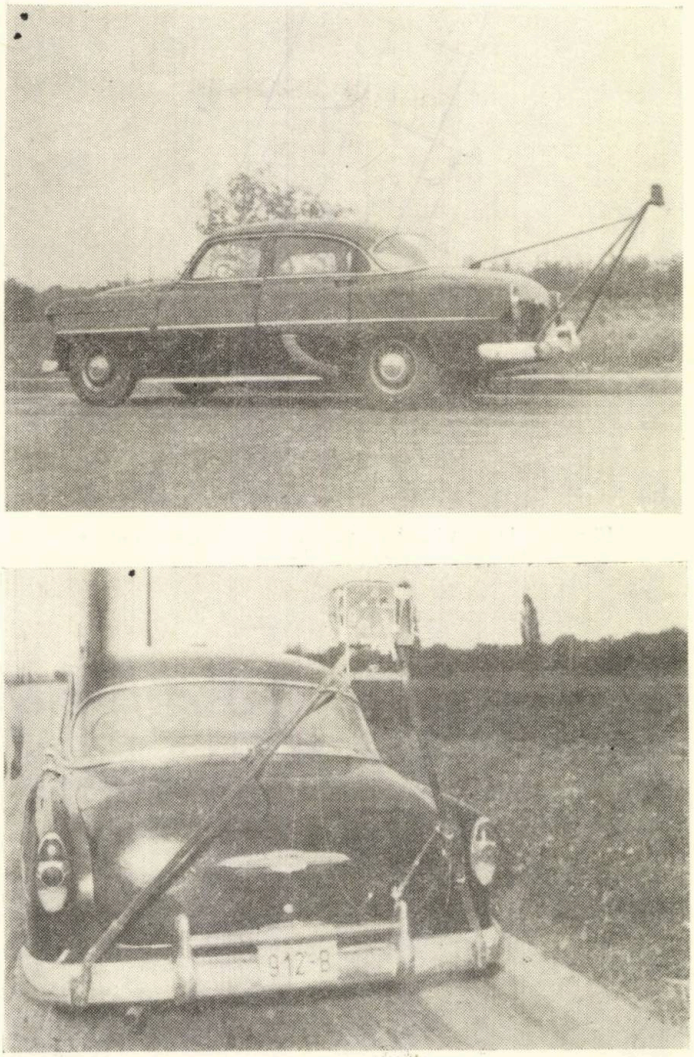


Fig. 9. Disposition de la camera cinèmatographique.

La transposition sur le film de l'origine du temps (le bloquage de la roue droite de l'essieu arrière) a été obtenue par l'emplacement dans le champ de l'objectiv de la camera d'une pétite ampoule de 6 V — 2 watt fixée sur le suport de la camera (fig. 9), alimentèe par le géné-

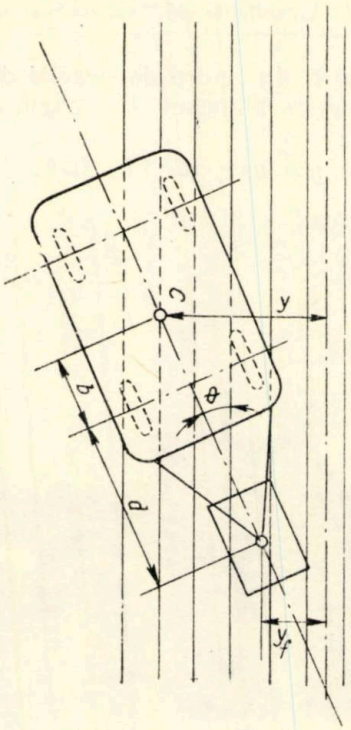


Fig. 10. Determination de l'angle de déviation et de la déviation laterale à l'aide du film projeté.

Fig. 11. La route avec les lignes tracées dans la zone de freinage.

rateur électrique de bicyclette couplé avec la roue. L'extinction de l'ampoule sur le film, marque ainsi l'origine $t = 0$ du temps ; pour le mesurage du temps sur le film à partir de cette origine, on a compté les cadres en considerant la vitesse d'enregistrement (64 images par seconde).

Subsidiairement, tant le maximum de la deviation angulaire θ_{max} que le maximum du deplacement transversale y_{max} du centre de gravitè, ont pu être determinès par mesurage direct sur les traces marquèes sur la voie par les pneus de roues du coté droit de l'automobile (fig. 11).

Les essais ont étè éfèctuées pour des vitesses initiales de freinage entre 40 et 70 Km/h avec la voiture à 2 personnes, conducteur y compris, et l'appareillage de mésure, et avec la voiture à la charge nominale (5 personnes dont 3 sur le siège arrière). Les poids totales, les poids par essieu, les coordonnées du centre de gravité, les pressiones des pneus etc., sont ceux dèja spècifiès plus haut et employées à l'application numerique, y compris la poussée sur la pedale de freinage reglèe à la même vaelur qui corespond à une pression de 40 Kgf/cm^2 dans le systhème hidraulique de comande des freins, respectivement à une decélération dans la première seconde de 6,5 m·s^{-2} pour la voiture à 2 personnes et de 5,7 m·s^{-2} pour la voiture à la pleine charge.

Les résultats des détérminations expèrimentales sont centralisés dans le tableau ci-desous, y compris les pourcentages y des écarts des deplacements transversaux du centre de gravité par rapport aux valeurs calculées. Dans les diagrammes (fig. 4 et 5) on represent aussi les resultats des essais

Chargement de la voiture	Vitesse au freinage	Valeurs determinées sur le film		$y = y_f + (d+b)\sin\theta$	Ecarts par rapport aux valeurs calculées
	[Km/h]	[degrès]	[cm]	[cm]	$\Delta y\%$
2 personnes	40	4°30′	22	49	— 5,3
	60	6°	35	70	— 5,4
	70	0°30′	39	78	— 4,9
5 personnes	40	3°30′	13	33	— 5,7
	60	4°	24	48	— 4,0

De ce tableau et des diagrames on constate que, autant par calcul qu'aux essais, dans le cas de la voiture à pleine charge, les deviationes sont inferieures à celles du cas de la voiture à 2 personnes, quoique la valeur du criterium de stabilitè directionelle ($c_2b - c_1a = 43$, pour la pleine charge) se trouve tout prés de la zone d'instabilité ($c_2b - c_1a < 0$; cèci s'explique d'une part par ce que la masse m et le moment d'inertie

I ont des valeurs superieures dans le cas de la voiture à pleine charge et d'autre part par ce que la valeur du moment perturbateur baisse de $K = 136$ Kgf·m à $K = 93$ Kgf·m.

Pour toutes les deux situationes de chargement et pour toutes les vitesses, les ecarts Δy des deplacements transversales determinés aux essais restent systèmatiquement en moins par rapport aux valeurs calculées, avec des pourcentages entre 4 et 6%, d'ailleurs acceptabales comme ordre de grandeur. On peut atrribuer ces écarts negatifs premièrement aux hypothèses simplificatoires adoptées à la détèrmination des relationes de calcul (à sevoir, $v = \text{const}$, $\dot{v} = 0$) et puis à ce qu'aux essais l'apparition du moment perturbateur K dû au blocage des deux roues du coté droit n'est pas instantanée comme on a supposé dans les calculs, mais qu'elle se produit avec une certaine progressivité due au retard dans la transmission de la pression dans le systhème hidraulique de commande des freins.

Conclusion

Comme résultat de la verification expérimentale on peut conclure que la méthode de calcul exposée est applicable avec des résultats satisfaisants. Il est, cependant necessaire que l'étude soit complétée par la récherche de sa application au domaine des vitesses plus elevèes, avec variation de certains paramètres comme par exemple les coefficients de résistance à la déviation des pneus c_1 et c_2 et la position du centre de gravité.

Le but suivi par cet étude a été celui d'apporter une contribution dans ce cas particulier moins rècherché de la stabilité dynamique de l'automobile. L'importance du problème du point de vue sécurité se fait remarquer par l'intérêt qu'on accorde par certains constructeurs à la realisation et à la dotation de l'automobile avec des dispositifs contre le bloquage des roues.

La méthode employée pour déterminer la position de l'automobile par enregistrement cine — photografique des lignes marquées sur la route, peut être aisement appliquée dans d'autres cas d'experimentation de la stabilité dynamique comme par exemple aux essais de tenue de route pendant le virage.

En ce qui concèrne les verifications experimentales il faut rémarquer les grandes difficultées des essais de freinage avec le blocage de roues effèctues sur une voie publique, à cause du danger d'accident et de la necessité d'interrompre la circulation, ce qui a déterminé pour le moment la limitation de nos essais. Tout de même, notre programme prevoit la suite de la récherche thèorique et experimentale de ce problème y compris le modelage pour l'étude par calculateur électronique analogue.

La chaire d'autovehicules
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej„
de Bucarest

LITERATURE

1. *Ciudacov E. A.:* Izdanie trudi, Akademia Nauk C.C.C.R. 1962.
2. *Gauss F.:* Über Brems — und Führungskräfte zwischen Reifen und Strasse. Automob.-tech. Z. 63 (1961).
3. *Radt H. S., Miliken F. W.:* Motions of Skidding Automobiles, S.A.E. Preprint 205 A, June 1960.
4. *Kamm W., Hontschik H, Nieman K., Blieske H.:* Modellversuche und Berechnungen über die Richtungshaltung von Kraftfahrzeugen, Deutsche Kraftfahrforschung und Strassenverkehrstecnik, Heft 164, V.D.I.-Verlag 1963.
5. *Kamm W.:* Wege zur Erzielung der technisch möglichen Sicherheit des Kraftfahrzeugs, Automob.-tech. Z. 64 (1962).
6. *Henker E:* Ergebnisse von Fahrstabilitätsuntersuchungen, Kraftfahrzeugtechnik H. 71/963.
7. *Koessler P.:* Fahrsicherheit durch Fahrtrichtungshaltung, Automob.-technn. Z. 66 (1964).
8. Upravliaemostî i ustoicivostî avtomobilia, Sbornik statei perevod c angliiskogo, Maşghiz, Moskva 1963.
9. *Şabac G. I.:* Curs de matematici superioare — capitole speciale vol. II, Edit. Min. Învăţămîntului, Bucureşti 1956.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 3

C.Z. 656.225

CU PRIVIRE LA DETERMINAREA VITEZEI DE CIRCULAȚIE A TRENURILOR DE MARFĂ*

AL. POPA, AL. NEAGU

În cadrul modernizării și înzestrării tehnice a căilor ferate, încă din anul 1959, a început acțiunea de înlocuire a locomotivelor cu abur cu locomotive diesel-electrice, iar în viitorul apropiat se vor introduce în parcul căilor ferate și locomotive electrice de curent alternativ.

Introducerea noilor tipuri de locomotive în exploatare, pe diferitele secții de remorcare ale căilor ferate, necesită o analiză tehnico-economică comparativă de rentabilitate.

La efectuarea unor asemenea analize, este necesar să se stabilească vitezele de circulație ale trenurilor de marfă de diferite tonaje, remorcate de tipuri diferite de locomotive.

Viteza de circulație a trenurilor de marfă trebuie cunoscută, deoarece aceasta, împreună cu tonajele, sînt indicii de calitate cei mai importanți ai exploatării căilor ferate. Vitezele și tonajele influențează în mod hotărîtor capacitatea de circulație și de transport, precum și indicatorii tehnico-economici de bază ai exploatării căilor ferate.

În exploatarea căilor ferate se disting următoarele viteze: viteza de circulație, viteza tehnică, viteza comercială de secție și viteza comercială de magistrală.

Viteza medie de circulație a trenului se determină numai pe baza timpului de mers pe distanța de circulație, fără a se lua în considerație timpii de demarare, frînare și staționare. Relația pentru calculul său este:

$$V_m = 60 \frac{s}{t}, \tag{1}$$

în care:

s — lungimea secției de remorcare, în km;

t — timpul de mers în sensul considerat, în minute.

Viteza tehnică se determină în baza timpului total de mers al trenului pe distanța de circulație (cu luarea în considerație și a timpilor de demarare și frînare). Deci, ea va fi dată de relația:

$$V_t = 60 \frac{s}{t + n_0 (t_d + t_f)}, \tag{2}$$

* Manuscris prezentat la redacție la 14 februarie 1965.

în care :

n_0 — numărul de opriri ale trenului în stațiile intermediare și de dispoziție ;

t_d, t_f — timpul pentru o demarare, respectiv o frînare, în minute.

Viteza comercială de secție se determină tot în baza timpilor de mers, la care, însă, se adaugă și timpii de demarare, frînare și staționare a trenului.

Spre deosebire de viteza comercială de secție, la care se iau în considerație numai timpii de staționare în stațiile intermediare, la determinarea vitezei comerciale de magistrală, trebuie avute în vedere și staționările în stațiile de dispoziție.

Viteza comercială de secție se poate determina cu relația :

$$V_s = 60 \frac{s}{t + n_s (t_s + t_d + t_f) + n_t (t_t + t_d + t_f)}, \tag{3}$$

în care :

n_s — numărul de opriri ale trenului pentru încrucișări ;

n_t — numărul de staționări ale trenului pentru operațiile tehnice ;

t_s — timpul de staționare pentru o încrucișare, în minute ;

t_t — timpul de staționare pentru operațiile tehnice, în minute.

După cum se vede din relația (3), pentru determinarea vitezei comerciale de secție, este necesar să se cunoască timpul de mers al trenului în sensul considerat, timpul de demarare, de frînare și de staționare, precum și numărul de opriri pentru încrucișări și pentru operațiile tehnice.

Timpul de mers se determină prin unul din procedeele folosite în calculele de tracțiune, iar timpul de staționare se stabilește în funcție de procesul tehnologic din stații și de graficul de circulație adoptat.

Timpii de demarare și frînare se stabilesc cu ajutorul curbelor $t = f(s)$ sau $V = f(s)$. Pentru cazul cînd aceste curbe nu sînt cunoscute, se poate considera că timpul pentru o demarare și o frînare $(t_d + t_f)$ este de 3—4 minute, pentru trenurile remorcate de locomotive cu abur, și 2—3 minute, pentru trenurile remorcate cu locomotive diesel și electrice.

Timpul pentru operațiile tehnice se stabilește în funcție de procesul tehnologic stabilit pentru executarea acestor operații.

Numărul de opriri ale trenurilor de marfă, pe liniile cu cale simplă, este determinat de numărul de încrucișări și de opriri suplimentare pentru operațiile tehnice.

Numărul de încrucișări se stabilește, de obicei, în baza graficelor de circulație.

Pentru analizele tehnico-economice de rentabilitate a sistemelor de tracțiune sau a tipurilor de locomotive, stabilirea numărului de încrucișări în baza graficelor de circulație nu este întotdeauna posibilă. Aceasta, deoarece întocmirea graficelor de circulație pentru un număr mai mare de variante necesită un volum mare de lucru.

În scopul reducerii volumului de lucru, pentru determinarea numărului de încrucișări, se folosesc formule stabilite pe cale analitică.

Numărul de staționări ale unei perechi de trenuri pentru depășiri și încrucișări, la circulația pe liniile simple și pentru graficul obișnuit, se poate determina cu relația :

$$n_s = \frac{[N_m + (1+\varphi) N_c] 60\, s}{1440\, V_s} - \left(1 + \frac{\lambda N_c}{N_m}\right)\beta, \tag{4}$$

în care :

N_m — numărul de perechi de trenuri de marfă ;
N_c — numărul de perechi de trenuri de călători ;
φ — raportul între timpul cît se află pe secție o pereche de trenuri de călători și timpul cît se află pe secție o pereche de trenuri de marfă ;
λ — coeficient, care ține seama de suprapunerile dintre încrucișări și depășiri ;
β — coeficient de corecție, care ține seamă de raportul nemultiplu între timpii de mers ai trenurilor de marfă și intervalul dintre trenuri. β poate avea valori cuprinse între 0 și 1.

Pentru calculele tehnico-economice, ultimul termen al relației (4) poate fi considerat ca fiind egal cu unitatea și, în acest caz, se poate scrie :

$$n_s = \frac{[N_m + (1+\varphi) N_c]\, 60\, s}{1440\, V_s} - 1. \tag{5}$$

Numărul opririlor trenurilor (fără staționările pentru operațiuni tehnice) pentru graficul în pachet se poate determina cu relația :

$$n_0 = \frac{[(0{,}75 - 0{,}5\, K^2) N_m + (1+\varphi) N_c]\, 60\, s}{1440\, V_s}, \tag{6}$$

în care :

K — coeficient mediu de circulație în pachet a trenurilor.

Numărul opririlor trenurilor în stațiile intermediare de pe liniile duble, ce revin unui tren dintr-un sens dat (fără staționările pentru operațiuni tehnice), se poate determina cu relația :

$$n_0 = \frac{(1-\varphi) N_c\, 60\, s}{1440\, V_s} - \frac{N_c}{N_m}. \tag{7}$$

Opririle trenurilor în stațiile intermediare pentru operațiile tehnice se prevăd în graficul de circulație, în funcție de lungimea secției, tipul locomotivelor și profilul liniei. Operațiile tehnice care se fac sînt : alimentarea cu apă, curățirea focului locomotivelor cu abur, proba frînelor înaintea pantelor lungi și cu declivitate mare, atașarea la tren și detașarea de la tren a locomotivelor suplimentare, etc.

Cunoscîndu-se numărul de opriri ale trenurilor în stațiile intermediare, timpii de staționare, de demarare și de frînare, în prezenta lucrare se stabilesc relații matematice, cu ajutorul cărora se pot calcula vitezele comer-

ciale de secție ale trenurilor de marfă, pentru graficele simple și în pachet, pentru toate sistemele de tracțiune, astfel :

a) Prin înlocuirea numărului de încrucișări determinat cu relația (4) în relația (3), se obține relația cu ajutorul căreia se poate determina viteza comercială de secție, la circulația trenurilor pe liniile simple și pentru graficul obișnuit :

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c](t_d + t_f + t_s)}{1440 + \frac{24\, V_m}{s}\left[n_t (t_t + t_d + t_f) - \beta\left(1 + \frac{\lambda N_c}{N_m}\right)(t_d + t_f + t_s)\right]} \tag{8}$$

Timpul de staționare pentru operațiile tehnice poate fi egal, mai mare sau mai mic decît timpul de staționare pentru încrucișare.

Pentru cazul cînd $t_s \neq t_t$ și $n_t > 1$, viteza de secție se poate calcula cu relația (8).

In diversele cazuri particulare, relația (8) se simplifică. Așa de exemplu :

— pentru $t_t = t_s$ și $n_t > 1$

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c](t_d + t_f + t_s)}{1440 + \frac{24\, V_m}{s}(n_t - \delta)(t_d + t_f + t_s)} . \tag{9}$$

unde : $\delta = \beta\left(1 + \lambda \frac{N_c}{N_m}\right)$;

— pentru $t_t = t_s$ și $n_t = \delta$

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c](t_d + t_f + t_s)}{1440} ; \tag{10}$$

— pentru $n_t = 0$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c](t_d + t_f + t_s)}{1440 - \frac{24\, V_m}{s}\delta (t_d + t_f + t_s)} . \tag{11}$$

In cazul cînd se consideră că ultimul termen din relația (4) este egal cu unitatea, prin înlocuirea numărului de încrucișări din relația (3) cu cel dat de relația (5), se obține :

— pentru $t_t \neq t_s$ și $n_t > 1$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c](t_s + t_d + t_f)}{1440 + \frac{24\, V_m}{s}[n_t (t_t + t_d + t_f) - (t_s + t_d + t_f)]} \tag{12}$$

— pentru $t_t = t_s$ și $n_t > 1$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - [(N_m + (1+\varphi) N_c] (t_s + t_d + t_f)}{1440 + \frac{24 V_m}{s} (n_t - 1) (t_s + t_d + t_f)}; \quad (13)$$

— pentru $n_t = 0$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - [N_m + (1+\varphi) N_c) (t_s + t_d + t_f)}{1440 - \frac{24 V_m}{s} (t_s + t_d + t_f)}; \quad (14)$$

— pentru $t_t = t_s$ și $n_t = 1$, se obține relația (10).

b) Viteza comercială de secție la circulația trenurilor de marfă în pachet, pe liniile simple, se obține în mod similar, însă prin înlocuirea numărului de încrucișări, determinat cu relația (6), în relația (3), astfel:

$$V_s = V_m \frac{1440 - [(0{,}75 - 0{,}5 K^2) N_m + (1+\varphi) N_c] (t_s + t_d + t_f)}{1440 + n_t \frac{24 V_m}{s} (t_t + t_d + t_f)} \quad (15)$$

În particular, cînd $n_t = 0$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - [(0{,}75 - 0{,}5 K^2) N_m + (1+\varphi) N_c] (t_s + t_d + t_f)}{1440}. \quad (16)$$

c) Viteza comercială de secție a trenurilor de marfă, la circulația pe linii duble, se obține prin înlocuirea numărului de opriri determinat cu relația (7), în relația (3), deci:

$$V_s = V_m \frac{1440 - (1-\varphi) N_c (t_s + t_d + t_f)}{1440 + \frac{24 V_m}{s} [n_t (t_t + t_d + t_f) - \alpha (t_s + t_d + t_s)]}, \quad (17)$$

unde s-a notat:

$$\alpha = \frac{N_c}{N_m}.$$

Pentru anumite cazuri particulare, relația (17) se simplifică astfel:

— pentru $t_t = t_s$ și $n_t \neq 0$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - (1-\varphi) N_c (t_s + t_d + t_f)}{1400 + \frac{24 V_m}{s} (n_t - \alpha) (t_s + t_d + t_f)}; \quad (18)$$

— pentru $n_t = 0$,

$$V_s = V_m \frac{1440 - (1-\varphi) N_c (t_s + t_d + t_f)}{1440 - \frac{24 V_m}{s} \alpha (t_s + t_d + t_f)}. \quad (19)$$

Concluzii :

Viteza comercială de secție fiind unul din cei mai importanți indici de organizare a circulației trenurilor, determinarea sa are o importanță deosebită pentru calculele tehnico-economice, efectuate cu ocazia analizelor comparative a sistemelor de tracțiune sau tipurilor de locomotive.

La efectuarea unor astfel de analize, determinarea vitezelor comerciale de secție în baza graficelor de circulație, practic, nu este posibilă.

În aceste cazuri, se pot folosi relațiile (8) ÷ (19) pentru stabilirea vitezelor comerciale de secție, pentru diferitele situații întîlnite în exploatarea căilor ferate, pe liniile simple sau duble. Dintre acestea, relațiile (8), (9), (10), (12), (13), (15), (17) și (18) se folosesc în cazul tracțiunii cu abur sau în cazul tracțiunii diesel sau electrice cînd se impun staționări suplimentare pentru revizii tehnice, iar relațiile (11), (14), (16) și (19) se folosesc pentru tracțiunea diesel și electrică cînd nu se fac opriri suplimentare pentru reviziile tehnice.

Viteza comercială de magistrală se poate determina tot în baza relațiilor de mai sus, dacă se are în vedere și staționările în stațiile de dispoziție.

Aceste relații se pot utiliza pentru efectuarea calculelor tehnico-economice, precum și în unele probleme de organizare a circulației trenurilor.

Catedra material rulant
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Tomescu* – Tehnica efectuării transporturilor pe căile ferate. Editura Transporturilor și Telecomunicațiilor, București, 1960.

2. *А. Попа* — К вопросу о выборе вида тяги для основных магистралей РЖД. МИИТ— Москва, 1963.

3. *А. Ф. Кочнев* — Организация движения на железнодорожном транспорте. Трансжелдориздат, 1958.

4. — *Г. И. Черномордик, И. Т. Козлов, С. Б. Козин* — Аналитичский способ определения угастковой скорости движения поездов. Транспортное строительство № 1, 1960.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 9130

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 JUN 1

F 1130

R

REFERÁLVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII NUMĂRUL 4 ANUL 1965
IULIE—AUGUST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 4

IULIE — AUGUST
1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. Dr. *I. S. Antoniu,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. *G. Bărănescu,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Acad. Prof. *M. Bercovici ;* Prof. Dr. *E. Bratu,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. *Gh. Buzdugan,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli ;* Conf. *S. Călin,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu ;* Prof. *S. Gîdea ;* Conf. *I. Grădișteanu,* cand. Șt. Ec. ; Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. *Gh. Manea ;* Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea ;* Prof. *N. Marinescu,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu ;* Prof. *C. Penescu,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet ;* Prof. *A. Rău ;* Prof. *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. Dr. *R. Voinea,* membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

C. Ionescu-Bujor
Sur les transformations optiques de l'espace 17

M. Șt. Botez
Asupra unei clase de suprafețe cubice 35

Gh. D. Simionescu
O generalizare a formulei creșterilor finite. Consecințe 41

MECANICĂ

N. I. Manolescu, M. Dranga
Asupra ecuației curbei polului de inerție în cinematica și dinamica mecanismelor 47

TEHNOLOGIA CHIMICĂ

R. Dinescu, M. Thaler, M. Cerchez
Sur les methodes de determination de la resistance des emaux a la corrosion 67

ORGANE DE MAȘINI

M. Renert, H. Ionescu
Contribuții la teoria mașinii de extrudere cu un melc 79

J. Magyar
Cu privire la angrenajul melcat cilindric 91

TERMOTEHNICĂ

V. Radcenco
Analiza termodinamică a diagramei teoretice de funcționare a detentorului cu piston 103

MAȘINI TERMICE

N. Apostolescu
Considerații asupra desfășurării arderii în motoarele cu aprindere prin comprimare rapide cu injecție directă 121

ELECTRONICĂ

M. Drăgănescu
Частотные свойства идеального диэлектрического диода при малых сигналах 131

G. Rulea
Relații pentru determinarea directă a elementelor unei matrice pătratice de ordinul doi ridicată la puterea n și aplicarea lor în teoria rețelelor electrice lineare 139

Резюме

Д. К. 512.8

К. Ионеску-Бужор

Об оптических преобразованиях в пространстве (II)

Эта работа продолжает работу, опубликованную в „Бюллетене Политехнического Института Бухареста", том XXVII, выпуск 2.

Автор определяет переобразовние L через собирающую линзу в пространстве как произведение преобразований. Множество $[l]$ переобразований через собирающую линзу в пространстве, определенные одним и тем же цетром 0 являтся коммутативной группой.

Если $[i]$ и $[h]$ являются инверсиями и гомотет ями с одинаковым центром 0, если $[r]$ множество вращений, определенные при помощи конкурирующих в точке 0 прямых, тогда множество:

$$[l] \cup [r] \; u \; [h] \cup [lr] \cup [lh] \cup [rh] \cup [lrh]$$

совершенно симметричная группа в отношении $[r] \cup [h] \cup [rh]$.

Если $[I]$ множество инверсий в пространстве и $[G]$ главная группа эвклидовой геометрии пространства, тогда множества:

$$[I], [IG], [I \cup [G] \cup [IG]], [L], [LG], [L \cup [G] \cup [LG]]$$

будут совершенно симметричными в отношении $[G]$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 515

М. Ст. Ботез

Относительно одного класса кубических поверхностей

Автор рассматривает поверхности, полученные путем оптического превращения $\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v} \operatorname{grad} r) \operatorname{grad}, r$ показывая, что эти поверхности являются твердыми и что кубическая поверхность, полученная путем конвергентной трансляции и предложенная Бужором Р. Ионеску, допускает единое направление, которому соответствует диаметральная сопряженная плоскость.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 512.8

Г. Д. Симионеску

Обобщение формулы

Если между точками a и b находятся точки a_1, a_2, a_{n-1} интервал (a, b) разделен на n интервалов. Применяя теорему Релле к каждому случаю, мы получим формулу, которая обобщает формулу Лангранжа. Для случая $n = 2$ формула имеет простое геометричечкое объяснение, что позволяет установить (прямым путем) связь между вырезом кривой в какую-то точку и знак второй производной в этой точке. С помощью формулы обобщения можно прямо определить производную порядка n (если она имеется) для определенной функции в определенном пункте.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Summary

D. C. 512.8

C. Ionescu-Bujor

Optical Transformations in the Space (II).

This paper is the sequel of the note published in Bul. Inst. Politehn. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Buc. Tom. XXVII, Nr. 2.

The author defines the transformation L by convergent lens in the space as a product of transformations. The set of transformations of the space by lens, determined by the same center O is a commutative groupe.

If $[I]$ is the set of inversions of the space and $[G]$ the principal group of Euclid's geometry of the space, then the sets:

$$[I], [IG], [I] \cup [G] \cup [IG], [L], [LG], [L] \cup [G] \cup [LG]$$

are perfectly symmetrical in connexion with $[G]$.

If $[i]$ and $[h]$ are the sets of inversions and of homothetic transformations with the same centre O, if $[r]$ is the set of rotations determined with straight lines of the space which contains the point O, then

$$[l] \cup [r] \cup [h] \cup [lr] \cup [lh] \cup [rh] \cup [lrh]$$

is a group perfectly symmetrical in connexion with $[r] \cup [h] \cup [rh]$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 515

M. Şt. Botez

On a Class of Cubic Surfaces.

The author considers the surfaces resulted from the optical transformation: $\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v}\ \text{grad}\ r)\ \text{grad}\ r$ showing that these surfaces are rigid and that the cubic surface obtained by the convergent translation studied by C. Ionescu Bujor, admits a single direction to which a principal diametrally conjugated plan is corresponding.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 512.8

Gh. D. Simionescu

A Generalization of the Finite Increment Formula. Consequences.

If between a and b we consider the points a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$, the interval (a, b) is divided into subintervals. Applynig Rolle's theorem to each of them it comes to a formula which generalizes Lagrange's formula. For $n=2$ the formula has a simple geometrical interpretation which permits to establish directly the connection between the concavity of a curve in a point and the sign of the second derivative in that point. By means of the generalized formula the t order derivative, if it exists, of a function in a given point may be directly defined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 621.8.02

Н. И. Манолеску М. Дранга

В связи с уравнением кривой полюса инерции в плоскостном движении.

После обобщенного изложения исследований, имеющихся в этой области, различными исследованиями выводится уравнение в неподвижной плоскости кривошипной полости инерции в случае шатуна мотора кривошипного шатуна.

С этой целью используется полость P_1: в качестве центра движения шатуна в соответствие с точкой W' (точка пересечения прямой WG с кругом перегибов, где W центр перегибов, а G центр тяжести шатуна.

В работе сравниваются результаты, полученные аналитическим путем с результатами точных графических конструкций или с приблизительным методом, предложенным О. Толле.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 666.2 : 620.19

Р. Динеску, М. Талер, М. Черкез

Относительно методов определения сопротивления коррозии эмалей.

В работе исследуется сопротивление коррозии эмалей и способ ее проявления. Поскольку коррозия зависит и от состава эмалей, и от величины и от природы атакуемой поверности, предлагается отношение степени коррозии к специфической поверхности расплавленных зерен.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 678.057

М. Ренерт Х. Ионеску

Вклад в теории червячного экструдера (способы)

Уравнение движения расплава термопластического материала в винтовой канавке интегрируется для общего случая его ненютонского поведения. Подобие реологического показателя с нечетным числом, физически оправдаемое, — оправдыется и с математической точки зрения. Определяются поправочные факторы, которые должны входить в уравнение упрощенной теории экструзии для того, чтобы поднять их степень приближения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 515

Ж. Магяр

Относительно червячного цилиндрического зацепа

Излагается порождение винтовых рифленых поверхностей и устанавливаются характерные геометрические элементы этих поверностей с целью доказания ясного отношения применяемого расчета геометрнческих параметров режущих инструментов как для стандартизированных цилиндрических червяков — так и для нестандартизованных.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 621.8.02

N. I. Manolescu, M. Dranga

On the Equation of the Inertia Pole Curve in the Plane Motion.

After briefly presenting the investigations carried but by different researchers, the authors establish the equation in the fixed plane of the inertia pole curve in the case of a connecting rod of a crank system engine. For that is used the property of the inertia pole P_1 as a centre of the connecting rod oscillation against the point W' (the point of intersection of the straight line $W.G.$ with the circle of inflexions where W is the centre of inflexions and G the gravity centre of the connecting-rod). The positions obtained by the analytical method are compared after that with those resulted from the exact graphic constructions or with the approximate method suggested by O. Tolle.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 666.2:620.19

R. Dinescu, M. Thaler, M. Cerchez

On the Methods of Determining the Corrosion Resistance of Enamels.

The work studies the corrosion resistance of the enamels and the means of expressing it. As the corrosion depends, besides the composition of the enamel on the nature and size of the attacked surface, the author suggests to refer the corrosion degree to the specific surface of the melted grains.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 678.057

M. Renert, H. Ionescu

On the Theory of the Single-screw Extruder.

The differential equation for flow in the screw channel is integrated for the general case of a non-Newtonian polymer melt (power-law assumed). The assimilation of the flow index to an uneven number, already justified from the physical point of view, is now mathematically discussed and justified. Formulas are established for the correction factors to be used in the equations of the simplified extruder theory, in order to improve their degree of approximation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 515

J. Magyar

On the Cylindrical Worm-Gear.

The generation of ruled helicoidal surfaces are shown and the geometrical elements characteristic of these areas are established, in view of demonstrating some explicit relations appliable to the calculus of the geometrical parameters of cutting tools, both for the standard cylindrical worm -gears and for the non-standard ones.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 536.7

В. Радченко

Термодинамический анализ теоретической диаграммы поршневого детандера

В статье устанавливаются общие выражения адиабатного энеропийного теоретического к. п. д. теоретического расхода удельной и общей теоретической холодопроизводительности поршневого детендера.

В частности получаются выражения тех же величин, характеризующие работу экспериментальных прямоточных поршневых детандеров.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 621.43-4

Н. Апостолеску

Некоторые соображения относителльно протекания горения в быстрых двигателях с зажиганием путём сжатия с прямым впрыском

На основе имеюшегося экспериментального материала в работе исследуются некоторые вопросы развития горения в моторе с зажиганием путём сжатия. Выявляются различные механизмы, по которым протекает горение в различных его фазах.

На основании этого автор высказывает некоторые новые соображения относительно разделения на фазы процесса горения в двигателе с зажиганием путём сжатия.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 621.385

М. Дрэгэнеску

Частотные особенности идеального диэлектрического диода при малых сигналах

В работе излагается теория диэлектрического диода при малых сигналах с помощью прямого метода — более простого чем метод, используемый Ж. Шао и Г. Т. Райт (6).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Д. К. 621.311.1

Г. Руля

Соотношение для прямого определения элементов квадратной матрицы второго порядка в степени „n" и применение их в теории линейных электрических сетей

Матричное исчисление широко применяется при изучении симметричных и ассимметричных четырехполюсников. В работе приводится метод расчета относительно цепи идентичных четырехполюсников, то эквивалентная переходная матрица цепи определяется как матрица одного четырехполюсника „n".

Приводятся формулы прямого расчета для эквивалентой матрицы. Доказано, что эти формулы можно получить на основании теории Гамильтон-Кейлей и Сильвестра.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 536.7

V. Radcenco

The Thermodynamic Analysis of the Theoretical Diagram of the Working of the Piston Detentor.

In the present paper, the general expressions of the adiabatic and theoretic entropy efficiency of he theoretical specific frigorific capacity of gas, of the theoretical flow of gas and of the theoretical frigorific capacity of the piston detentor are established. By means of particularization ore obtained the expression of the same magnitude characterizing the working of the experimental piston detentors in uniflow.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D.C. 621.43-4

N. Apostolescu

Considerations on the Development of the Combustion in Motors with Rapid Compression Ignition, with Direct Injection.

On the basis of the existing experimental material, in the paper are discussed some aspects of the combustion development in motors with rapid compression ignition. The author emphasizes the various devices, by means of which the combustion develops in its different stages. Some new considerations regarding the division of the combustion, in the motor with ignition by compression, into combustion stages, are made on this basis.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 621.385

M. Drăgănescu

Frequency Poperties of the Ideal Dielectric Diode at Small Signals.

In the paper is presented the theory of the ideal dielectric diode. at small signals, using a direct method simpler than that used by J. Shao and G. T. Wright.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. C. 621.311.1

G. Rulea

Relations for Directly Determining the Elements of Second Order Square Matrix Raised to the n Power and their Application to the Linear Electrical Network Theory.

The matrix calculus is widely applied in the study of symmetrical and asymmetrical quadripoles. In this paper a calculus method referring to the chain of identical quadripoles is described. If there are n identical quadripoles in the chain, the transfer matrix equivalent to the chain is given by the matrix of a quadripole to the n power. The formulas of direct calculus for the equivalent matrix terms are given. The author demonstrates that these formulas may be obtained on the basis of Hamilton-Cayley's and Sylvester theorems.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Résumé

C. D. 512.8

C. Ionescu-Bujor

Sur les transformations optiques de l'espace (II).

Ce travail est la suite de la note publiée dans Bul. Inst. Politehn. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 2.

L'auteur définit la transformation L par lentille de l'espace comme un produit de transformations. L'ensemble $[l]$ des transformations par lentilles de l'espace déterminées par le même centre O est un groupe commutatif.

Si $[I]$ est l'ensemble des inversions de l'espace et $[G]$ le groupe principal de la géométrie euclidienne de l'espace, alors les ensembles :

$$[I], [IG], [I] \cup [G] \cup [IG], [L], [LG], [L] \cup [G] \cup [LG]$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[G]$.

Si $[i]$, $[h]$ sont les inversions et les homothéties qui ont le même centre O, si $[r]$ est l'ensemble des rotations déterminées par les droites de l'espace qui contiennent le point O, alors

$$[l] \cup [r] \cup [h] \cup [lr] \cup [lh] \cup [rh] \cup [lrh]$$

est un groupe parfaitement symétrique par rapport $[r] \cup [h] \cup [rh]$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 515

M. Şt. Botez

Sur une classe de superficies cubiques.

L'auteur prend en considération les superficies résuliées par la transformation optique $\overline{r_1} = \overline{r} - (\overline{v}\ \text{grad}\ r)\ \text{grad}\ r$ en montrant que ces superficies sont réglées et que la superficie cubique obtenue par la translation convergente exposée par Ionescu Bujor admet une direction unique à laquelle correspond un plan diamétral conjugué principal.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 512.8

Gh. D. Simionescu

Une généralisation de la formule des acroissements finis. Conséquences.

Si entre a et b on considère les points $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$, l'intervalle (a, b) est divisé en n sous-intervalles. En appliquant le théorème de Rolle à chacun d'entre eux on arrive à une formule qui généralise la formule de Lagrange. Pour $n = 2$, la formule a une interprétation géométrique simple qui perment d'établir, d'une manière directe la liaison entre la concavité d'une courbe dans un point et le signe de la dérivée II- dans ce point là. A l'aide de la formule, généralisée on peut définir directement la dérivée de l'ordre n- (si elle existe) d'une fonction dans un point donné.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

Zusammenfassung

D. K. 512.8

C. Ionescu-Bujor

Optische Transformationen im Raume (II).

Diese Anmerkung ist die Folge des Artikels, der in Bul. Inst. Politehn. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Buc., Tom. XXVII, Nr. 2, erschienen ist.

Der Verfasser erklärt die Transformation L durch Linse im Raume, wie ein Produkt von Transformationen. Die Menge $[I]$ der bestimmten von demselben Mittelpunkte O Transformationen durch Linse im Raume, ist eine kommutative Gruppe,

Sind $[I]$ die Menge der Inversionen des Raumes und $[G]$ die Hauptgruppe der euklidischen Geometrie im Raume, so die Mengen

$$[I], [IG], [I] \cup [G], \cup [IG], [L], [LG], [L] \cup [G] \cup [LG]$$

sind vollkommensymetrischen in Beziehung auf $[G]$.

Sind $[i]$ und $[h]$ die Inversionen und die Längenänderungen, die denselben Mittelpunkt haben, ist $[r]$ die Menge der bestimmten von den Geraden des Raumes den O gehört, Drehungen, so

$$[I] \cup [r] \cup [h] \cup [lr] \cup [lh] \cup [rh] \cup [lrh]$$

ist eine vollkommensymetrische Gruppe in Beziehung auf

$$[r] \cup [h] \cup [rh].$$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 515

M. Şt. Botez

Über eine Klasse von kubischen Oberflächen.

Der Autor betrachtet die durch die optische Veränderung erhaltenen Oberflächen $\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v} \text{ grad } r) \text{ grad } r$ und zeigt, dass die Oberflächen unbeweglich sind und dass die durch konvergente Translation erhaltene, von C. Ionescu Bujor vorgeschlagene kubische Oberfläche eine einzige Richtung erlaubt, der ein diametral verbundener Plan entspricht.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 512.8

Gh. D. Simionescu

Eine Verallgemeinerung der Formel der begrenzten Steigungen Folgen.

Wenn man zwischen a und b die Punkte $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ betrachtet, ist das Intervall (a, b) in n Teilintervalle eingeteilt. Durch Anwendung des Rolles'schen Theorems für jedes derselben, gelangt man zu einer Formel, welche die Lagrange'sche Formel verallgemeinert. Für $n=2$, besitzt die Formel eine einfache geometrische Darstellung, welche ermöglicht auf direktem Wege die Verbindung zwischen Konkavität einer Kurve in einem Punkt und das Zeichen der 2 ten Ableitenden in diesem Punkt, festzulegen. Mit Hilfe der verallgemeinerten Formel kann direkt die Ableitende der Ordnung n (wenn sie existiert) einer Funktion, in einem gegebenen Punkt definiert werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 521.8.02

N. I. Manolescu, M. Dranga

Sur l'équation de la courbe du pôle d'inertie dans le mouvement plane.

Après une présentation succinte des recherches entreprises dans ce domaine par divers rechercheurs, on établit l'equation dans le plan fixe de la courbe du pôle d'inertie dans le cas de la bielle d'un moteur bielle manivelle. A cette fin on emploie la propriété du pôle d'inertie P_1, comme centre d'oscillation de la bielle en rapport avec le point W (point d'intersection de la droite $W\ G$ avec le cercle des inflexions où W = centre des inflexions et G = centre de gravité de la bielle). Puis l'on compare les positions obtenues par voie analytique avec les positions résultées des constructions graphiques exactement ou par la méthode approximative proposée par O. Tolle.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 666.2:620.19

R. Dinescu, M. Thaler, M. Cerchez

Sur les méthodes de déterminer la résistance à la corrosion des émaux.

On étudie dans l'ouvrage la résistance à la corrosion des émaux et sa manière d'expression. Puisque la corrosion dépend à la fois de la composition de l'émail de la nature de la surface attaquée et des dimensions de l'émail, on propose de rapporter le degré de corrosion à la surface spécifique des grains fondus.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 678.057

M. Renert, H. Ionescu

Contributions à la théorie des extrudeuses à une vis.

L'équation du mouvement dans le canal hélicoidal est intégrée pour le cas général du comportement non newtonien de la masse fondue. L'assimilation de l'exponent rhéologique à un nombre impair, justifiée du point de vue physique, est justifiée mathématiquement. L'on établit les formules des facteurs de correction dont l'introduction dans les équations de la théorie simplifiée de l'extrusion améliore leur degré d'approximation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 515

J. Magyar

A l'égard de l'engrenage à limaçon cylindrique.

On expose comment les superficies hélicoidales réglées sont engendrées et on établit des éléments géométriques caractéristiques de ces superficies dans le but d'une démonstration explicite appliquable dans le calcul des paramètres, géométriques et des outils de coupe (taille) pour les limacons cylindriques standardisés tout aussi bien que pour ceux non standardisés.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 621.8.02

N. I. Manolescu, M. Dranga

Uber die Gleichung der Trägheitspolkurve.

Nach einer kurzen Einführung in die von verschiedenen Forschern auf diesem Gebiet unternommenen Forschungen, erfolgt die Fortetzung der Gleichung der festen Ebene des Trägheitspols im Falle der Treibstange eines Motors mit Treib-und Kurbelstange.

Zu diesem Zweck wird die Eigenschaft des Trägheitspols *Pi* als Schwingungszentrum der Treibstange im Verhältnis zum Punkte *W'* (Schneidepunkt der Geraden *WG* mit dem Wendepunktkreis, wobei *W* = Wendepunktekreis und *G* = Schwerpunkt der Treibstange) verwendet. Es werden darauf die auf analytischem Wege erhaltenen Stellungen mit denen aus den genauen graphischen Konstruktionen resultierenden, oder mit der von O. Tolle vorgeschlagenen Annäherungsmethode, verglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 666.2:620.19

R. Dinescu, M. Thaler, M. Cerchez

Uber die Methoden zur Bestimmung der Korrosionsbeständigkeit der Emaille.

In der Arbeit wird die Korrosionsbeständigkeit der Emaille und die Art ihrer Ausserung studiert. Da die Korrosion, neben der Zusammensetzung des Emaills, auch von der Art der angegriffenen Oberfläche abhängt, wird die Beziehung des Korrosionsgrades auf die spezifische Oberfläche der geschmolzenen Körner vorgeschlagen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 678.057

M. Renert, H. Ionescu

Beiträge zur Theorie des Einschnecken-Schmelzextruders.

Die Bewegungsgleichung der Schmelze im Schneckenkanal wird für den allgemeinen Fall der nichtnewtonschen, dem Potenzgesetz gehorchenden, Flüssigkeit, integriert. Die physikalisch berechtigte Betrachtung des Fliesswertes als ungerade Zahl wird auch mathematisch begründet. Es werden Ausdrücke für die Berichtigungsfaktoren ermittelt, deren Einführung in die Gleichungen der vereinfachten Extrudertheorie, ihren Annäherungsgrad erhöht.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 515

J. Magyar

In bezug auf das zylindrische Schneckengetriebe.

Es wird die Generierung der helikoidalen geregelten Oberflächen vorgeführt und die, diesen Oberflächen charakteristischen geometrischen Elemente zum Zweck der Beweisführung einer ausdrücklichen zur Berechnung der geometrischen Parameter und Schnittwerkzeugen anwendbaren Beziehung, sowohl für die standartisierten, als auch für die nichtstandartisierten zylindrischen Schneckenschrauben festgesetzt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 536.7

V. Radcenco

L'analyse thermodynamique de la diagramme théorique de fonctionnement du détenteur à piston.

On établit dans l'ouvrage les expressions générales du rendement adyabatique et entropique théorique, des capacités frigorifiques spécifiques théoriques du gaz, du débit théorique du gaz et de la capacité frigorifique théorique du détenteur à piston. En particularisant on obtient les expressions des mêmes dimensions qui caractérisent le fonctionnement des détenteurs à piston expérimentaux en équicourant.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C.D. 621.43-4

N. Apostolescu

Considérations sur la marche de la combustion dans les moteurs à allumage par compression rapide à injection directe.

Dans l'ouvrage on discute à partir du matériel expérimental existant, certains aspects de la marche de la combustion dans le monteur à allumage par compression. On met en évidence les différents mécanismes selon lesquels la combustion a lieu dans ses différents phases. Ensuite on fait de nouvelles considérations concernant la division par phases de la contribution dans les moteurs à allumage par compression.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 621.385

M. Drăgănescu

Propriétés de fréquence de la diode diélectrique idéale aux petits signaux.

L'ouvrage présente la théorie de la diode diélectrique idéale, utilisant une méthode directe plus simple que celle employée par I. Shao et G. T. Wright (6).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

C. D. 621.311.1

G. Rulea

Relations pour la determination directe des elements d'une matrice carré, de deuxième ordre, à la n puissance et leurs application dans la theorie des réseaux éléctriques lineaires.

Le calcul matriciel est frequement appliqué dans l'étude des quadripoles simétriques et asimétriques. On présente une méthode d'étude de la chaîne des quadripoles. La matrice de transfer de n quadripoles connectés en cascade est donnée par la matrice d'un quadripol multipliée n fais par elle-mêmes. On obtient des relations qui donnent les termes de la matrice équivalente. Les mêmes relations peuvent être obtenues en utilisant les théorèmes Hamilton-Cayely et Sylvester.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 536.7

V. Radcenco

Die thermodynamische Analyse des theoretischen Arbeitsdiagramms des Kolbendetentors.

In der Arbeit werden die allgemeinen Ausdrücke des adiabaten und theoretischen entropen Wirkungsgrades der theoretischen spezifischen Kühlwirkungsfähigkeit des Gases, der der theoretischen Gasmenge und der theoretischen Kühlwirkungsfähigkeit des Kolbendetentors aufgestellt.

Durch Vereigenheitlichung werden die Ausdrücke derselben Grössen erhalten, welche die Betätigung der Versuchsdetentoren mit Kolben in gleichartigem Strom auszeichnen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D.K. 621.43-4

N. Apostolescu

Betrachtungen über den Verbrennungsvorgang in den Motoren mit Schnelldruckzündung und direkter Einspritzung.

In der Arbeit werden auf Grund des vorhandenen Versuchsmaterials einige Erscheinungen des Verbrennungsvorganges in dem Druckzündungsmotor besprochen. Es werden die verschiedenen Mechanismen hervorgehoben, nach denen der Verbrennungsprozess in seinen verschiedenen Phasen verläuft. Auf dieser Grundlage werden einige neue Betrachtungen, was die Phaseneinteilung der Verbrennung im Druckverbrennungsmotor betrifft, angestellt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 321.385

M. Drăgănescu

Frequenzeigenschaften der idealen elektrischen Diode bei Kleinsignalen.

In der Arbeit wird die Theorie der idealen elektrischen Diode bei Kleinsignalen vorgeführt, indem eine direkte, einfachere Methode wie die von J. Shao und G. T. Wright (6) verwendete, angewendet wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

D. K. 621.311.1

G. Rulea

Beziehung für die direkte Bestimmung der Elemente einer zur Potenz *n* enhobenen Matritze zweiter Ordnund, und deren Anwendung in der Theorie der liniären elektrischen Netze.

Die Matritzenberechnung ist in grossem Masse beim Studium der simetrischen Vierpole angewendet. In der Arbeit wird eine Berechnungsmethode in Verbindung mit der Kette der identischen Vierpole, vorgeführt. Wenn sich in den Ketten identische Vierpole befinden, so ist die der Kette äquivalente Übergangsmatritze durch die Matritze eines Vierpols der Potenzen gegeben. Es werden Formeln für die direkte Berechnung der Ausdrücke der äquivalenten Matritze gegeben

Es wird bewiesen, dass diese Formeln auf Grund der Lehrsätze (Theoremen) von Hamilton-Cayley und Sylvester erhalten werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 4/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

MATEMATICĂ

C. Z.: 512.8

SUR LES TRANSFORMATIONS OPTIQUES DE L'ESPACE

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

II

Les transformations par lentilles de l'espace

26°. *Définitions. La transformation par lentille de l'espace est une transformation ponctuelle L, déterminée, par un point O, un vecteur* $\bar{v}$ *et un nombre réel* λ, *telle que*

$$L = I T I, \tag{27}$$

où T est la translation convergente dont le centre est O et le vecteur $\bar{v}$, *I est l'inversion qui a O comme centre et* λ *comme puissance.*

Les éléments, O, $\bar{v}$, λ sont *le centre*, *le vecteur* et *le module* de la transformation L.

La droite Of, parallèle au vecteur $\bar{v}$ est *l'axe de la transformation par lentille* considérée. Le plan π perpendiculaire à $\bar{v}$, qui passe par O, est *la lentille de la transformation. Si* $\overline{OF'} = \bar{v}$, le transformé F du point F' par I est *le foyer de la transformation par lentille.*

27°. *L'ensemble des transformations par lentilles de l'espace, qui ont le même centre, est un groupe commutatif.*

Soit $[l]$ l'ensemble des transformations par lentilles de l'espace, qui ont le même centre O.

a) *La transformation* $l_0 \in [l]$, *déterminée par le vecteur nul et par un nombre réel* λ, *est une transformation identique.*

Soit I l'inversion de centre O et de puissance λ, t_0 la translation convergente qui a O comme centre et le vecteur nul (t_0 est une transformation identique). Comme

$$l_0 = I t_0 I \text{ et } t_0 = 1, \text{ on a } l_0 = 1.$$

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest, 22—23 février 1964.

b) *Si* $l \in [l]$ *est déterminée par le vecteur* $\bar{v}$ *et le module* λ, *alors* l^{-1} *est une transformation par lentille déterminée par le centre* O, *le vecteur* $-\bar{v}$ *et le nombre* λ, *donc* $l^{-1} \in [l]$.

Considérons la translation convergente t, déterminée par le centre O et le vecteur $\bar{v}$, l'inversion I qui a O comme centre et λ comme puissance.

On a

$$l = I t I .$$

Mais O et $-\bar{v}$ déterminent $\{\S 3°, b\}$ la translation convergente t^{-1}, donc on a $l' \in [l]$ définie par

$$l' = I t^{-1} I .$$

Il résulte

$$l' l = (I t^{-1} I)\ (I t I) = 1 ,$$

donc $l^{-1} = l'$.

c) *Le produit* $l_2 l_1$ *des transformations par lentilles de l'espace* l_1, l_2 *ayant le même centre* O, *déterminées par les vecteurs* $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *et par les modules* λ_1, λ_2 *est équivalent à une transformation par lentille* l, *dont le centre est* O, *le vecteur* $\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 \bar{v}_1 + \lambda_1 \bar{v}_2)$ *et le module* λ_2.

On désigne par t_1, t_2 les translations convergentes déterminées par le centre O et les vecteurs $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, puis par I_1, I_2 les inversions ayant O comme centre et les puissances λ_1, λ_2. Alors

$$l_1 = I_1 t_1 I_1 \quad , \quad l_2 = I_2 t_2 I_2 ,$$

donc

$$l_2 l_1 = I_2 t_2 h\ t_1 I_1 , \tag{28}$$

car $I_2 I_1$ est équivalent à une homothétie h dont le centre est O et le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Comme le groupe $[t]$ des translations convergentes, qui ont le même centre O, est parfaitement symétrique $\{\S 23°\}$ par rapport au groupe $[h]$ des homothéties de centre O, on a $t_3 \in [t]$ telle que

$$h t_1 = t_3 h .$$

La translation convergente t_3 est déterminée par le vecteur $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{v}_1$. Donc

$$l_2 l_1 = I_2 t_2 t_3 h I_1 .$$

Mais $t_2 t_3$ est équivalent à une translation convergente $t\{6, \S 3°, c\}$ qui a O comme centre et

$$\bar{v} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{v}_1 + \bar{v}_2 ,$$

comme vecteur, puis $hI_1 = I_2$, donc

$$l_2 l_1 = I_2 t I_2 .$$

Comme le produit $I_2 t I_2$ définit une transformation par lentille l ayant O comme centre, $\overline{v} = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 \overline{v}_1 + \lambda_1 \overline{v}_2)$ comme vecteur et λ_2 comme module, il résulte

$$l_2 l_1 = l , \quad \text{où} \quad l \in [l] .$$

d) *On peut considérer la transformation l déterminée par le vecteur* $\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 \overline{v}_1 + \lambda_1 \overline{v}_2)$ *et par le module* λ_1.

En effet, on peut déterminer $t_4 \in [t]$ telle que

$$t_2 h = h t_4 .$$

Il résulte que t_4 est la correspondante de la transformation t_2 par rapport à h^{-1}, l'homothétie de centre O, ayant $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overline{v}_2$ comme vecteur.

On déduit de (28)

$$l_2 l_1 = I_2 h t_4 t_1 I_1 .$$

Mais $t_4 t_1$ est équivalent à la translation convergente t' qui a O comme centre et le vecteur

$$\overline{u} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overline{v}_2 + \overline{v}_1 .$$

En ayant $I_2 h = I_1$, on obtient

$$l = I_1 t' I_1 ,$$

à savoir l est déterminée aussi par le centre O, le vecteur

$$\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 \overline{v}_1 + \lambda_1 \overline{v}_2)$$

et le module λ_1.

e) *Le produit $l_2 l_1$ est commutatif.*

La propriété exprimée à (§ 27°, c) justifie l'équivalence du produit $l_1 l_2$ à la transformation par lentille l'' déterminée par le centre O, le vecteur $\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 \overline{v}_1 + \lambda_1 \overline{v}_2)$ et le module λ_1. Par conséquent $l'' = l$, donc

$$l_1 l_2 = l_2 l_1 .$$

f) *L'ensemble des transformations par lentilles de l'espace, déterminées par le centre O et les vecteurs de l'espace parallèles à un même plan P est un sous-groupe du groupe $[l]$.*

L'ensemble des transformations par lentilles de l'espace, déterminées par le centre O et par les vecteurs de l'espace qui ont la même direction Δ, est un sous-groupe de $[l]$.

28°. *Transformations équivalentes du groupe $[l]$.*

a) *Etant données dans l'espace deux transformations par lentilles l_1, l_2 ayant O comme centre, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ comme vecteurs et les modules λ_1, λ_2, la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence de ces transformations est*

$$\frac{1}{\lambda_1}\bar{v}_1 = \frac{1}{\lambda_2}\bar{v}_2 . \tag{29}$$

La condition est suffisante. On considère la transformation l_2^{-1}. Elle a en O le centre, le vecteur $-\bar{v}_2$ et le module λ_2. Alors $l_2^{-1}l_1$ est équivalent (§ 27°, c) à une transformation par lentille l déterminée par le centre O, le vecteur

$$\bar{v} = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2\bar{v}_1 - \lambda_1\bar{v}_2) \tag{30}$$

et le module λ_2. La relation admise (29) montre que $\bar{v}$ est nul, donc $l=1$. De $l_2^{-1}\,l_1 = 1$, on déduit $l_1 = l_2$.

Donc $[l]$ contient des transformations équivalentes.

La condition est nécessaire. Si $l_1 = l_2$, on a $l_2^{-1}\,l_1 = 1$, donc le vecteur $\bar{v}$ est nul. Alors on a la relation (29).

b) *Conséquence. Une transformation par lentille l de l'espace, déterminée par le centre O, le vecteur $\bar{v}$ et le module λ est équivalente à la transformation par lentille l^* ayant O comme centre, le module 1 et le vecteur* $\frac{1}{\lambda}\bar{v}$.

Comme suite, si I^* est l'inversion qui a le centre en O et le module 1, si t est la translation convergente dont le centre est O et le vecteur $\frac{1}{\lambda}\bar{v}$, on a

$$l = I^* t I^* .$$

Donc chaque transformation par lentille qui a le centre en O s'exprime à l'aide de l'inversion I^*.

29°. *Sur les produits des transformations par lentilles de l'espace.*

Soit $[l]$ le groupe des transformations par lentilles de l'espace, qui ont le même centre O. Si $l_i \in [l]$ est la transformation par lentille déterminée par le vecteur $\bar{v}_i$ et par le module λ_i, t_i la translation convergente

ayant O comme centre et le vecteur $\frac{1}{\lambda_i}\bar{v}_i$, I^* *l'inversion dont le centre est O et la puissance 1, alors le produit*

$$\prod_{i=1}^{n} l_i = l_1 l_2 \ldots l_n$$

est équivalent à une transformation par lentille $l^* \in [l]$ *telle que*

$$l^* = I^* t I^*,$$

où $t = \prod_{i=1}^{n} t_i$ *représente la translation convergente de centre O et vecteur* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\bar{v}_i$.

Si

$$l_i^* = I^* t_i I^*,$$

on a

$$l_i^* = l_i,$$

donc

$$\prod_{i=1}^{n} l_i = \prod_{i=1}^{n} (I^* t_i I^*) = I^* \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right) I^* = I^* t I^*.$$

Conséquence.

$$\text{Si} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\bar{v}_i = 0, \quad \text{alors} \quad \prod_{i=1}^{n} l_i = 1.$$

30°. *Classes de transformations equivalentes du groupe [l].*
Il résulte de (§ 28°) :

Une transformation l par lentille de l'espace, ayant O comme centre, $\bar{v}$ *comme vecteur et le module* λ, *est équivalente à toute transformation par lentille qui a le même centre, le vecteur* $k\bar{v}$ *(k paramètre réel), le module* $k\lambda$ *et seulement aux transformations par lentilles de centre O déterminées de cette manière.*

Donc, si $l^*(\bar{v})$ est la transformation par lentille ayant le centre O, le vecteur $\bar{v}$ et le module 1, il y a des transformations par lentilles qui ont leur centre en O, équivalentes à $l^*(\bar{v})$. Ces transformations ont $\lambda\bar{v}$ comme vecteur (λ paramètre) et λ comme module. Il n'y a pas d'autres transformations centrées en O qui soient équivalentes à $l^*(\bar{v})$.

Soit $[l^*]$ l'ensemble des transformations par lentilles de l'espace dont le centre est O et le module 1. Cet ensemble est un groupe commutatif isomorphe au groupe des translations de l'espace, car on a

$$l^*(\bar{u}) \cdot l^*(\bar{v}) = l^*(\bar{u} + \bar{v}).$$

Soit $[l^*(\bar{v})]$ l'ensemble des transformations par lentilles de l'espace ayant le centre en O, équivalentes à $l^*(\bar{v})$. Deux ensembles $[l^*(\bar{u})]$, $[l^*(\bar{v})]$ qui correspondent à $\bar{u} \neq \bar{v}$ sont disjoints.

Ainsi le groupe $[l]$ des transformations par lentilles de l'espace qui ont le centre en O est décomposé en classes de transformations équivalentes. Le groupe facteur de $[l]$ est isomorphe à $[l^*]$.

31°. *Expression vectorielle des transformations par lentilles de l'espace.*

Si L est la transformation par lentille de l'espace, déterminée par le centre O, le vecteur $\bar{v}$ et le module λ, elle transforme un point quelconque $M(\overline{OM} = \bar{r})$ en $M_1(\overline{OM}_1 = \bar{r}_1)$ tel que

$$\bar{r}_1 = \frac{\lambda}{\lambda - \bar{v} \cdot \bar{r}} \bar{r}. \tag{31}$$

Considérons la translation convergente T déterminée par le centre O et le vecteur $\bar{v}$, l'inversion I ayant comme centre O et la puissance λ. Alors

$$L = ITI$$

et les points O, M, M_1 sont en ligne droite. L'inversion I transforme M en $M_2(\overline{OM}_2 = \bar{r}_2)$ tel que

$$\bar{r}_2 = \frac{\lambda}{r^2} \bar{r}. \tag{32}$$

La translation convergente T transforme M_2 en $M_3(\overline{OM}_3 = \bar{r}_3)$; donc

$$\bar{r}_3 = \bar{r}_2 - (\bar{v} \text{ grad } r_2) \text{ grad } r_2.$$

Mais

$$\text{grad } r_2 = \varepsilon \text{ grad } r = \varepsilon \frac{\bar{r}}{r}, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Il résulte

$$\bar{r}_3 = \frac{1}{r^2} (\lambda - \bar{v} \cdot \bar{r}) \bar{r}. \tag{33}$$

Enfin I transforme le point M_3 en M_1. On a

$$\bar{r}_1 = \frac{\lambda}{r_3^2} \bar{r}_3$$

et parceque

$$r_3 = \frac{1}{r}(\lambda - \bar{v}\cdot\bar{r}),$$

on déduit

$$\bar{r}_1 = \frac{\lambda}{\lambda - \bar{v}\cdot\bar{r}}\,\bar{r}.$$

Conséquence. Pour obtenir l'expression de $\bar{r}$ en fonction de $\bar{r}_1$, on observe que M_1 est transformé en M par L^{-1}, à savoir par l'application de la transformation par lentille qui a le centre O, le vecteur $-\bar{v}$ et le module λ, donc

$$\bar{r} = \frac{\lambda}{\lambda + \bar{v}\cdot\bar{r}_1}\,\bar{r}_1. \tag{34}$$

32°. *Expression cartésienne des transformations* L, L^{-1}.

Considérons un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et les notations de § 31°. Si $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k},$$

on déduit de (31) :

$$x_1 = \frac{\lambda x}{\lambda - \psi}, \quad y_1 = \frac{\lambda y}{\lambda - \psi}, \quad z_1 = \frac{\lambda z}{\lambda - \psi}, \tag{35}$$

où

$$\psi = xv_x + yv_y + zv_z.$$

Il résulte aussi de (34) :

$$x = \frac{\lambda x_1}{\lambda + \psi_1}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{y + \psi_1}, \quad z = \frac{\lambda z_1}{z + \psi_1}, \tag{36}$$

où

$$\psi_1 = x_1 v_x + y_1 v_y + z_1 v_z.$$

33°. *Sur la nature de la transformation* L.

a) Les expressions (35) montrent qu'une transformation par lentille de l'espace est une homographie de l'espace.

Cette conclusion est en concordance avec les propriétés connues d'un système optique {5, § 4.3.1}.

b) Dans le système de coordonnées cartésiennes choisi, l'équation de la lentille π de la transformation L est

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0. \tag{37}$$

c) *Cherchons les points doubles de L.* L'expression de L en coordonnées homogenes (X, Y, Z, T), déduite de (35) est

$$\varrho X_1 = \lambda X\,,\quad \varrho Y_1 = \lambda Y\,,\quad \varrho Z_1 = \lambda Z\,,\quad \varrho T_1 = \lambda T - (Xv_x + Yv_y + Zv_z). \qquad (38)$$

En formant l'équation de ϱ qui donne les points doubles on trouve que L a un plan de points doubles. Ce plan est la lentille π.

Mais chaque point M, son transformé M_1 par L et le centre O de L sont en ligne droite. Alors L est une homologie déterminée par le centre O et le plan π. Donc c'est une homologie dont le centre appartient au plan de points doubles. On a la conclusion :

La transformation par lentille de l'espace est une homologie dont le plan de points doubles (la lentille) contient le centre de l'homologie (le centre de la transformation).

34°. *Transformation du foyer de L.*

Une transformation par lentille de l'espace L, dont le centre est O, transforme son foyer F en J, le point à l'infini de la droite OF. Aussi elle transforme J en F_1, le symétrique du foyer F par rapport à O.

Considérons le systéme de coordonnées cartésiennes adopté à § 32°. Si

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$$

est le vecteur de la transformation L et λ son module, pour $\overline{OF'} = \bar{v}$ nous avons $F'(v_x, v_y, v_z)$. Comme F est le transformé de F' par l'inversion I de centre O et puissance λ, il résulte

$$F\left(\frac{\lambda v_x}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,,\ \frac{\lambda v_y}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,,\ \frac{\lambda v_z}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)$$

et en coordonnées homogenes,

$$F(\lambda v_x,\ \lambda v_y,\ \lambda v_z,\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Alors L, dont l'expression en coordonnées homogenes est donnée à (38), transforme F en J $(v_x, v_y, v_z, 0)$, qui est le point à l'infini de la doite OF.

Aussi L transforme J en $F_1(-\lambda v_x, -\lambda v_y, -\lambda v_z, v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, qui est le symétrique du foyer F par rapport à O ou le foyer de la trans formation L^{-1}.

35°. *Transformation des planes.*

a) La transformation par lentille de l'espace étant une homologie, transforme les plans en plans.

En considérant la transformation par lentille L et les notations de § 31° et § 32°, L transforme le plan

$$(P)\ Ax + By + Cz + D = 0$$

en

$$(P_1)\quad \lambda(Ax+By+Cz+D)+D(xv_x+yv_y+zv_z)=0, \tag{39}$$

qui contient l'intersection des plan (P) et (π).

b) *Un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe de la transformation L, est transformé en plan qui est aussi perpendiculaire à cette axe.*

En effet, le plan.

$$(P')\quad xv_x+yv_y+zv_z+D=0$$

est transformé en

$$(P_1')\quad (\lambda+D)(xv_x+yv_y+zv_z)+\lambda D=0.$$

c) *Le plan focal d'une transformation par lentille L est le plan qui contient le foyer de la transformation, perpendiculaire à l'axe de la transformation.*

Le transformé du plan focal est le plan à l'infini.

Soit φ le plan focal de L. Son équation, en coordonnées homogenes est

$$(\varphi)\quad v_x X+v_y Y+v_z Z-\lambda T=0$$

Mais de (38) il résulte

$$X=\lambda X_1,\ Y=\lambda Y_1,\ Z=\lambda Z_1,\ T=\lambda T_1+X_1v_x+Y_1v_y+Z_1v_z, \tag{40}$$

donc le transformé de φ par L est $T=0$.

L transforme le plan à l'infini en

$$(\varphi_1)\quad Xv_x+Yv_y+Zv_z+\lambda T=0,$$

qui est le symétrique de φ par rapport à O et contient le point F_1.

d) *Le transformé par L d'un plan paralèlle à l'axe de L est un plan qui contient le symétrique du foyer de la transformation par rapport à O.*

Soit

$$(P'')\quad Ax+By+Cz+D=0$$

un plan parallèle à l'axe de L, donc on a la condition

$$Av_x+Bv_y+Cv_z=0. \tag{41}$$

Le transformé P_1'' de P'' par L a (39) comme équation. Mais cette équation est vérifiée- en tenant compte de (41) — par les coordonnées du point F_1.

e) *Le transformé par L d'un plan P qui contient le foyer F de L est un plan P_1 parallèle à l'axe de la transformation.*

La plan P_1 contient l'intersection des plans P, π, aussi le point à l'infini J de l'axe de la transformation.

36°. *Transformation des droites.*

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent ont comme conséquences les propriétés suivantes :

a) *La transformée par L d'une droite quelconque d, est une droite* d_1, *qui coupe d en un point situé sur la lentille* π *de L.*

b) *La transformée par L d'une droite d quelconque perpendiculaire à l'axe Of de la transformation est une droite* d_1 *parallèle à d.*

c) *La transformée par L d'une droite d située dans le plan focal de L est la droite à l'infini du plan déterminé par le centre de L et la droite d.*

d) *La transformée par L d'une droite d, parallèle à l'axe de la transformation, est une droite* d_1 *qui contient le symétrique du foyer F par rapport à O (le centre de L) et l'intersection de la droite d et de la lentille* π.

e) *La transformée par L d'une droite d qui passe par le foyer F, est une droite d parallèle à l'axe de la transformation, qui contient le point commun de la droite d et de la lentille* π.

37° *Notes.*

1) La définition donnée (§ 26°) à la transformation par lentille de l'espace nous a permis de déduire les propriétés connues des transformées des plans et des droites.

2) La transformée d'une quadrique est une quadrique.

3) On déduit aussi pour les transformations par lentilles de l'espace les propriétés données pour le plan à § 22°, 23°, 24° dans une autre note {2}.

38° *Propriétés des inversions de l'espace.*

a) *L'ensemble [I] des inversions de l'espace est parfaitement symétrique par rapport au groupe* $[\tau]$ *des translations de l'espace.*

Soit $I \in [I]$ l'inversion de centre O et de puissance λ, $\tau \in [\tau]$ la translation dont le vecteur est $\bar{v}$, O_1 le transformé de O par τ, I_1 l'inversion ayant O_1 comme centre et λ comme puissance. On a

$$\tau I = I_1 \tau ,$$

donc I_1 est la correspondante de I par rapport à τ. Aussi $\tau^{-1} \in [\tau]$. Alors $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[\tau]$.

b) *L'ensemble [i] des inversions de l'espace, qui ont le même centre O, est parfaitement symétrique par rapport à [r], le groupe des rotations déterminées par les droites de l'espace qui contiennent le point O, car pour*

$$r \in [r] \quad \text{et} \quad i \in [i]$$

on a

$$r i = i r .$$

Ceci montre qui i est sa correspondante par rapport à r.

c) *L'ensemble [I] des inversions de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble [R] des rotations déterminées par les droites de l'espace.*

Soit $I \in [I]$ l'inversion qui a O comme centre et λ comme puissance, $R \in [R]$ une rotation déterminée par une droite Δ qui ne contient pas O et par l'angle α.

Considérons un point O_1 sur Δ et la translation τ qui a $\overline{OO_1}$ comme vecteur. L'inversion I_1 déterminée par le centre O_1 et par la puissance λ est la correspondante de I par rapport à τ, donc

$$I = \tau^{-1} I_1 \tau \tag{42}$$

ou

$$R I = R \tau^{-1} I_1 \tau .$$

Mais $[\tau]$, l'ensemble des translations de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à $[R]$, donc il y a une translation $\tau_1 \in [\tau]$, telle que

$$R \tau^{-1} = \tau_1 R .$$

On obtient

$$R I = \tau_1 R I_1 \tau = \tau_1 I_1 R \tau .$$

On a aussi

$$R \tau = \tau_1^{-1} R .$$

Par conséquent

$$R I = \tau_1 I_1 \tau_1^{-1} R = I_2 R , \tag{43}$$

car $\tau_1 I_1 \tau_1^{-1}$ est équivalent à I_2, la correspondante de l'inversion I par rapport à la translation τ_1.

Ce résultat (43) est indépendant du choix du point O_1 sur Δ.

En effet, considérons un autre point O_2 sur Δ et les translations τ_1, τ_2 déterminées par les vecteurs $\overline{OO_2}$, $\overline{O_1O_2}$. On a

$$\tau_1 = \tau_2 \tau \quad , \quad \tau_1^{-1} = \tau^{-1} \tau_2^{-1} .$$

Soit I_2 l'inversion qui a O_2 comme centre et λ comme puissance. Elle est la correspondante de I par rapport a τ_1, donc

$$I = \tau_1^{-1} I_2 \tau_1$$

ou

$$I = \tau^{-1} \tau_2^{-1} I_2 \tau_2 \tau .$$

Mais $\tau_2^{-1} I_2 \tau_2$ exprime la correspondante de I_2 par rapport à τ_2^{-1}, à savoir une inversion dont le centre est O_1, le transformé de O_2 par τ_2^{-1}, et la puissance λ. Cette inversion est I_1, donc

$$I = \tau^{-1} I_1 \tau ,$$

ce qui prouve qu'on obtient la même inversion I_2 comme correspondante de I par rapport à R.

Alors, comme on a aussi $R^{-1} \in [R]$, on conclut la parfaite symétrie de $[I]$ par rapport à $[R]$.

d) *L'ensemble $[I]$ des inversion de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[E]$ des déplacements helicoïdals.*

$$\text{Si } E \in [E], \text{ on a } E = R\tau$$

où R est une rotation qui a l'axe de E comme axe et τ est une translation dont le vecteur a la direction Δ.

Comme $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[\tau]$ et $[R]$, il est aussi parfaitement symétrique $\{4, 19°\}$ par rapport à [E].

e) *L'ensemble $[I]$ des inversions de l'espace est parfaitemant symétrique par rapport au groupe $[D]$ des déplacements de l'espace,* car

$$[D] = [\tau] \cup [R] \cup [E].$$

f) *L'ensemble $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble $[\sigma]$ des symétries déterminées par les plans de l'espace.*

Soit $I \in [I]$ l'inversion dont le centre est O et la puissance λ, $\sigma \in [\sigma]$ la symétrie déterminée par le plan P, O_1 le transformé de O par σ, I_1 l'inversion dont le centre est O_1 et la puissance λ. On a

$$\sigma I = I_1 \sigma,$$

donc I_1 est la correspondante de I par rapport à τ. On a aussi $\sigma^{-1} \in [\sigma]$. Il résulte la propriété énoncée.

g) *L'ensemble $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport a $[M]$, le groupe fondamental de la géométrie métrique de l'espace,* car

$$[M] = [D] \cup [\sigma] \cup [D\sigma].$$

h) *L'ensemble $[i]$ des inversions, qui ont le même centre O, est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[h]$ des homothéties ayant O comme centre.*

Soit $i \in [i]$ l'inversion dont la puissance est λ et $h \in [h]$ l'homothétie de rapport k, $i_1 \in [i]$ l'inversion dont la puissance est λk^2.

Les produits hi, $i_1 h$ sont équivalentes à l'inversion $i_2 \in [i]$ ayant la puissance λk, donc

$$hi = i_1 h.$$

Alors i_1 est la correspondante de l'inversion i par rapport à h. On a aussi $h^{-1} \in [h]$, donc le résultat énoncée.

i) *L'ensemble $[i]$ des inversions qui ont O comme centre est autosymétrique.* Considérons $i \in [i]$, $\eta \in [i]$, deux inversions qui ont λ, μ comme puissances et $i_1 \in [i]$ l'inversion de puissance $\frac{\mu^2}{\lambda}$.

On a $\eta i = h$, où h est l'homothétie ayant O comme centre et le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$. Aussi $i_1 \eta = h$, donc

$$\eta i = i_1 \eta,$$

à savoir i_1 est la correspondante de l'inversion i par rapport à η. On a aussi $\eta^{-1} \in [i]$. Donc l'ensemble $[i]$ est parfaitement symétrique par rapport à lui-même.

j) *Le groupe* $[h]$ *des homothéties ayant le même centre* O *est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble* $[i]$ *des inversions qui ont* O *comme centre.*

Soit $h \in [h]$ l'homothétie dont le rapport est k et $\eta \in [i]$ l'inversion dont la puissance est μ. On a

$$\eta h = h^{-1} \eta.$$

Alors $h^{-1} \in [h]$ est la correspondante de h par rapport à η.

k) *L'ensemble* $[S_{12}] = [i] \cup [h]$ *est un groupe autosymétrique.*

l) L'ensemble $[I]$ *des inversions de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à l'ensemble* $[H]$ *des homothéties de l'espace.*

Considérons $I \in [I]$, l'inversion dont le centre est O et la puissance λ, $H \in [H]$, l'homothétie ayant le centre ω et le rapport k, τ la translation déterminée par le vecteur $\bar{v} = \overline{O\omega}$. La correspondante de I par rapport à τ est l'inversion I_1 qui a le centre en ω et la puissance λ. On a

$$I = \tau^{-1} I_1 \tau .$$

Alors

$$HI = H\tau^{-1} I_1 \tau .$$

Mais l'ensemble des translations de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à $[H]$, la correspondante de la translation τ^{-1} par rapport à H étant une translation τ_1 déterminée par le vecteur $-k\bar{v}$. On a

$$H\tau^{-1} = \tau_1 H .$$

L'homothétie H et l'inversion I ont le même centre ω, donc I_1 a une correspondante par rapport à H. C'est l'inversion I_2 qui a ω comme centre et la puissance λk^2. Alors

$$HI_1 = I_2 H ,$$

de même

$$H\tau = \tau_1^{-1} H .$$

Il résulte

$$HI = \tau_1 I_2 \tau_1^{-1} H .$$

Comme $\tau_1 I_2 \tau_1^{-1}$ représente la correspondante de l'inversion I_2 par rapport à τ_1, c'est une inversion I_3 ayant comme centre le point O_1 tel que $\overline{\omega O_1} = -k\bar{v}$ et la puissance λk^2. Par conséquent

$$HI = I_3 H .$$

m) *L'ensemble* $[I]$ *des inversions de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à* $[G]$, *le groupe principal de la géométrie euclidienne de l'espace.*

On a

$$[G] = [\tau] \cup [R] \cup [E] \cup [\sigma] \cup [E\sigma] \cup [H] \cup [RH] \cup [\sigma H] \cup [R\sigma H].$$

Mais $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport à chacun des termes de cette réunion, alors $[I]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[G]$.

Alors les ensembles $[IG]$.

$$[S_{13}] = [I] \cup [G] \cup [IG]$$

sont aussi parfaitement symétriques par rapport à $[G]$.

39°. *Le groupe $[l]$ des transformations par lentilles de l'espace ayant le même centre O est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[r]$ des rotations déterminées par les droites de l'espace qui contiennent O.*

Soit $l \in [l]$ la transformation par lentille ayant $\bar{v}$ comme vecteur et le module λ, $r \in [r]$ une rotation déterminée par la droite Δ et l'angle α, t la translation convergente qui a le centre en O et le vecteur $\bar{v}$, i l'inversion dont le centre est O et la puissance λ.

On a

$$l = iti,$$

donc

$$rl = riti.$$

Mais (§ 38°, b),

$$ri = ir,$$

puis, comme le groupe $[t]$ des translations convergentes qui ont le même centre O est parfaitement symétrique {6,17°} par rapport à $[r]$, on a $t_1 \in [t]$, déterminée par $\bar{v}_1$ le transformé du vecteur v par r, telle que

$$rt = t_1 r.$$

Il résulte

$$rl = it_1 ir.$$

On sait que $it_1 i$ est une transformation par lentille l_1, ayant O comme centre, le vecteur $\bar{v}_1$ et le module λ, donc

$$rl = l_1 r \quad , \quad l_1 \in [l].$$

La transformation l_1 est la correspondante de l par rapport à r. La transformation l et sa correspondante l_1 par r ont le même centre et le même module, mais le vecteur de l_1 est le transformé par r du vecteur de l.

Ce résultat et $r^{-1} \in [r]$ nous conduisent à la conclusion de l'énonce. Comme conséquence, les ensambles $[lr]$ et

$$[S_{14}] = [l] \cup [r] \cup [rl]$$

sont {3,16° et 17°} des groupes parfaitement symétriques par rapport à $[r]$.

40° *Le groupe [l] des transformations par lentilles de l'espace ayant le même centre O est parfaitement symétrique par rapport au groupe [h] des homothéties de l'espace qui ont O comme centre.*

a) Soit $l \in [l]$ la transformation par lentille dont le vecteur est $\bar{v}$ et le module λ, $h \in [h]$ l'homothétie ayant le rapport k. Si t, i ont la signification de § 39°, on a

$$hl = hiti\,.$$

Comme les ensembles $[i]$, $[t]$ sont parfaitement symétriques par rapport à $[h]$, on trouve $i_1 \in [i]$ de puissance λk^2(§ 38°, h) telle que

$$hi = i_1 h$$

et $t_1 \in [t]$ déterminée par le vecteur $k\bar{v}$ {6,23°} telle que

$$ht = t_1 h\,.$$

Alors

$$hl = i_1 t_1 i_1 h\,.$$

Mais $i_1 t_1 i_1$ est une transformation par lentille l_1, déterminée par le centre O, le vecteur $k\bar{v}$ et le module λk^2. Comme $l_1 \in [l]$ et

$$hl = l_1 h\,,$$

l_1 est la correspondante de l par rapport à $[h]$. On a aussi $h^{-1} \in [h]$. Par conséquent $[l]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[h]$.

b) *Note.* La transformation par lentille l et sa correspondante l_1 par h ont le même centre. Le vecteur de l_1 est $k\bar{v}$ et son module λk.

c) Les ensembles $[lh]$,

$$[S_{15}] = [l] \cup [h] \cup [lh]$$

sont des groupes parfaitement symétriques par rapport à $[h]$.

d) Comme

$$rh = hr\,,$$

l'ensemble $[h]$ est parfaitement symétrique par rapport au groupe $[r]$. Par conséquent, en tenant compte aussi de § 39°, le groupe $[S_{15}]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[r]$.

Aussi les ensembles $[S_{15}]$ et

$$[S_{16}] = [l] \cup [h] \cup [lh] \cup [r] \cup [lr] \cup [rh] \cup [lrh]$$

sont des groupes parfaitement symétriques par rapport à [r].

e) Le groupe $[r]$ est aussi parfaitement symétrique par rapport au groupe $[h]$. Donc le groupe $[S_{14}]$ est parfaitement symétrique par $[h]$.

Aussi les ensembles $[S_{14}h]$.

$$[S'_{16}] = [l] \cup [r] \cup [lr] \cup [h] \cup [lh] \cup [rh] \cup [lrh]$$

sont des groupes parfaitement symétriques par rapport à $[h]$. Mais $[S_{16}] = [S'_{16}]$. On conclut que le groupe $[S_{16}]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[r] \cup [h] \cup [rh]$.

41°. *L'ensemble $[L]$ des transformations par lentilles de l'espace est parfaitement symétrique par rapport à $[G]$, le groupe principal de la géométrie euclidienne de l'espace.*

Soit $L \in [L]$ une transformation par lentille déterminée par le centre O, le vecteur $\bar{v}$ et le module λ, $G \in [G]$, T la translation convergente dont le centre est O et le vecteur $\bar{v}$, I l'inversion ayant le centre en O et la puissance λ. On a

$$L = ITI,$$

donc

$$GL = GITI.$$

Mais les ensembles $[I]$, $[T]$ des inversions et des translations convergentes de l'espace sont parfaitement symétriques {6, § 25°}, (§ 38°, m) par rapport à $[G]$. Donc on a $I_1 \in [I]$, $T_1 \in [T]$ telles que

$$GI = I_1 G \quad , \quad GT = T_1 G.$$

Il résulte

$$GL = I_1 T_1 I_1 G = L_1 G,$$

où $L_1 = I_1 T_1 I_1$ est une transformation de l'ensemble $[L]$.

Ainsi L_1 est la correspondante de L par rapport à G. Ce résultat joint à $G^{-1} \in [G]$ conduit à la propriété de l'énonce

Conséquence. Les ensembles $[LG]$ et

$$[S'] = [L] \cup [G] \cup [LG]$$

sont parfaitement symétriques par rapport à $[G]$.

42°. *Si $[g]$ est un sous-ensemble du groupe principal $[G]$ de la géométrie euclidienne de l'espace et $[L]$ l'ensemble des transformations par lentilles de l'espace, alors $[L]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[g]$.*

a) En particulier, l'ensemble $[L]$ est parfaitement symétrique par rapport à $[\tau]$, le groupe des translations de l'espace. Considérons $L \in [L]$ déterminée par le centre O, le vecteur $\bar{v}$ et le module λ, $\tau \in [\tau]$ déterminée par le vecteur $\bar{u}$, O_1 le transformé de O par τ.

Si T, T_1 sont les translations convergentes ayant O, O_1 comme centres et le même vecteur $\bar{v}$, si I, I_1 sont les inversions ayant O, O_1 comme centres et la même puissance λ, alors T_1, I_1 sont les correspondantes de T, I par rapport à τ. Donc

$$T = \tau^{-1} T_1 \tau \quad , \quad I = \tau^{-1} I_1 \tau.$$

Il résulte

$$L = ITI = (\tau^{-1} I_1 \tau)\ (\tau^{-1} T_1 \tau)\ (\tau^{-1} I_1 \tau) = \tau^{-1} (I_1 T_1 I_1) \tau .$$

Mais $I_1 T_1 I_1$ est la transformation par lentille L_1 déterminée par le centre O_1, le vecteur $\bar{v}$ et le module λ. Alors

$$L = \tau^{-1} L_1 \tau ,$$

ce qui montre que L_1 est la correspondante de L par rapport à τ.

$$L_1 = \tau L \tau^{-1} . \tag{44}$$

La transformation L et sa correspondante L_1 par τ sont définies par le même vecteur, le même module, le centre de L_1 étant le transformé du centre de L par τ.

b) Soit $M(\overline{OM} = \bar{r})$ un point de l'espace et $M_1(\overline{OM_1} = \bar{r}_1)$ le transformé de M par L_1. Trouvons l'expresion de $\bar{r}_1$, en fonction de $\bar{r}$. On utilise la relation (44).

La translation τ^{-1} transforme M en $M_2(\overline{OM_2} = \bar{r}_2)$.

$$\bar{r}_2 = \bar{r} - \bar{u} .$$

Puis L transforme M_2 en M_3 $(\overline{OM_3} = \bar{r}_3)$ et la formule (31) donne

$$\bar{r}_3 = \frac{\lambda}{\lambda - \bar{v} \cdot (\bar{r} - \bar{u})} (\bar{r} - \bar{u}) .$$

Enfin τ transforme M_3 en M_1, donc

$$\bar{r}_1 = \bar{u} + \frac{\lambda}{\lambda - \bar{v} \cdot (\bar{r} - \bar{u})} (\bar{r} - \bar{u}) . \tag{45}$$

C'est aussi l'équation d'une transformation T_3 par lentille dont le centre O_1 et l'origine O des vecteurs de position des points de l'espace déterminent le vecteur $\bar{u} = \overline{OO_1}$.

La chaire de mathématiques
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. Ionescu-Bujor :* Asupra unor transformări optice (I). Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXIII, Fasc. 2, 1961.
2. *C. Ionescu-Bujor :* Asupra unor transformări optice (II). Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXIV, Fasc. 1, 1962.
3. *C. Ionescu-Bujor :* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée, Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom XXI, Fasc. 1, 1959.
4. *C. Ionescu-Bujor :* Sur les transformations correspondantes par rapport à une transformation donnée (II), Buletinul Institutului politehnic. Bucureşti, Tom. XXI, Fasc. 2, 1959.
5. *Max Born and Emil Wolf :* Principles of Optics, Pergamon Press, 1959.
6. *C. Ionescu-Bujor :* Sur les transformations optiques de l'espace (I), Buletinul Institutului politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej din Bucureşti. Tom. XXVII, Fasc. 2, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

C. Z.: 515

ASUPRA UNEI CLASE DE SUPRAFEȚE CUBICE*

MIHAIL ȘT. BOTEZ

La sesiunea științifică a cadrelor didactice din februarie 1964, prof. C. Ionescu Bujor, în comunicarea făcută, „Asupra transformării punctelor din spațiu prin translații convergente" referindu-se la un studiu mai amplu al său, ale cărui rezultate au fost publicate în acest buletin [1] se ocupă de translația numită de autor *convergentă*, care este o transformare punctuală birațională a spațiului astfel încît fiind dat un punct fix O și un vector liber $\bar{v}$ — vectorul translației — unui punct oarecare M îi corespunde un punct M_1 colinear cu M și O care satisfac relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r} - (\bar{v} \text{ grad } r) \text{ grad } r \tag{1}$$

Relațiile între coordonatele punctelor M și M_1 sînt:

$$\begin{gathered} x_1 = x\left(1 - \frac{\Delta}{\Sigma x^2}\right);\quad y_1 = y\left(1 - \frac{\Delta}{\Sigma x^2}\right);\quad z_1 = z\left(1 - \frac{\Delta}{\Sigma x^2}\right) \\ x = x_1\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Sigma x_1^2}\right);\quad y = y_1\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Sigma x_1^2}\right);\quad z = z_1\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Sigma x_1^2}\right) \end{gathered} \tag{2}$$

unde:

$$\Sigma x^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ și } \Delta = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

iar α, β, γ, reprezintă proecțiile vectorului $\bar{v}$ pe axele Ox, Oy și Oz.

În ceea ce urmează remarc cîteva din proprietățile deosebite ale unei clase de suprafețe cubice obținute prin transformarea unui plan, de către C. Ionescu Bujor.

1. Transformînd prin translație convergentă planul oarecare

$$P = Ax + By + Cz + D = 0$$

se obține suprafața cubică:

$$P\Sigma x^2 + (P - D)\Delta = 0 \tag{3}$$

* Manuscris predat la redacție la 15 aprilie 1964.

a) Se observă că suprafața (3) are origina punct dublu, deoarece în ecuația sa lipsesc termenii de grad 0 și 1. Grupul omogen de gradul al doilea din ecuația (3) egalat cu zero:

$$(D + A\alpha)x^2 + (D + B\beta)y^2 + (D + C\gamma)z^2 + (B\alpha + A\beta)xy + \\ + (A\gamma + C\alpha)xz + (C\beta + B\gamma)yz = 0$$

este conul osculator la suprafața (3) în origină, ale cărui generatoare sînt drepte osculatoare în O, este *ireductibil. Suprafața este în jurul acestui punct constituită dintr-o singură pînză esențial ireductibilă* [2].

Calculînd cei doi determinanți care intervin în reducerea ecuației generale a conicelor, observăm că *secțiunile cu planele de coordonate în conul osculator sînt în toate cazurile conice cu centru.*

b) Dacă exprimăm ecuația (3) în coordonate omogene x, y, z, t și secționăm suprafața cu planul impropriu $t = 0$, se obține:

$$(Ax + By + Cz)(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{4}$$

care reprezintă pe planul de la infinit o curbă algebrică (Γ) de ordinul trei, iar în spațiu ecuația (4) reprezintă conul de ordinul trei care proiectează din origină [3] această curbă. Observăm că: *proecțiile curbei* (Γ) *pe orice plan paralel cu unul din planele de coordonate sînt cubice care se descompun într-un cerc imaginar și o dreaptă reală.*

c) Secționînd suprafața (3) cu planul $z = 0$, se obține cubica:

$$(Ax + By)(x^2 + y^2) + (D + A\alpha)x^2 + (A\beta + B\alpha)xy + \\ + (D + B\beta)y^2 = 0 \tag{5}$$

în care recunoaștem transformata convergentă a urmei planului P pe planul $[xy]$ pentru care vectorul de translație $|\bar{v}| = \alpha$, (și $\beta = 0$). Calculul arată că secțiunile făcute în suprafața (3) cu planele coordonate sînt cubice circulare de forma (5) astfel încît putem afirma că:

Secțiunile cu planele de coordonate sînt transformatele convergente ale urmelor planului P pe planul de coordonate respectiv, cu $v = \alpha, \beta, \gamma$.

d) Autorul [1] observă că planul P și suprafața (3) se intersectează după dreapta de puncte duble

$$Ax + By + Cx + D = 0: \ \alpha z + \beta y + \gamma z = 0$$

Dar dacă o suprafață cubică admite o dreaptă de puncte nodale, atunci fasciculul de plane care are ca suport această dreaptă, taie suprafața după ∞^1 drepte care constituiesc un sistem de generatoare rectilinii, iar dreapta dublă este o directoare a suprafeței.

Într-adevăr, pentru ca dreapta oarecare:

$$x = pz + q \\ y = rz + s \tag{6}$$

să poată fi aplicată în întregime pe o suprafață $f(xyz) = 0$, trebuie ca înlocuind în ecuația suprafeței pe x și y prin egalii lor dați de (6) să obținem o ecuație $\varphi(z) = 0$ satisfăcută pentru orice z.

Exprimînd că $\varphi(z)$ este o identitate, găsim între parametrii p, q, r și s un număr de relații din care, dacă obținem valori determinate pentru parametrii de mai înainte, rezultă că suprafața este riglată.

Făcînd în ecuația (3) substituțiile (6), se obține:

$$\begin{aligned}\varphi(z) = [(Ap + Br + C)z + Aq + Bs + D]\ [(p^2 + q^2 + 1)z^2 + \\ + 2(pq + rs)z + q^2 + s^2] + [(Ap + Br + C)z + Aq + \\ + Bs]\ [(\alpha p + \beta r + \gamma)z + \alpha q + \beta s] = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Pentruca această relație (7) să fie verificată oricare ar fi z, se observă că trebuie să existe egalitățile:

$$\begin{aligned} Ap + Br + C &= 0 \\ Aq + Bs + D &= 0 \\ \alpha p + \beta r + \gamma &= 0 \\ \alpha q + \beta s &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Deoarece determinantul Δ al sistemului (8) este diferit de zero, se obțin pentru p, q, r și s valori finite astfel încît, generatoarele rectilinii ale suprafeței (3) sînt:

$$\begin{aligned} \Delta x - \Delta_p z &= \Delta_q \\ \Delta y - \Delta_r z &= \Delta_s \end{aligned} \tag{9}$$

unde Δ_r, Δ_q, Δ_r și Δ_s, au semnificațiile obișnuite.

2. Suprafața (3) se mai poate scrie sub forma:

$$(Ax + By + Cz)\Sigma x^2 + D\Sigma x^2 + (Ax + By + Cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \tag{10}$$

sau

$$\Phi_3 + \Phi_2 t = 0, \tag{10'}$$

care este ecuația omogenă a suprafeței (3) și unde indicii înseamnă gradul grupului omogen de termeni.

a) Dacă se consideră un punct impropriu $(\lambda, \mu, \nu, 0)$ se definește planul diametral [5] conjugat direcției date de acest punct impropriu, locul mijloacelor coardelor suprafeței paralele cu direcția considerată. Acest loc este pentru suprafața (10) dat de relația:

$$\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right]_{\lambda,\mu,\nu} x + \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right]_{\lambda,\mu,\nu} y + \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right]_{\lambda,\mu,\nu} z + \Phi_2(\lambda, \mu, \nu)\, t = 0 \tag{11}$$

unde primii trei termeni cuprinși în paranteze sînt ceea ce devin derivatele parțiale ale funcției Φ_3 în raport cu x, y și z, după ce s-au înlocuit variabilele considerate prin λ, μ și ν.

Cum

$$\Phi_3(x, y, z) = (Ax + Py + Cz)(x^2 + y^2 + z^2)$$

și

$$\Phi_2(x, y, z) = D(x^2 + y^2 + z^2) + (Ax + By + Cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

Avem :

$$\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right]_{\lambda, \mu, \nu} = A(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\lambda(A\lambda + B\mu + C\nu)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right]_{\lambda, \mu, \nu} = B(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\mu(A\lambda + B\mu + C\nu)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right]_{\lambda, \mu, \nu} = C(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\nu(A\lambda + B\mu + C\nu)$$

$$\Phi_2(\lambda, \mu, \nu) + D(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + A\lambda + B\mu + C\nu$$

Deci ecuația planului diametral conjugat direcției (λ, μ, ν) este

$$(Ax + By + Cz + D)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + [2(\lambda x + \mu y + \nu z) + 1](A\lambda + P\mu + C\nu) = 0 \qquad (11')$$

Planele diametrale conjugate direcțiunilor (1, 0, 0), (0, 1, 0) și (0, 0, 1) sînt respectiv :

$$3Ax + By + Cz + (D + A) = 0 \qquad (1,0,0)$$

$$Ax + 3By + Cz + (D + B) = 0 \qquad (0,1,0)$$

$$Ax + By + 3Cz + (D + C) = 0 \qquad (0,0,1)$$

b) Un plan diametral al unei suprafețe algebrice este principal [5] cînd e perpendicular pe direcția conjugată. Dacă planul diametral a cărui ecuație este (1) e plan diametral principal, trebuie să avem satisfăcute relațiile :

$$\frac{\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right]_{\lambda, \mu, \nu}}{\lambda} = \frac{\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\right]_{\lambda, \mu, \nu}}{\mu} = \frac{\left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right]_{\lambda, \mu, \nu}}{\nu}$$

Ținînd seama de relațiile (12), expresia de mai înainte devine

$$\frac{A(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\lambda(A\lambda + B\mu + C\nu)}{\lambda} =$$

$$= \frac{B(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\mu(A\lambda + B\mu + C\nu)}{\mu} =$$

$$= \frac{C(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + 2\nu(A\lambda + B\mu + C\nu)}{\nu}$$

sau :

$$\frac{A(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}{\lambda}+2(A\lambda+B\mu+C\nu)=\frac{B(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}{\mu}+$$

$$+2(A\lambda+B\mu+C\nu)=\frac{C(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}{\nu}+2(A\lambda+B\mu+C\nu)$$

care după cum calculul scurt devine :

$$\frac{A}{\lambda}=\frac{B}{\mu}=\frac{C}{\nu}. \tag{13}$$

Această relație (13), exprimă condiția pe care trebuie să o îndeplinească direcția aleasă pentruca suprafața (3) să admită un plan diametral principal. Adică :

Suprafața cubică obținută prin translația convergentă a unui plan oarecare, admite o direcție unică, căreia îi corespunde un plan diametral conjugat principal, dată de punctul ale cărui coordonate sînt proporționale cu coeficienții ecuației planului transformat.

Catedra de geometrie descriptivă și aplicată
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Ionescu Bujor :* Asupra unor transformări optice (I) Bulet. Inst. polit. București, Tom. XXIII, 1961
2. *Enriques-Chisini :* Teoria geometrica delle equazioni vol. II pag. 577 Edit. Hoepli Tom. XXIV, 1962, Milano.
2. *C. Ionescu Bujor :* Asupra unor transformări optice (II) Bulet. Inst. polit. București
3. *B. A. Rosina :* Sula teoria diametrale delle superficie algebriche. Bul. de la Soc. Royale des Sciences de Liège (3—4) 1962.
5. *Mihail Șt. Botez :* Asupra diametrilor unei clase de cubice. Bul. Inst. polit. București Tom. XXIV 1962.
5. *M. Piazzola-Beloch :* Proprieta diametrale delle superficie algebriche. Atti del IV Congresso dell' Unione matematica Italiana 1951.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

C. Z.: 512.8

O GENERALIZARE A FORMULEI CREȘTERILOR FINITE. CONSECINȚE *

GH. D. SIMIONESCU

1. *Formula creșterilor finite* $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, unde $c \in (a, b)$ *se poate pune sub forma*

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}} = f'(c). \tag{1}$$

2. *Să considerăm un interval* (a, c) *și un punct* b *pe acest interval:* se formează astfel subintervalele (a, b) și (b, c). Fie $f(x)$ o funcție definită și continuă pe $[a, c]$ și derivabilă pe același interval, eventual deschis. Funcția ajutătoare

$$F(x) = f(x) - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \tag{2}$$

îndeplinește, evident, aceleași condiții și prin urmare se poate aplica teorema lui Lagrange pe fiecare subinterval $[a, b]$, $[b, c]$.

Dacă în plus $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, atunci din sistemul

$$\begin{aligned} &\gamma + \beta a + \alpha a^2 = f(a) \\ &\gamma + \beta b + \alpha b^2 = f(b) \quad \text{cu} \quad D = -(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0 \\ &\gamma + \beta c + \alpha c^2 = f(c) \end{aligned} \tag{3}$$

se obțin valori unice pentru α, β, γ.

---

* Lucrare comunicată în sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din București 28—30 mai 1965.

Potrivit teoremei lui Rolle, derivata $F'(x) = f'(x) - 2\alpha x - \beta$ se anulează pe fiecare din cele două subintervale în $\xi_1 \in (a, b)$ și $\xi_2 \in (b, c)$:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) - 2\alpha\xi_1 - \beta &= 0 \\ f'(\xi_2) - 2\alpha\xi_2 - \beta &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dacă și $f'(x)$ satisface aceleași condiții ca $f(x)$, atunci există un punct $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ și deci $\xi \in (a, c)$ astfel că $F''(x)$ se anulează în acest punct, adică

$$f''(\xi) - 2\alpha = 0 \quad \text{de unde} \quad \alpha = \frac{1}{2} f''(\xi). \tag{5}$$

Însă α scos din sistemul (3) are expresia

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}$$

Se ajunge astfel la relația

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} f''(\xi). \tag{6}$$

3. *Definirea directă a derivatei a II-a.* Dacă $c \to a$, atunci și $b \to a$ și de asemenea $\xi \to a$ astfel că presupunînd funcția $f(x)$ derivabilă în a, din (6) rezultă

$$\lim_{c \to a} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} f''(a). \tag{7}$$

Relația (7) se mai poate pune și sub forma

$$\lim_{c \to a} \left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} \right] = \frac{1}{2} f''(a). \qquad (7')$$

Cu notații convenabile, (7') se poate aduce la expresia derivatei secunde rezultată din derivata simetrică a unei funcții în cazul cînd funcția admite o derivată secundă în acel punct.

Interpretarea geometrică a derivatei a II-a. Fie A, B, C punctele de abscise a, b, c pe axa ox și $M[a, f(a)]$, $N[b, f(b)]$, $P[c, f(c)]$ punctele corespunzătoare pe curba $y = f(x)$. Notînd cu A_{MNP} aria triunghiului MNP avem

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ c & f(c) & 1 \end{vmatrix}}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{2 A_{MNP}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}$$

astfel că relația (6) apare sub forma geometrică

$$\frac{2 A_{MNP}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}} = \frac{1}{2} f''(\xi) \quad , \quad \xi \in (a, c). \qquad (8)$$

Rezultă de aici

$$\lim_{\substack{C \to A \\ B \to A}} \frac{4 A_{MNP}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}} = f''(a), \qquad (8')$$

care constituie o interpretare geometrică a derivatei a II-a.

Observare. În limitele de la (7), (7'), (8') nu este necesar ca $a<b<c$. Dacă punctele B, C sînt de o parte și alta a punctului $A(a, o)$, atunci $\xi \in (b, c)$ și deci cînd $b \to a$ și $c \to a$ este evident că și $\xi \to a$.

5. *Concavitatea curbei în $x = a$.* Presupunem $a < b < c$, așa cum s-a considerat de la început. Atunci numitorul lui (8') este pozitiv. Ducem dreapta MN și luăm punctul P o dată de partea opusă originii, a doua oară de aceiași parte cu originea (figura alăturată).

În primul caz aria triunghiului MNP este pozitivă, iar curba are concavitatea către y pozitiv; în al doilea caz aria MNP este negativă și concavitatea curbei este îndreptată spre y negativ. La limită, dacă $f''(a) \neq 0$, semnul expresiei din (8′) se păstrează, prin urmare dacă $f''(a) > 0$ concavitatea curbei este îndreptată spre $y > 0$, iar dacă $f''(a) < 0$ concavitate este spre $y < 0$.

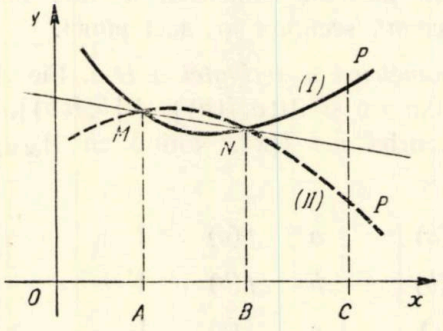


Fig. 1

Iată dedusă direct legătura între concavitatea unei curbe și derivata a II-a a funcției corespunzătoare, într-un punct ordinar.

6. *Să considerăm cazul general* cînd pe intervalul (a, b) alegem punctele $a_i\,[i = 1, 2, \ldots (n-1)]$ astfel că $a_i < a_{i+1}$. Pentru uniformizare vom nota și $a = a_0$, $b = a_n$. Intervalul (a, b) este astfel împărțit în n subintervale și presupunem că funcția $f(x)$ satisface condițiile teoremei lui Rolle pe întreg intervalul, deci și pe fiecare subinterval. Atunci și funcția

$$F(x) = f(x) - (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n) \tag{9}$$

satisface aceleași condiții. Dacă în plus

$$F(a_0) = F(a_1) = \ldots = F(a_n) = 0 \tag{10}$$

atunci, potrivit teoremei lui Rolle, pe fiecare subinterval există cîte un punct $\xi_i\,[i = 0, 1, \ldots (n-1)]$ astfel că $F'(\xi_i) = 0$. Aplicînd din nou teorema lui Rolle funcției $F'(x)$, pe fiecare din cele $(n-1)$ intervale, rezultă că există punctele $\xi_0' \in (\xi_0, \xi_1)$, $\xi_1' \in (\xi_1, \xi_2)$ etc, în care $F''(x)$ se anulează deci $F''(\xi_i') = 0$, $[i = 0, 1, \ldots (n-2)]$.

Repetînd raționamentul se ajunge la concluzia că există un punct $\xi \in (a, b)$ astfel că $F^{(n)}_{(\xi)} = 0$, adică

$$f^{(n)}(\xi) - n!\, A_0 = 0 \quad \text{de unde} \quad A_0 = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}_{(\xi)}. \tag{11}$$

De altă parte condițiile (10) duc la sistemul

$$\left.\begin{aligned} A_n + A_{n-1}\,a_0 + \ldots + A_1\,a_0^{n-1} + A_0\,a_0^n &= f(a_0) \\ A_n + A_{n-1}\,a_1 + \ldots + A_1\,a_1^{n-1} + A_0\,a_1^n &= f(a_1) \\ A_n + A_{n-1}\,a_n + \ldots + A_1\,a_n^{n-1} + A_0\,a_n^n &= f(a_n)\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Determinantul sistemului este un determinant Vandermonde $V_{n+1}\ (a_0, a_1, \ldots a_n) \neq 0$, deci coeficienții A_i sînt unic determinați. Dacă scoatem valoarea lui A_0 din sistem și o egalăm cu cea dedusă în (11) rezultă

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots\ldots & a_0^{n-1} & f(a_0) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^{n-1} & f(a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^{n-1} & f(a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots\ldots & a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}} = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(\xi)\,. \tag{13}$$

Aceasta constituie o generalizare a formulei lui Lagrange pentru cazul cînd pe (a, b) se consideră punctele intermediare $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$. Pentru $n = 1$ regăsim formula obișnuită.

Dacă se dezvoltă determinanții și dacă se notează de ex. a_n cu x se poate deduce din (13) formula de interpolare a lui Lagrange, cu termen complementar.

7. Definirea directă a derivatei de ordinul n într-un punct, dacă aceasta există, se obține, din (13), anume:

$$\lim_{a_n \to a} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & f(a) \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & f(a_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & f(a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} & a^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(a)}$$

de data aceasta (pentru $n \neq 2$) nu se mai poate găsi o interpretare geometrică simplă.

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Nicolescu:* Analiza matematică vol. II, Editura Tehnică 1958, pag. 366—375.
2. *G. M. Fihtenholț:* Curs de calcul diferențial și integral, vol. I, Editura Tehnică 1963, pag. 239—241.
3. *D. V. Ionescu:* Cuadraturi numerice. Editura Tehnică 1957 pag. 158—161.

NOTĂ: În lucrarea „Cuadraturi numerice" indicată în bibliografie cîtul determinanților din partea I-a a relației (13) se numește prin definiție „diferența divizată de ordinul n" a funcției f(x) pe nodurile a_0, a_1, ... a_n. Tot acolo se demonstrează formula (13). În prezentul articol aceste „diferențe divizate" sînt introduse într-un mod firesc, prin generalizarea formulei lui Lagrange.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

MECANICĂ

C. Z. 621.8.02

ASUPRA ECUAȚIEI CURBEI POLULUI DE INERȚIE ÎN CINEMATICA ȘI DINAMICA MECANISMELOR *)

N. I. MANOLESCU, M. DRANGA

§. 1. **Introducere.** În calculele cinetostatice și mai ales în studiul dinamic al mașinilor folosirea polului de inerție a avut o utilizare restrînsă. În literatura tehnică din țara noastră o demonstrație a existenței polului de inerție și a metodei grafice de determinare a lui a apărut în 1958 [1] iar utilizarea lui în dinamica mașinilor, aplicată la un caz particular al mecanismului patrulater articulat a fost tratată în 1959 [2] de *D. Maros*. Alte două lucrări [3] [4] au tratat problema în continuare, în ceea ce privește proprietățile polului de inerție în diferite cazuri speciale ale mișcării plane, precum și analizarea existenței acestui punct în mișcarea spațială. Concluzia imposibilității existenței acestui punct în mișcarea spațială s-a făcut pentru un caz particular al mișcării de șurub cu pas constant în lucrarea [4].

În literatura tehnică de specialitate s-a luat cunoștință de o lucrare monografică asupra polului de inerție [5] concomitent cu comunicarea făcută la sesiunea de specialitate de la Konstantz (R. F. Germană) și publicată în 1958 [6].

În lucrarea [5] se precizează că și curba polului de inerție în timpul ciclului cinematic al mecanismului este studiată, însă pînă în prezent nu s-a putut găsi această prezentare, în afară de menționea din lucrarea [6] în care se indică, într-o figură, traiectoria acestui punct, fără altă explicație suplimentară.

În cele ce urmează se prezintă în continuare metodele de construcție a polului de inerție la diferite mecanisme, metode de construcție care în felul cum sînt prezentate nu figurează în nici una din lucrările menționate mai înainte.

Se va insista în special la aplicarea acestor metode la mecanismul bielă-manivelă și patrulater articulat.

* Manuscris predat la redacție la 27 martie 1965.

§. 2. Construcția polului de inerție

După cum se știe, polul de inerție este un punct fix în planul elementului mobil la un moment dat, prin care trece rezultanta unică a forțelor de inerție, indiferent de starea de viteză și accelerație a mișcării plane a acestuia.

Demonstrația riguroasă s-a dat, pentru cazul bielei unui mecanism patrulater articulat în lucrările [1] și [2]. Forma definitivă a demonstra-

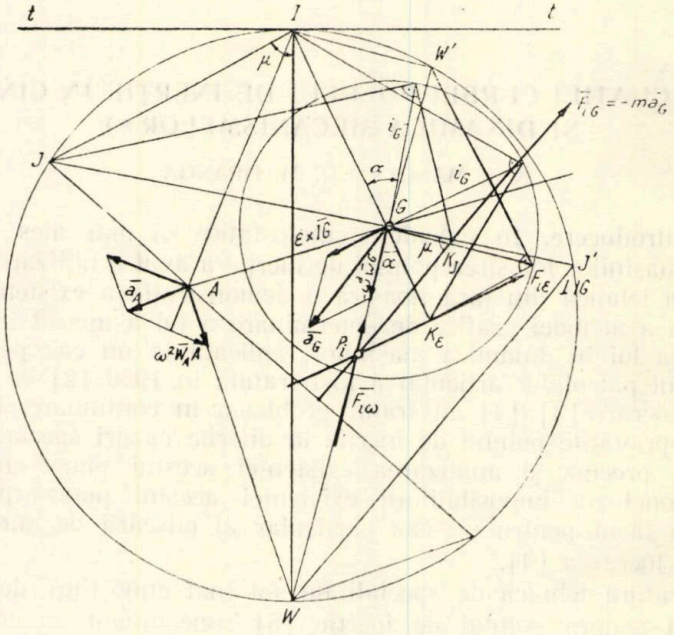


Fig. 1

ției în lucrarea [1] aparține primului din coautorii prezentului articol. Pentru mișcările cicloidale, epicicloidale și hipocicloidale, demonstrația este dată în lucrarea [4] care de asemenea aparține primului coautor.

Demonstrațiile existenței polului de inerție au ca suport centrul de greutate (G) al elementului, raza de giratie (i_G) a acestuia în raport cu o axă perpendiculară pe planul mișcării și trecînd prin centrul de greutate (G); centrul inflexiunilor (W); centrul instantaneu al acceleratiilor (J) și centrul instantaneu de rotație I(CIR).

Metodele de construcție ale polului de inerție pentru diferitele poziții ale elementului în timpul ciclului cinematic sînt foarte variate, din cauza ieșirii din planul figurii în mișcare a unuia din punctele fundamentale (I; J; W) ale diferitelor construcții sau a punctelor de intersecție ale dreptelor suport ale rezultantelor parțiale ale forțelor de inerție.

Eforturile depuse de cercetători (*Proeger, R. Krauss, R. Beyer, O. Tolle* etc.) s-au îndreptat tocmai în scopul eliminării inconvenientelor ce se ivesc prin imposibilitatea folosirii celor trei puncte fundamentale, pentru determinarea poziției polului de inerție în diferitele poziții ale elementului în timpul ciclului cinematic.

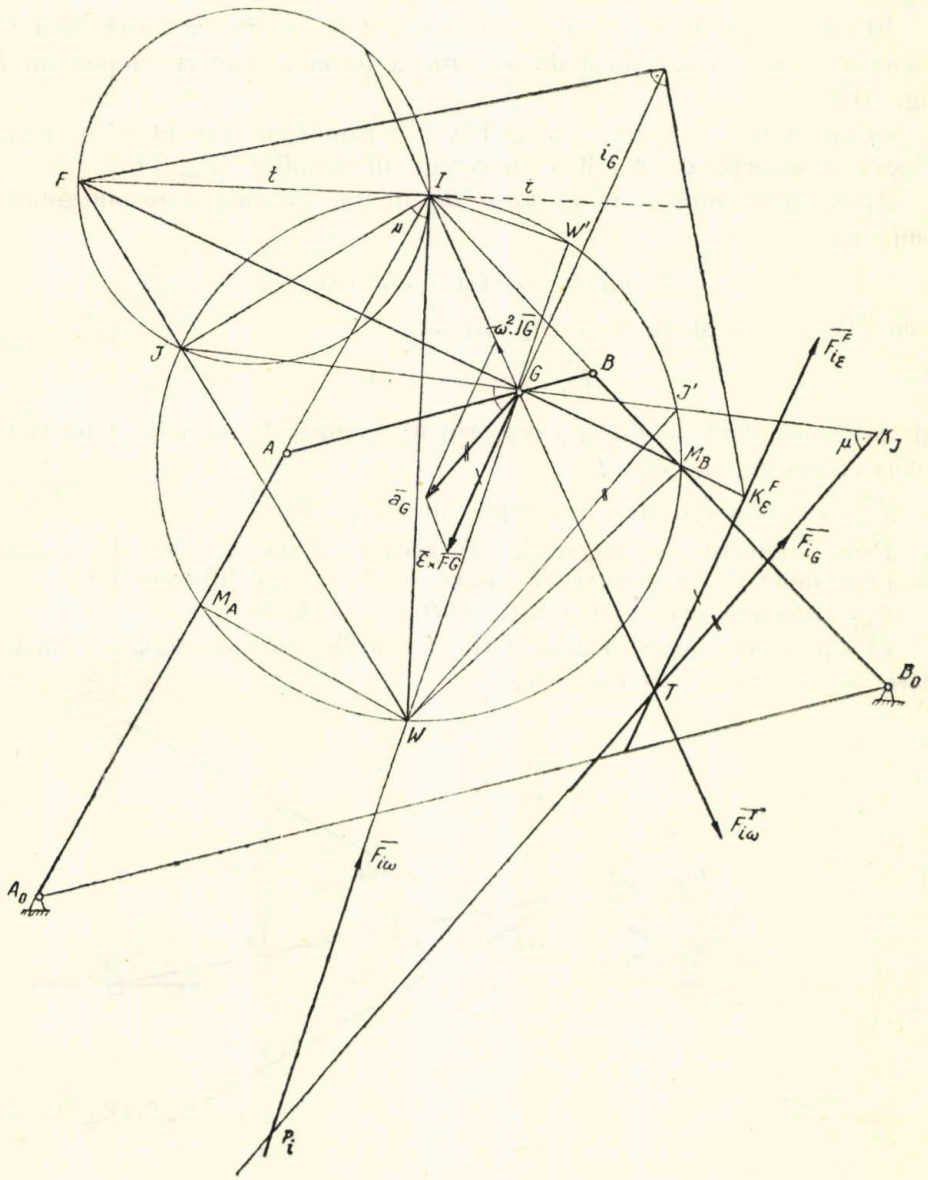


Fig. 2

Demonstrarea fixității în planul mobil a polului de inerție P_i permite determinarea lui după următoarele metode :

a) ca intersecție P_i a dreptei GW cu perpendiculara dusă prin K_ε la IG (unde K_ε este centrul de oscilație a bielei în raport cu punctul I (fig. 1) ;

b) ca intersecție P_i a aceleiași drepte GW cu F_{iG} a cărei dreaptă suport trece prin K_J, centrul de oscilație a bielei în raport cu punctul J (fig. 1) ;

c) ca centrul de oscilație P_i al bielei în raport cu punctul W' — unde W' este intersecția dreptei WG cu cercul inflexiunilor (fig. 1).

d) ca rezultantă a două forțe de inerție parțiale corespunzătoare componentelor lui $\bar{a}_G$:

$$\bar{a}_G = -\omega^2 \overline{IG} + \bar{\varepsilon} \times \overline{FG}$$

unde F este centrul de fugă (fig. 2) iar :

$$\bar{F}^F_{i_\varepsilon} = -m\bar{\varepsilon} \times \overline{FG}$$

este perpendiculară pe FG și trece prin K^F_ε centrul de oscilație a bielei în raport cu centrul de fugă F ;

$\bar{F}^I_{i\omega} = -m\omega^2 \overline{IG}$ are ca dreaptă suport pe IG,

Prin T punctul de intersecție al acestor două — trece rezultanta $F_{iG} \parallel J'W$ unde J' este intersecția dreptei JG cu cercul inflexiunilor.

F_{iG} intersectează dreapta WG în P_i : polul de inerție.

e) Ca intersecție P_i a două forțe de inerție corespunzătoare la două stări de accelerație oarecare (fig. 3).

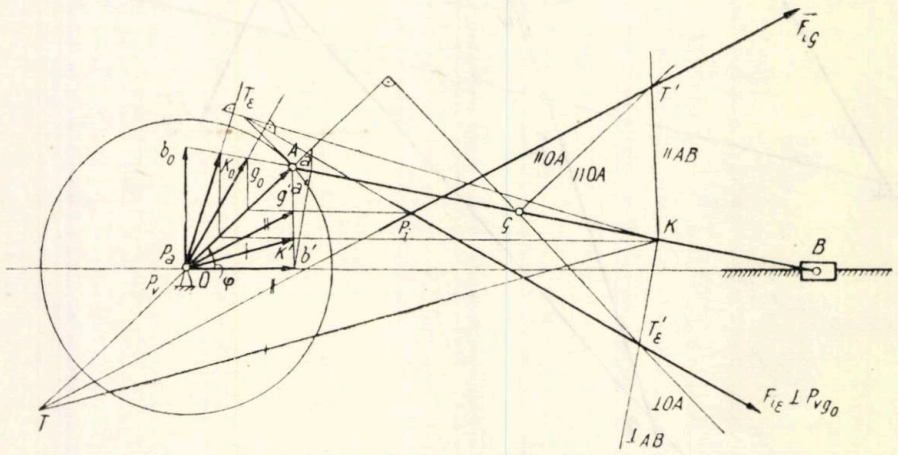


Fig. 3

— a forței de inerție F_{iG} a bielei AB, corespunzătoare vitezei unghiulare a manivelei $\omega_1 = \text{const.}$ (F_{iG} trece prin T' și este paralelă cu $P_a g'$ din planul accelerațiilor rotite cu 180°) ;

— a forței de inerție $F_{i\varepsilon_2}$ a aceleiași biele AB, corespunzătoare cazului cînd în mișcarea sa, biela, nu are decît accelerații tan-

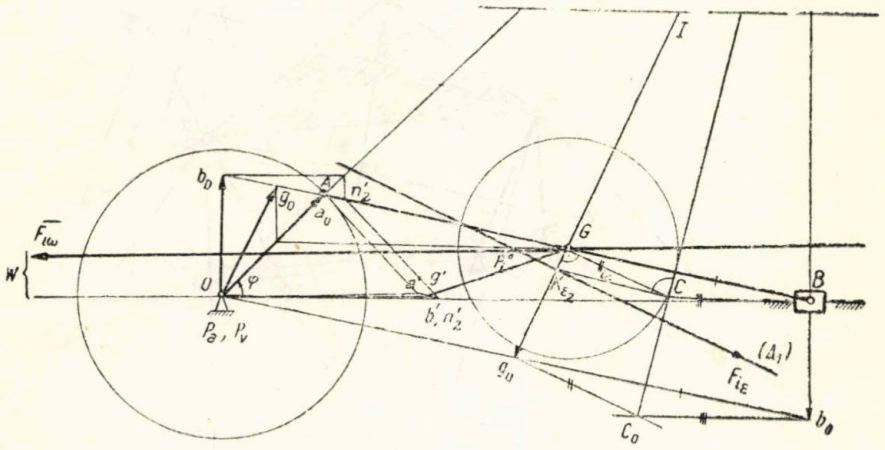


Fig. 4

gențiale (deci $\omega_2 = 0$). În acest caz poligonul accelerațiilor fiind asemenea cu al vitezelor ; $F_{i\varepsilon}$ trece prin T'_{ε} și este paralelă cu v_G (în fig. 3 $F_{i\varepsilon} \perp P_v g_0$ deoarece $P_v g_0$ este viteza rabătută cu 90° — v_G — a lui G) ;

f) Ca intersecție P_i tot a două forțe de inerție corespunzătoare la două stări de accelerații diferite :

— prima, corespunzătoare lui $\omega_2 = 0$, din care rezultă $F_{i\varepsilon_2}$ (cu dreapta suport Δ_1) care trece prin K_{ε_2} centrul de oscilație al bielei în raport cu I (fig. 4,5) ;

— a doua, corespunzătoare lui $\varepsilon_2 = 0$, din care rezultă $F_{i\omega_2}$ (cu dreapta suport Δ_2) care trece prin centrul de inflexiune W — cînd acesta este accesibil în planul desenului (fig. 5) sau se construiește $F_{i\omega_2} \parallel P_a g'$ (fig. 4) atunci cînd W nu este accesibil în planul desenului.

Construirea planului accelerațiilor chiar pe planul mecanismului pentru cazul $\varepsilon_2 = 0$ (fig. 4 și fig. 5) sau folosirea figurilor asemenea (pentru aceleași cazuri) elimină folosirea lui W, J sau I).

g) Pentru cazul cînd stările de accelerații considerate mai sus ar da naștere la construcții grafice neprecise (cazul intersecțiilor a două drepte sub un unghi foarte mic) se recomandă alegerea a două stări oarecari de accelerații și determinarea lui P_i prin intersecția rezultantelor corespunzătoare F_{iG_1} și F_{iG_2}.

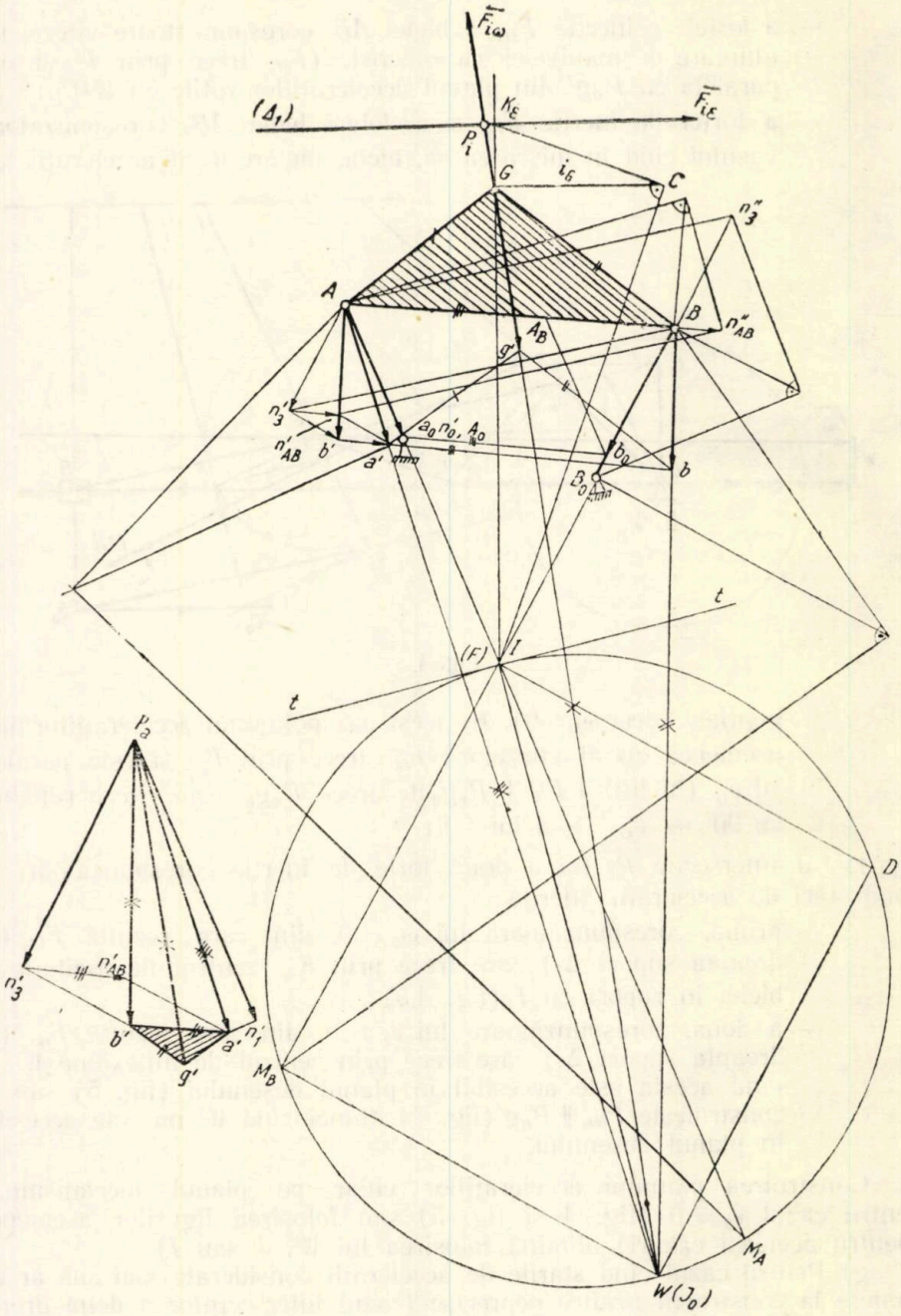
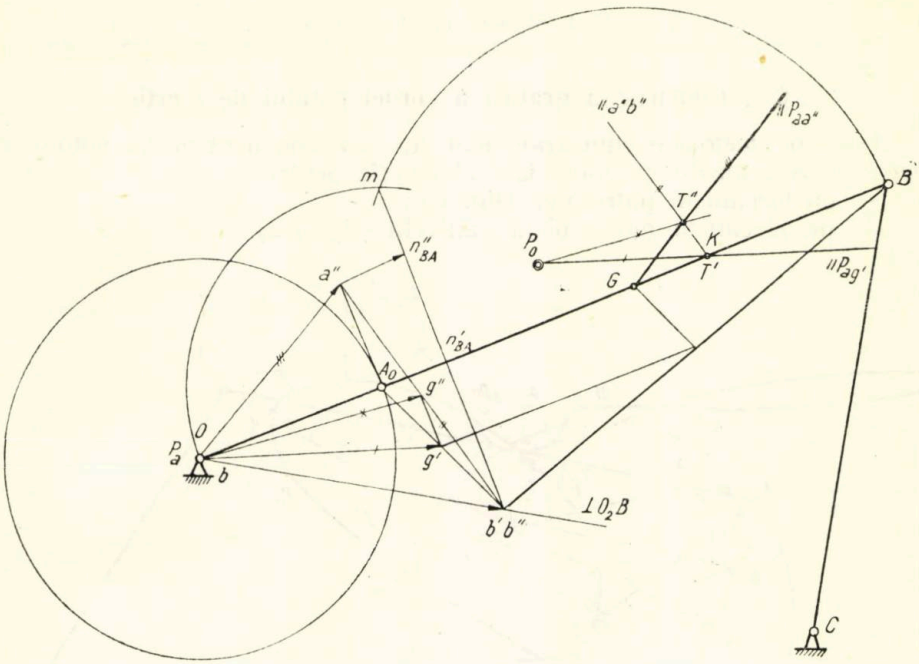
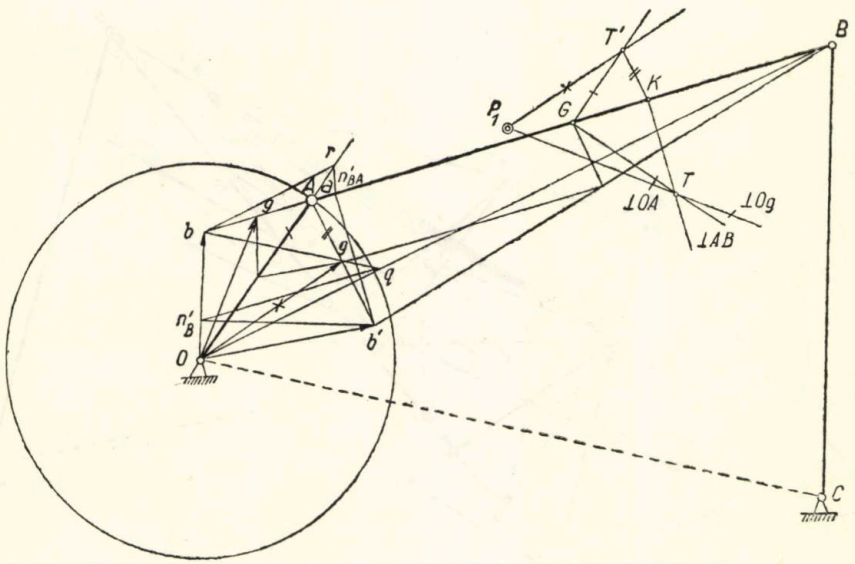

$\vec{F}_{i\omega}$
(Δ_1)
K_ε
$\vec{F}_{i\varepsilon}$
P_i
G
i_G
C
n_3''
A
B
A_B
n''_{AB}
g'
n_3'
n'_{AB}
b'
a'
$a_0 n'_0 A_0$
b_0
b
B_0
t
(F)
I
t
D
M_B
M_A
$W(J_0)$
P_3
n_3'
n'_{AB}
b'
a'
n_i'
g'

Fig. 5



m
n''_{BA}
a''
n'_{BA}
A_0
g''
g'
O
P_a
b
b'b''
$\perp O_2B$
P_0
G
T''
K
T'
B
C

Fig. 6 a



T'
B
K
P_1
G
r
A
n'_{BA}
T
$\perp OA$
$\perp Og$
$\perp AB$
b
g
q
n'_B
b'
O
C

Fig. 6 b

§. 3. Construcția grafică a curbei polului de inerție

Folosind metodele enumerate mai sus, s-a construit curba polului de inerție, corespunzătoare unui ciclu cinematic pentru :

— un mecanism patrulater (fig. 6) ;

— un mecanism-motor bielă-manivelă (fig. 7 a)

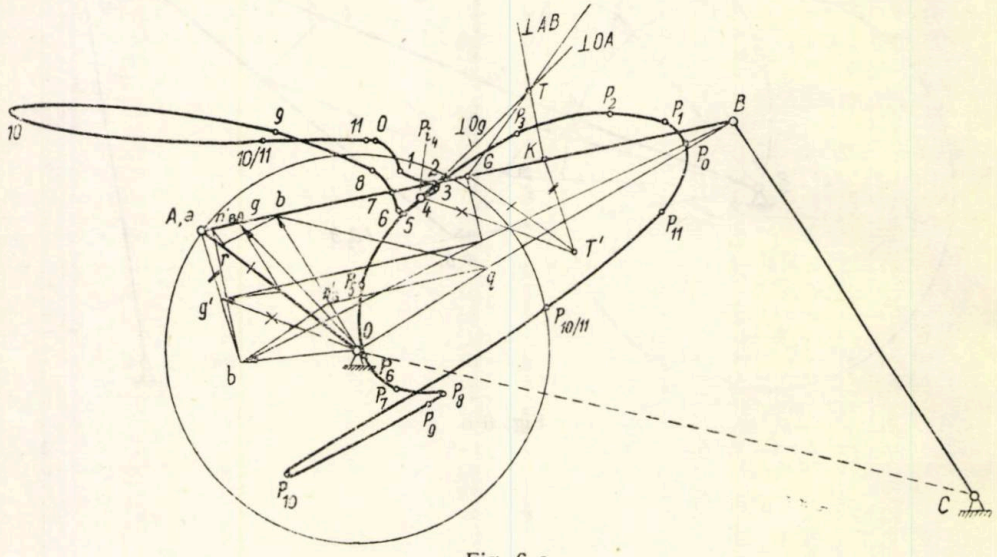


Fig. 6 c

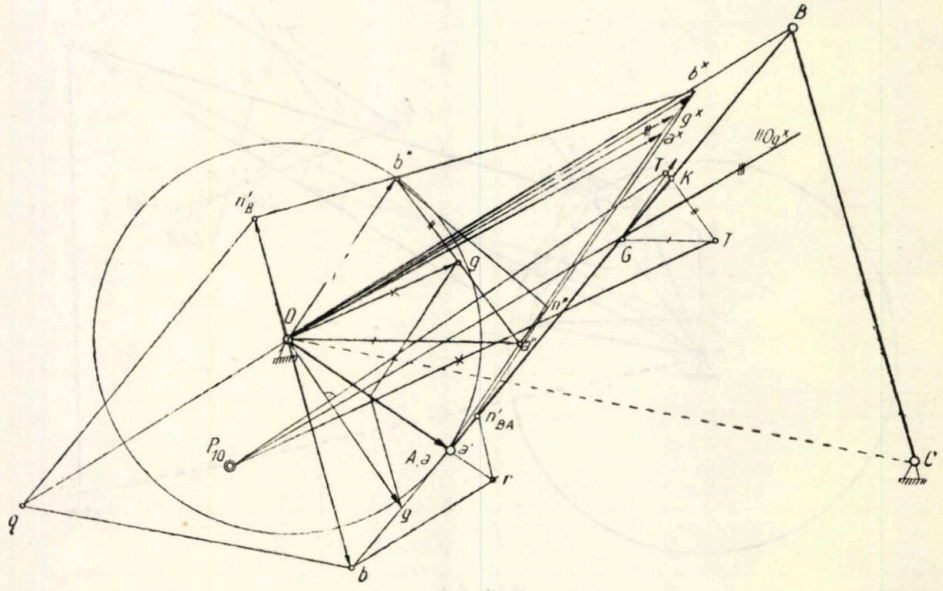


Fig. 6 d

Pentru mecanismul patrulater s-au ales 12 poziții ale manivelei (0 ... 12) plus încă una între pozițiile 10 și 11 pentru mărirea preciziei trasării curbei. În figurile (6 *a*, *b*, *c*, *d* și *e*) se redau numai pozițiile 1, 2, 4; 10 și 10/11.

În fig. 6 *f* s-a trasat curba polului de inerție P_i în planul fix, iar corespunzător poziției 4 (fig. 6 *c*) și curba în planul mobil (cele două curbe sînt tangente în punctul P_{i4}).

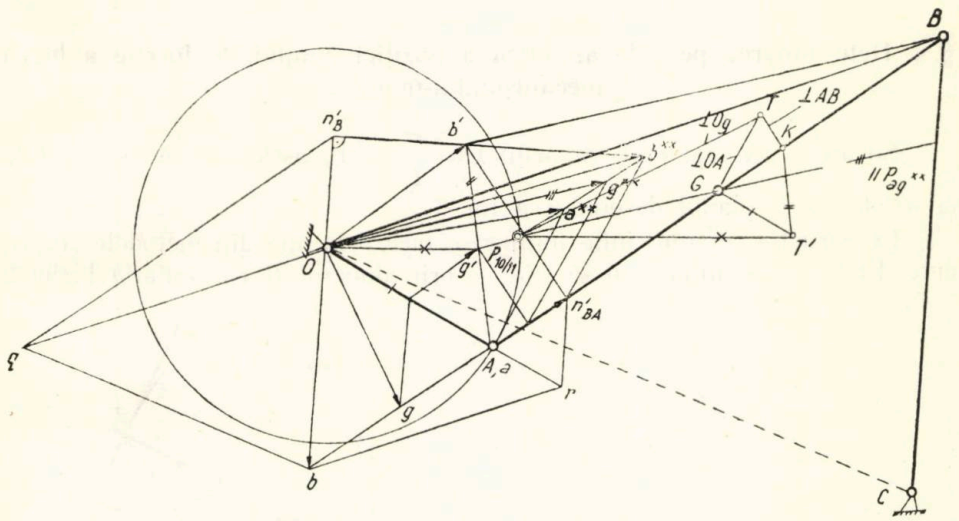


Fig. 6 e

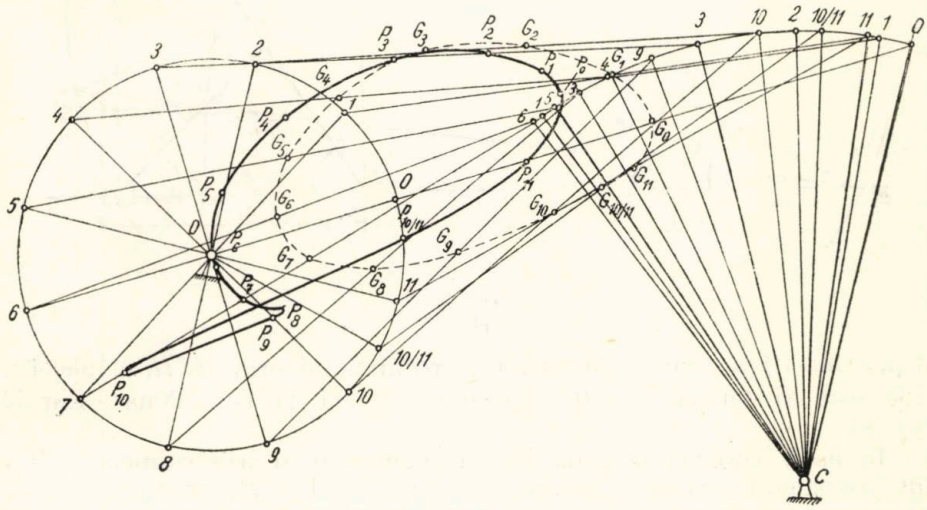


Fig. 6 f

Pentru mecanismul bielă-manivelă se poate determina curba polului de inerție prin aceeași metodă și acest lucru se face pentru 3 poziții indicate în fig. 7 *b*. S-a utilizat însă metoda aproximativă propusă de *O. Tolle* [4] care se compară cu aceea obținută pe cale analitică, ceea ce constituie obiectul paragrafului următor (curba este trasată prin 24 de puncte, cu mențiunea că pentru pozițiile 13—24 se obțin situații de simetrie) (Fig. 7 *a*).

§. 4. Determinarea pe cale analitică a poziției polului de inerție a bielei mecanismului-motor

Se alege un motor cu raportul $\lambda = \frac{r}{l}$ mare astfel ca să fie posibilă cuprinderea în planul desenului a lui W.

Construcția cercului inflexiunilor se face prin una din metodele cunoscute. El trece — după cum se știe — prin punctul B (articulația bielei 2

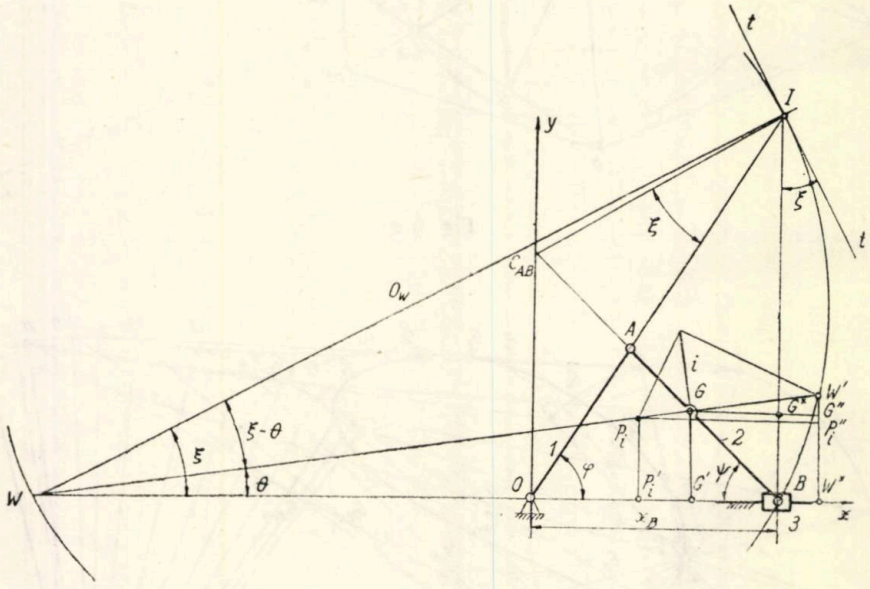


Fig. 8

cu pistonul 3) a cărui traiectorie este rectilinie și prin I(*CIR*-ul bielei 2) unde este și tangent la *tt*, tangenta comună la cele două centroide (fig. 8).

În baza teoremei izogonalității (tangenta *tt* și axa colineară IC_{AB} sînt izogonale cu razele vectoare ale punctelor A și B) avem:

$$\sphericalangle OIC_{AB} = \sphericalangle BIt = \xi = \sphericalangle IWB.$$

Din figura, comod construită astfel, polul de inerție P_i al bielei 2 se determină imediat prin construirea centrului de oscilație al bielei în raport cu W'.

Această construcție devine imposibilă în cazul cînd raportul λ scade la valori sub 1/3, adică tocmai cazul din practică.

O construcție grafică aproximativă, [6] determină pe P_i, ca centru de oscilație a bielei 2 în raport cu G^* (intersecția lui IB cu paralela dusă din G la OB).

În cele de mai jos ne propunem să găsim ecuația curbei polului de inerție P_i în planul *fix* prin determinarea relației dintre coordonatele acestuia în raport cu sistemul de axe XOY din fig. 8.

§. 4.1. Determinarea coordonatelor punctului P_i

Dacă se notează:

$$OA = r \qquad AB = l,$$
$$AG = a,$$
$$x_B = OB \quad \text{atunci:}$$
$$IB = x_B \operatorname{tg}\varphi \quad ; \quad WB = IB \operatorname{ctg}\xi = x_B \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\xi.$$

Cu aceste date, coordonatele lui W (centrul inflexiunilor) sînt:

$$\begin{aligned} x_w &= x_B (1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\xi) \\ y_w &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Polul de inerție P_i se află pe dreapta WW' ca centru de oscilație al bielei 2 în raport cu W'.

În consecință:

$$W'G \cdot GP_i = i_{G_2}^2. \tag{2}$$

în care

$i_{G_2} = \sqrt{\dfrac{I_{G_2}}{m_2}}$ este raza de girație a bielei în raport cu G.

Înmulțind pe (2) cu $\cos^2\theta$ unde

$$\theta = \sphericalangle W'WB$$

se obține:

$$W'G \cdot \cos\theta \cdot GP_i \cos\theta = i_{G_2}^2 \cos^2\theta.$$

sau:

$$W''G' \cdot G'P_i' = i_{G_2}^2 \cos^2\theta$$

de unde:

$$P_i'G' = \frac{i_{G_2}^2 \cos^2\theta}{W''G'}. \tag{3}$$

În mod analog se găsește expresia:

$$P_i'' G'' = \frac{i_{G_2}^2 \sin^2\theta}{W' G''}. \tag{4}$$

Relațiile (3) și (4) se mai pot scrie:

$$x_P - x_G = \frac{i_{G_2}^2 \cos^2\theta}{x_G - x_{W'}} \tag{3'}$$

$$y_P - y_G = \frac{i_{G_2}^2 \sin^2\theta}{y_G - y_{W'}}. \tag{4'}$$

Din (3') și (4') rezultă:

$$x_P = x_G + \frac{i_{G_2}^2 \cos^2\theta}{x_G - x_{W'}} \tag{5}$$

$$y_P = y_G + \frac{i_{G_2}^2 \sin^2\theta}{y_G - y_{W'}} \tag{6}$$

sau

$$x_P = x_G + \frac{i_{G_2}^2}{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)(x_G - x_{W'})} \tag{5'}$$

$$y_P = y_G + \frac{i_{G_2}^2 \operatorname{tg}^2\theta}{(y_G - y_{W'})(1 + \operatorname{tg}^2\theta)}. \tag{6'}$$

Valorile coordonatelor lui G se obțin din fig. 8:

$$x_G = r\cos\varphi + a\cos\psi$$

$$y_G = r\sin\varphi - a\sin\psi$$

și în funcție numai de φ:

$$x_G = r\cos\varphi + a\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi} \tag{7}$$

$$y_G = (r - a\lambda)\sin\varphi. \tag{8}$$

Totodată

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_G}{x_G - x_W}. \tag{9}$$

§. 4.2. Determinarea coordonatelor punctului W'

Din fig. 8 se deduce că :

$$x_{W'} = OW'' = W\,W'' - WO$$

unde :

$$W\,W'' = W\,W \cdot \cos\theta = d\cos(\xi - \theta)\cos\theta$$

în care :

$$d = \frac{IB}{\sin\xi} = \frac{x_B \operatorname{tg}\varphi}{\sin\xi}$$

și

$$WO = W\boldsymbol{B} - OB = x_B \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi - x_B = x_B(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi - 1)$$

Făcînd înlocuirile mai sus se obține :

$$x_{W'} = \frac{x_B \operatorname{tg}\varphi}{\sin\xi}\cos(\xi - \theta)\cos\theta - x_B(\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi - 1)$$

care după o serie de transformări capătă forma :

$$x_{W'} = \frac{x_B \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} \cdot [1 - \operatorname{ctg}\xi \operatorname{tg}\theta] + x_B . \tag{10}$$

In același mod se determină expresia lui $y_{W'}$ după cum urmează :

$$y_{W'} = WW'' = WW' \cdot \sin\theta = d\cos(\xi - \theta)\cdot\sin\theta.$$

$$y_{W'} = \frac{x_B \operatorname{tg}\varphi}{\sin\xi}[\cos\xi\cos\theta + \sin\xi\sin\theta]\sin\theta .$$

care se poate pune sub forma :

$$y_{W'} = x_B \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta \frac{\operatorname{ctg}\xi + \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} . \tag{11}$$

§. 4.3. Determinarea expresiei analitice a lui ξ

Din fig. 9 rezultă :

$$\operatorname{ctg}\xi = \frac{ID}{CD}$$

însă :

$$ID = OI - OD = \frac{x_B}{\cos\varphi} - x_B \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi$$

unde D este piciorul perpendicularei din C pe OI

și

$$CD = x_B \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \varphi .$$

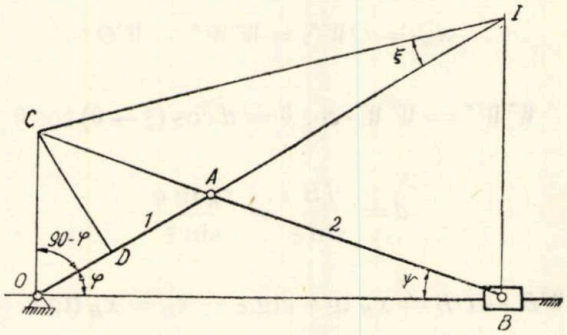


Fig. 9

Inlocuind aceste date în expresia de mai sus, după cîteva transformări se obține :

$$\operatorname{ctg} \xi = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi . \qquad (12)$$

APLICAȚIE NUMERICĂ

Determinarea coordonatelor polului de inerție ale bielei pentru 12 poziții ale manivelei (din 15° în 15° — considerînd poziția 0 la *P.M.E.*), la mecanismul bielă manivelă cu următoarele dimensiuni :

$$r = 0{,}180 \text{ m}$$
$$l = 0{,}720 \text{ m}$$
$$G_2 = 65{,}74 \text{ kgf}$$
$$AG_2 = a = \frac{1}{3} \cdot l = 0{,}240 \text{ m}$$
$$I_{G_2} = 0{,}643 \text{ kgf ms}^2 \qquad i^2_{G_2} = 0{,}0961 \text{ m}^2 .$$

Urmează să se determine valorile numerice ale expresiilor x_P și y_P date de formulele (5′) și (6′).

În acest scop se calculează mai întîi o serie de termeni care intră în aceste formule după cum urmează :

În tabela 1 :

$$x_B = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

Tabela 1

Poz.	φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$r\cos\varphi$	$\lambda\sin\varphi$	$\lambda^2\sin^2\varphi$	$1-\lambda^2\sin^2\varphi$	$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$	$\operatorname{tg}\psi=\frac{\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}$	$l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$	$a\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}$	$x_B=r\cos\varphi+$ $+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$	$x_G=r\cos\varphi+$ $+a\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$	$y_G=(l-a\lambda)\sin\varphi$
0	0	0,0000	1,0000	0,180	0,0000	0	1,000	1,00	0	0,720	0,240	0,900	0,420	0,000
1	15°	0,2588	0,9659	0,1738	0,0647	0,0041	0,9959	0,9979	0,0648	0,7184	0,2394	0,8922	0,4132	0,0310
2	30°	0,5000	0,8660	0,1558	0,1250	0,0156	0,9844	0,9922	0,1259	0,7143	0,2381	0,8701	0,3939	0,0600
3	45°	0,7071	0,7071	0,1272	0,1767	0,0312	0,9688	0,9843	0,1795	0,7086	0,2362	0,8358	0,3634	0,0848
4	60°	0,8660	0,5000	0,0900	0,2165	0,0468	0,9532	0,9763	0,2217	0,7029	0,2343	0,7929	0,3243	0,1039
5	75°	0,9659	0,2588	0,0465	0,2414	0,0583	0,9417	0,9704	0,2487	0,6986	0,2328	0,7451	0,2793	0,1159
6	90°	1,0000	0,0000	0,0000	0,2500	0,0625	0,9375	0,9683	0,2581	0,6971	0,2323	0,6971	0,2323	0,1200
7	105°	0,9659	−0,2588	−0,0465	0,2414	0,0583	0,9417	0,0704	0,2487	0,6986	0,2328	0,6521	0,1863	0,1159
8	120°	0,8660	−0,5000	−0,0900	0,2165	0,0468	0,9532	0,9763	0,2217	0,7029	0,2343	0,6129	0,1443	0,1039
9	135°	0,7071	−0,7071	−0,1272	0,1767	0,0312	0,9688	0,9843	0,1795	0,0786	0,2362	0,5814	0,1090	0,0848
10	150°	0,5000	−0,8660	−0,1558	0,1250	0,0157	0,9844	0,9922	0,1259	0,7143	0,2381	0,5585	0,0823	0,0600
11	165°	0,2588	−0,9659	−0,1738	0,0647	0,0041	0,9959	0,9979	0,0648	0,7184	0,2394	0,5446	0,0656	0,0310
12	180°	0,0000	−1,0000	−0,180	0,0000	0	1,000	1,00	0,000	0,720	0,240	0,5400	0,060	0,000

și

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda \sin\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}$$

și apoi coordonatele punctului $G: x_G$ și y_G cu ajutorul formulelor (7) și (8).

În tabela 2 se calculează * $\operatorname{ctg}\xi$ conform expresiei 12 : x_W din relația (1) și $\operatorname{tg}\theta$ din relația (9).

În continuare se utilizează tabela 3 în care se calculează $x_{W'}$ și $y_{W'}$ cu expresiile:

$$x_{W'} = x_B \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\theta\,[1 - \operatorname{ctg}\xi \operatorname{tg}\theta] + x_B$$

$$y_{W'} = x_B \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta \operatorname{ctg}\xi .$$

obținute din (10) și (11) prin neglijarea termenilor ce conțin pe $\operatorname{tg}^2\theta$, întrucît acești termeni sînt foarte mici (cel mai mare e de ordinul 10^{-4}).

Rezultatele finale apar în tabela 4 unde s-au determinat coordonatele x_p și y_p la scara adoptată pentru construirea mecanismului $k_s = \left[\dfrac{1\text{ m}}{500\text{ mm}}\right]$.

---

* Pentru poz. $\varphi = 0$ și $\varphi = 180°$ în calculul lui x_W se procedează astfel: Se substituie în (12)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\lambda \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi - \lambda^2\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

și se obține:

$$\operatorname{ctg}\xi \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\lambda}\left[\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi - \lambda^2\operatorname{tg}^2\varphi}\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi) - \lambda\operatorname{tg}^2\varphi\right]$$

care prin înlocuire în (1) conduce la:

$$x_W = \frac{x_B}{\lambda}\left[\lambda + \lambda\operatorname{tg}^2\varphi - (1+\operatorname{tg}^2\varphi)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi - \lambda^2\operatorname{tg}^2\varphi}\right]. \qquad (13)$$

Pentru $\varphi = 0$

$$x_W = \frac{x_B}{\lambda}[\lambda - 1]$$

sau:

$$x_W = \frac{r^2 - l^2}{r} = \frac{0{,}180^2 - 0{,}720^2}{0{,}180} = -0{,}27 .$$

În mod similar pentru $\varphi = 180°$ se găsește:

$$x_W = \frac{-(l-r)^2}{r} = -\frac{0{,}54^2}{0{,}180} = -1{,}62 .$$

Tabela 2

Poz.	φ	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}^2\varphi$	$1+\operatorname{tg}^2\varphi$	$\operatorname{tg}\psi$	$\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}\psi}$	$\operatorname{ctg}\xi = \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi$	$1-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi$	x_B	$x_W = x_B(1-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}\xi)$	x_G	$x_G - x_W$	y_G	$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_G}{x_G - x_W}$	$\operatorname{tg}^2\theta$
0	0	0	0	1	0	∞	∞	$\frac{1}{\lambda}$	$-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$	0,900	— 2,7000	0,420	3,120	0,000	0	0
1	15	0,2679	0,0717	1,0717	0,0648	16.5385	16,2706	4,3588	— 3,3588	0,8922	— 2,9967	0,4132	3,4099	0,0310	0,00909	0,00008
2	30	0,5773	0,3332	1,3332	0,1259	10,5890	10,0117	5,7797	— 4,7797	0,8701	— 4,1588	0,3939	4,5527	0,0600	0,01317	0,00011
3	45	1,00	1,00	2	0,1795	11,1420	10,1420	10,1420	— 9,142	0,8358	— 7,6408	0,3634	8,0042	0,0848	0,01059	0,00011
4	60	1,7320	2,9998	3,9998	0,2217	18,0414	16,3094	28,2478	— 27,2478	0,7929	— 21,6047	0,3243	21,929	0,1039	0,00473	0,00002
5	75	3,7320	13,9278	14,9278	0,2487	60,0233	56,2913	210,0791	—209,0791	0,7451	—155,7848	0,2793	156,0641	0,1159	0,00074	0,00000
6	90	$\pm\infty$	∞	∞	0,2581	∞	∞	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0,6971	$\pm\infty$	0,2323	∞	0,1200	0,00000	0,00000
7	105	—3,732	13,9278	14,9278	0,2487	60,0233	63,7553	—237,9347	238,9347	0,6521	155,8093	0,1863	— 155,623	0,1159	—0,00074	0,00000
8	120	—1,732	2,9998	3,9998	0,2217	18,0414	19,7734	— 33,0419	34,0419	0,6129	20,8642	0,1443	— 20,7199	0,1039	—0,00501	0,00002
9	135	—1	1,00	2	0,1795	11,1420	12,1420	— 12,1420	13,1420	0,5814	7,6407	0,1090	— 7,5317	0,0848	—0,01125	0,00012
10	150	—0,5773	0,3332	1,3332	0,1259	10,5890	11,1663	— 6,4463	7,4463	0,5585	4,1587	0,0823	— 4,0764	0,0600	—0,01471	0,00021
11	165	—0,2679	1,0717	1,0717	0,0648	16,5385	16,8064	— 4,5024	5,5024	0,5446	2,9966	0,0656	— 2,931	0,0310	—0,01057	0,00011
12	180	0	0	1	0	∞	∞	$-\frac{1}{\lambda}$	$1-\frac{1}{\lambda}$	0,54	— 1,62	0,060	1,68	0,000	0,00000	0,00000

Tabela 3

Poz.	x_B	tg φ	x_B tg φ	tg θ	x_B tg φ tg θ	ctg ξ	ctg ξ tg θ	1 — ctg ξ tg θ	x_B tg φ tg θ (1 — ctg ξ tg θ)	$x_{w'} = x_B$ tg φ tg θ (1 — ctg ξ tg θ) + x_B	$y_{w'}$
0	0,900	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	∞			0,0000	0,900	
1	0,8922	0,2679	0,2390	0,0090	0,0021	16,2706	0,1464	0,8536	0,0017	0,8939	0,0341
2	0,8701	0,5773	0,5023	0,0131	0,0065	10,0117	0,1311	0,8689	0,0056	0,8757	0,0650
3	0,8358	1,0000	0,8358	0,0105	0,0087	10,1420	0,1064	0,8936	0,0077	0,8435	0,0882
4	0,7929	1,7320	1,3733	0,0047	0,0064	16,3094	0,0766	0,9234	0,0059	0,7988	0,1043
5	0,7451	3 7320	2,7807	0,0007	0,0019	56,2913	0,0394	0,9606	0,0018	0,7469	0,1069
6	0,6971	± ∞	± ∞	0,0000	0,0000	∞	0,0000	1,0000	0,0000	0,6971	
7	0,6521	—3,7320	—2,4336	—0,0007	0,0017	63,7553	—0.0446	1,0446	0,0017	0,6538	0,1083
8	0,6129	—1,7320	—1,0615	—0,0050	0,0053	19,7734	—0,0988	1,0988	0,0058	0,6187	0,1047
9	0,5818	—1,0000	—0,5814	—0,0112	0,0065	12,1420	—0,1359	1,1359	0,0073	0,5887	0,0789
10	0,5585	—0,5773	—0,3224	—0,0147	0,0047	11,1663	—0,1641	1,1641	0,0054	0,5639	0,0524
11	0,5446	—0,2679	—0,1458	—0,0105	0,0015	16,8064	—0,1764	1,1764	0,0017	0,5463	0,0252
12	0,5400	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	∞			0,0000	0,5400	

Tabela 4

Poz	x_G	$x_{W'}$	$x_G - x_{W'}$	$\frac{i_G^2}{x_G - x_{W'}}$	$x_p = x_G + \frac{i_G^2}{x_G - x_{W'}}$	y_G	$y_{W'}$	$y_G - y_{W'}$	$\frac{i_G^2}{y_G - y_{W'}}$	$\operatorname{tg}^2\theta$	$\frac{i_G^2 \operatorname{tg}^2\theta}{y_G - y_{W'}}$	y_p	$(x_p)_{mm}$	$(y_p)_{mm}$
0	0,0420	0,900	—0,480	—0,2002	0,2198	0,0000				0,00000			109.9	0,0
1	0,4132	0,8939	—0,4807	—0,1999	0,2133	0,0310	0,0341	—0,0031	— 31,0000	0,00008	—0.0024	0,0286	106,6	14,3
2	0,3939	0,8757	—0,4818	—0,1994	0,1945	0,0600	0,0650	—0,0050	— 19,2200	0,0011	—0,0021	0,0579	97,2	28,9
3	0,3634	0,8435	—0,4801	—0,2001	0,1633	0,0848	0,0882	—0,0034	— 28,2647	0,00011	—0,0031	0,0817	81,6	40,8
4	0,3243	0,7988	—0,4745	—0,2025	0,1218	0,1039	0,1043	—0,0004	—240,2500	0,00002	—0,0048	0,0991	60,9	49,5
5	0,2793	0,7469	—0,4676	—0,2055	0,0738	0,1159	0,1069	0,0090	— 10,6777	0,00000	0,0000	0,1159	36,9	57,9
6	0,2323	0,6971	—0,4648	—0,2067	0,0256	0,1200	0,1200	0,0000	∞	0,00000	0,000	0,1200	12,8	60
7	0,1863	0,6538	—0,4675	—0,2055	—0,0192	0,1159	0,1083	0,0076	16,6447	0,00000	0,000	0,1159	— 9,6	57,9
8	0,1443	0,6187	—0,4744	—0,2025	—0,0582	0,1039	0,1047	0,0008	120,1250	0,00002	—0,0024	0,1015	— 29,1	50,7
9	0,1090	0,5887	—0,4797	—0,2003	—0,0913	0,0848	0,0789	0,0059	16,2881	0,00012	0,0019	0,0867	— 45,6	43,3
10	0,0823	0,5639	—0,4816	—0,1995	—0,1172	6,0600	0,0524	0,0076	16,6447	0,00021	0,0034	0,0634	— 58,6	31,7
11	0,0656	0,5463	—0,4807	—0,1990	—0,1343	0,0310	0,0252	0,0058	16,5689	0,00011	0,0018	0,0328	— 67,1	16,4
12	0,060	0,5400	—0,4800	—0,2002	—0,1402	0,000				0,00000			— 70,1	0,0

Concluzii referitoare la rezultatele obținute prin metoda propusă de O. Tolle față de cele rezultate prin calcul

Punctele obținute prin metoda Tolle sînt puțin deplasate în sensul — piston, articulația fixă a manivelei, ceea ce determină o mică deplasare a curbei în acest sens.

Punctele sînt deplasate și pe verticală după cum urmează:

Pentru $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ punctele obținute prin metoda *„Tolle"* sînt deasupra punctelor determinate analitic. Situația este inversată pentru $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Pentru φ cuprins între π și 2π ambele curbe ale polului de inerție rezultă prin simetrie.

Catedra de teoria mecanismelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Manolescu I. N., Maros D.:* Teoria mecanismelor și a mașinilor, Cinetostatica și dinamica. Editura tehnică 1958 pag. 36.
2. *Maros D.:* O determinare grafico-analitică a repartiției accelerațiilor la mecanisme sub acțiunea unui sistem de forțe pentru o poziție și o repartiție cunoscută de viteze. Bulet. Inst. politehnic Cluj 1958 pag. 480.
3. *Manolescu I. N., Stoenescu Al., Boiangiu D.:* Nekotorie nabliudenie otnositelno poliusa inerții. Bulet. Inst. polit. Buc. Tom. XXII fasc 1/1960.
4. *Manolescu I. N., Stoenescu Al., Boiangiu D.:* Polul de inerție în mișcarea cicloidală și interpretarea lui în mișcarea de șurub. Bulet. Inst. politeh. Buc. Tom. XXIV. fasc 2/1962.
5. *Tolle Otto:* Die verschiedenen Konstruktionen zur Ermittlung des Trägheitspoles. Feinwerktechnik 61 Iahr Haft 9/199.
6. *Rössner W., Neupert H., Seelbinder G. H.:* Sesiunea de specialitate „Tehnica mecanismelor și aplicațiile ei practice ținute în Konstantz 1957.
7. . . . Maschienenbau Technik Nr. 1/1958 pag. 49—56. Comunicare: „Forțele de inerție în mecanisme de O. Tolle.".

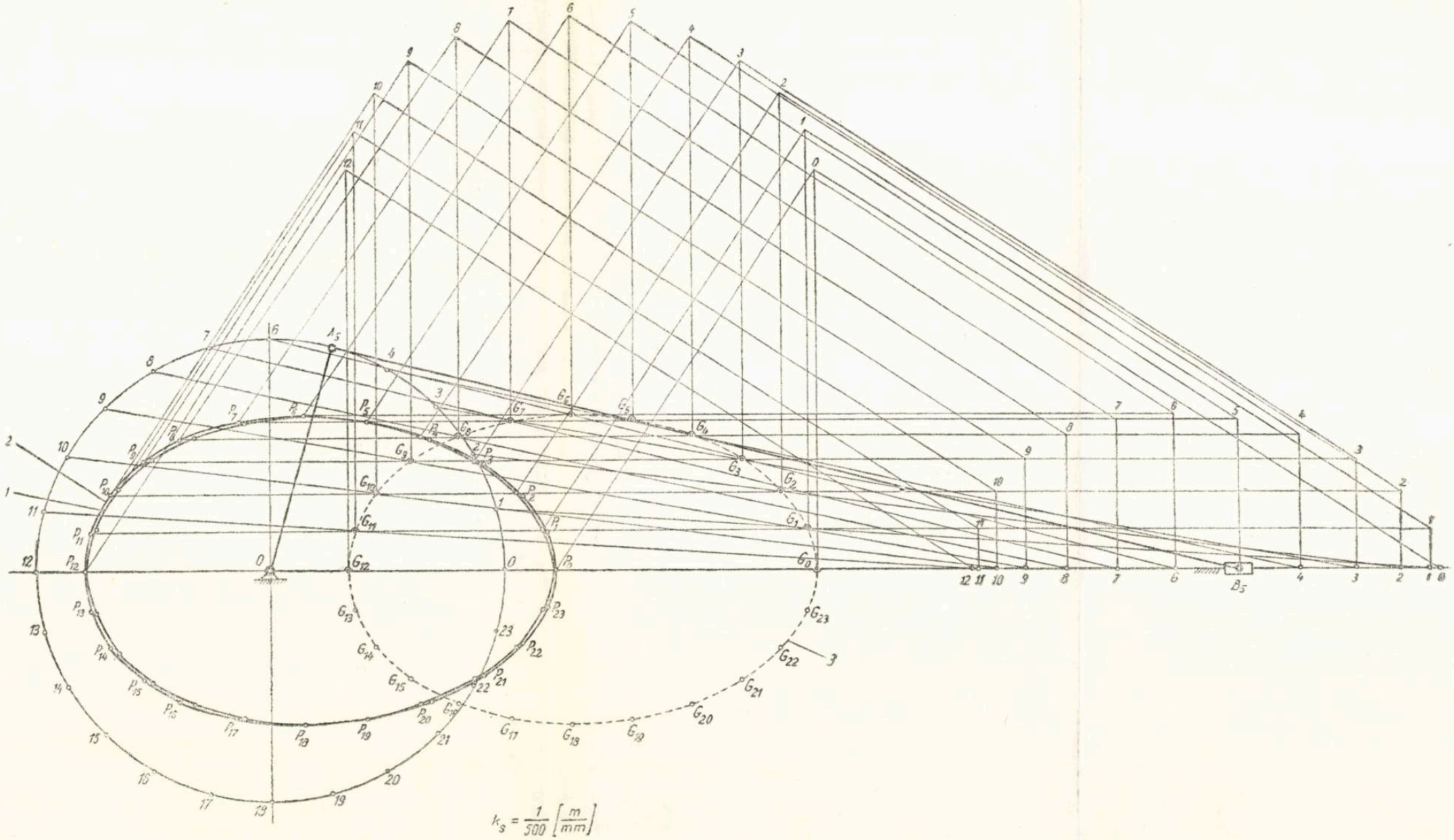


Fig. 7 a

1. Curba determinată analitic
2. Curba determinată prin metoda propusă de Tolle
3. Traiectoria centrului de greutate

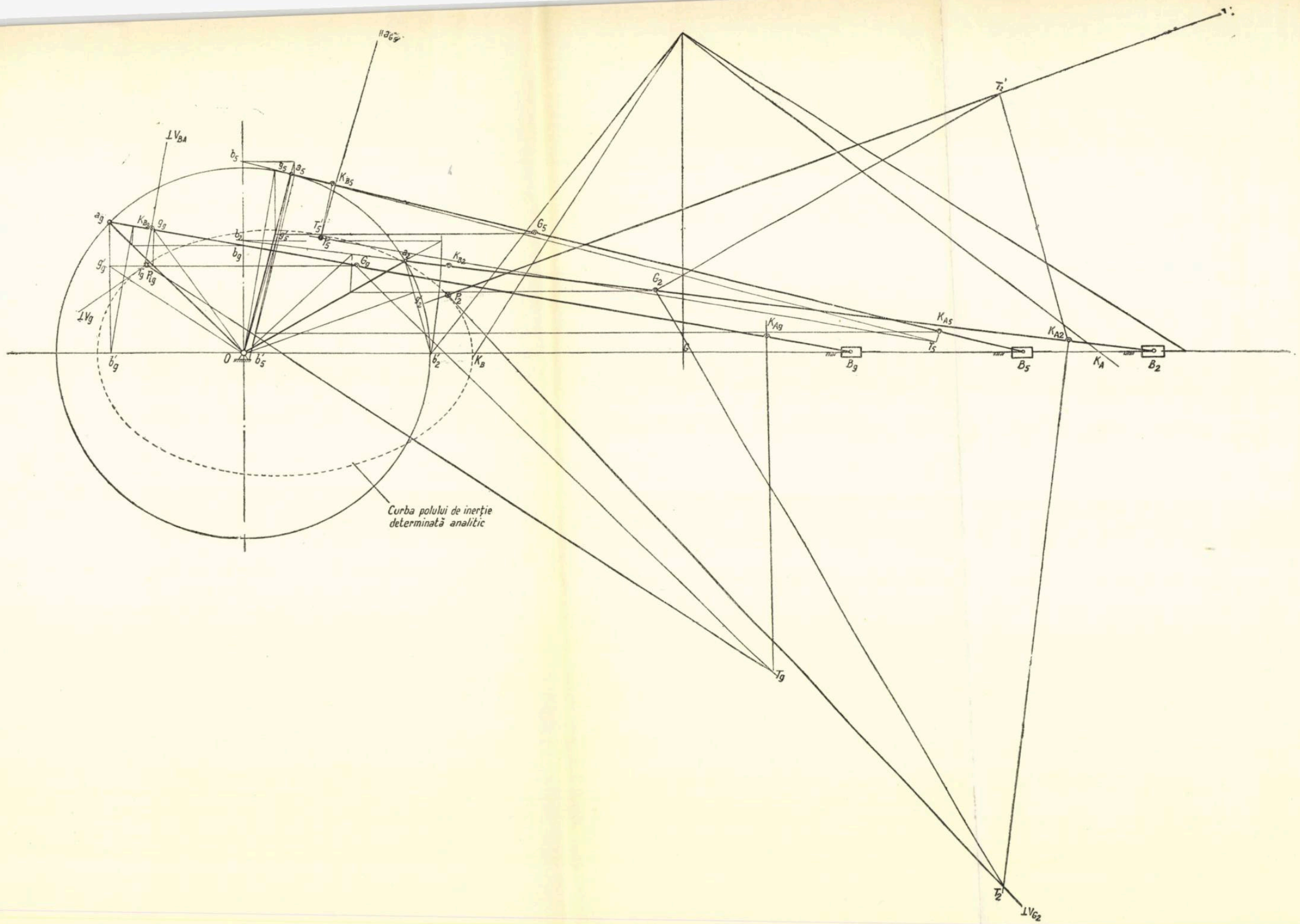


Fig. 7 b

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

TEHNOLOGIA CHIMICĂ

C. Z.: 666.2.: 620.19

SUR LES METHODES DE DETERMINATION DE LA RESISTANCE DES EMAUX A LA CORROSION *

R. DINESCU, M. THALER, M. CERCHEZ

L'outillage métalique émaillé antiacide est largement utilisé dans l'industrie chimique. Il est nécessaire en même temps que les émaux utilisés aient une résistance à la corrosion, la plus haute possible. La réalisation de ce desideratum exige l'utilisation des méthodes de laboratoires les plus indiquées pour apprécier la résistance des émaux à la corrosion.

A. L'aspect théorique

Il y a deux groupes de méthodes pour déterminer la solubilité des émaux qui se distinguent d'après la méthode d'essai de l'émail:

a) Des méthodes où l'émail est appliqué sur métal

b) Des méthodes qui utilisent l'émail moulu sous forme de semoule (1), (10).

Les producteurs d'articles émaillés préfèrent utiliser la méthode de l'émail appliqué sur metal car cette méthode est la plus proche des conditions habituelles d'utilisation des outillages. Le désavantage de cette méthode est que les épreuves soumises aux tests possèdent une petite surface et, par consequent, pour réaliser le degré de corrosion nécessaire on doit utiliser des épreuves plus importantes, aux temps plus longs d'attaque.

Le procédé de détermination de la résistance sur semoule utilise des granules d'émail qui ont une surface spécifique plus grande et permet la réduction de la durée d'attaque. Mais en tenant compte que la surface de la semoule est obtenue mécaniquement, par moulure, on considère que son comportement à la corrosion ne sera le même qui celui obtenu par refroidissement du produit fondu, comme pour l'émail appliqué.

Dans cet article on a cherché la solution de ces désavantages des procédès ci-dessus. Dans ce but, on a imaginé une méthode par laquelle

* Communiquée à le session scientifique de cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest 22—23 février 1964.

l'émail réduit en poudre est fondu à la flamme. On obtient ainsi des microgranules sphériques d'émail. Cette épreuve microgranulaire possède une surface de réaction aux solutions similaire à celle de l'émail appliqué sur objets. Elle est assez grande pour que la durée d'attaque nécessaire soit courte. On a ensuite examiné une autre objection dans le cas de la méthode de la semoule, à savoir le fait que l'indication des limites de la granulosité de l'épreuve n'assure pas la réalisation de surfaces d'attaque des épreuves d'une etendue égale.

Pour vérifier ceci, on a aussi effectué la détermination de la surface spécifique des épreuves expérimentées.

On a ensuite procédé à une série de mesures comparatives de la résistence chimique de certains émaux par la méthode des microgranules et celle de la semoule, notre intention étant d'effectuer dans une future série d'essais des experiences similaires sur des épreuves métalliques émaillés

Tableau 1

La composition chimique des émaux etudiés

Oxide	E_1 (SiO_2)		F_2 (Sb_2O_3)		F_3 (TiO_2)	
	Mol	%	Mol	%	Mol	%
SiO_2	1,052	65,7	1	59,3	1	62,1
Al_2O_3	0,035	3,5	0,035	3,3	0,035	3,5
Na_2O	0,275	21,0	0,275	19,8	0,275	20,7
CaO	0,038	2	0,032	1,9	0,038	2
F (Na_2SiF_6)	0,07	7,8	0,07	7,4	0,07	7,7
Oxide ajouté	—	—	0,031	1,3	0,052	4,1
Total		100		100		100,1

Les déterminations de la résistance chimique ont été poursuivies sur des épreuves d'émail de diverses compositions (le tableau Nr. 1).

On a choisi un émail difficilement fusible noté par E_1, dont 0,052 mole de silice a été substitueé équitomiquement par du Sb_2O_3 et du TiO_2. On a obtenu ainsi les émaux E_2 et E_3. Le nombre d'atomes de ces émaux par unité de structure de verre est constant. Dans ce cas là, apparait de façon plus evidente l'influence des cathions sur la résisitence chimique des émaux.

B. L'aspect expérimental

1. *La synthèse des émaux*

Les substances utilisées pour la synthèse des émaux ont été très pures au point de vue chimique.

On sait que de tous les composants utilisés, le F, les alcalins posèdent une volatilite sensible pendant la fusion. On admet en général que par

rapport aux autres composants, le fluore a le plus grand degré de volatilité. On connait aussi le fait que la volatilisation de fluore dépend de la nature du composant sous la forme duquel il est utilisé et de la composition de l'émail (2). Vielhaber (3) prouve que la volatisation du fluore des émaux blancs sans bore serait de 21% et pour ceux du type avec B de 51%. Malinovski (4) indique pour un émail à 12% de B_2O_3 une parte pour le fluore 53,4%.

Petzold (1) indique une perte de F de 12 ... 15%. On voit donc qu'il existe des opinions et chifres diverses en ce qui concerne la perte de F.

Des données plus récentes (5) et d'autres plus anciennes (11) en généralisant toute une série de résultats, prouvent que les pertes peuvent atteindre 50% et qu'elles dépendent de la composition de l'émail ainsi que de la nature du composant à F qui s'y introduit. En utilisant Na_2SiF_6, il a une volatilité en perdant de F ; il y a même une seriation des combinaisons avec F, d'après la tendance de volatilisation de F (3) ; $NaF < Na_3Al.F_6 < CaF_2 < Na_2SiF_6 < AlF_3 . Na_2SIF_6$ a donc une grande tendance à se décomposer en perdant le fluore ; celui-ci ne peut être saturé avec du Na, parce que le rapport $\frac{F}{Na} = 2$ dans le Na_3AlF_6, et $\frac{F}{Na} = 1$ dans la flourure.

Les résultats des recherches des savants japonais (6) ont demontré, par des études sistématiques que pendant la fusion ce n'est pas SiF_4 est que dans le cas ou il y a une perte massive de F, il devait y avoir des pertes de Si ; mais on ne l'a pas remarqué au cours d'une série integrale d'émaux analysés après fusion. Il est plus probable que Si obtenu du fluorsilicate est saturé plutôt par les alcalins que par F.

Pour préciser la volatilité de F et de Na, on a fait l'analyse des pertes subies par l'émail E_1, au frittage, en examinant la proportion des composants du mélange non fritté et fritté. On a fait l'analyse gravimétrique de F par précipitation sous forme de CaF_2 ; Na par l'analyse photométrique au photomètre à flamme. Les résultats se trouvent dans le tableau Nr. 2.

Tableau 2

La variation de la composition du frittage de l'émail E_1

Oxide	Avant la fusion %	Après la fusion			La moyenne %
		Det_1	Det_2	Det_3	
Na_2O	23,1	24,2	23,1	24,1	24
F	8,6	5,73	3,55	4,52	4,6

Il résulte au frittage une perte de 46% du fluore introduit dans le mélange. En même temps la volatilisation de 4% du fluore (pour 100% d'émail conduit à l'augmentation de 1% de la proportion de Na (100% d'émail). Ce fait montre des pertes négligeables de Na. On a effectué le fritage dans un four à gaz à une temperature de 1250—1500°C. Pour réaliser une fonte homogène, il a fallu un temps de fusion variable, (Fig. 1). On a remarque l'effet fondant plus prononcé au Sb_2O_3.

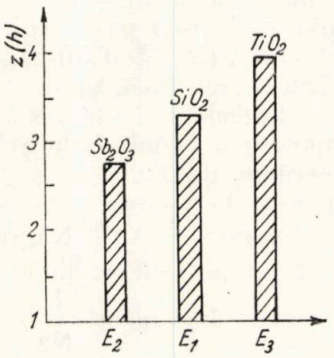


Fig. 1 Temps de fusion des emaux

2. *L'obtention de la semoule.*

Après frittage et mouture, on a retenu les granules comprises entre 0,3-–0,5 mm, sur lesquelles on a fait des épreuves de résistance aux acides.

3. *L'obtention des granules sphériques.*

La fraction fine restée de la mouture de la semoule a été moule de nouveau jusqu'a une finesse au-dessous de 0,1 mm. Du materiel moulu on a préparé par fusion à soufflage, des granules sphériques.

L'instalation pour l'obtention de granules sphériques est montrée dans la fig. 2.

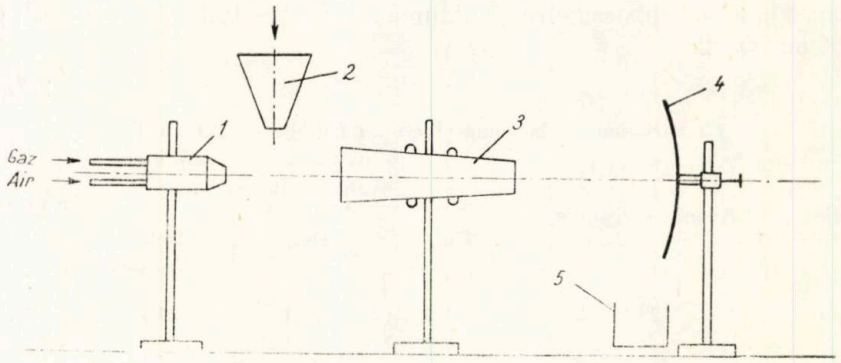


Fig. 2. L'instalation pour l'obtention des granules sphériques
1 — bruleur à gaz et air ; 2 — entonnoir ; 3 — manchon ; 4— collecteur ; 5 — recipient

L'installation est formée par un bruleur à gaz et à air sous pression (1) devant lequel on fait couler par un entonnoir, de la poudre d'émail. Cette poudre est entrainée et fondue par la flamme dans le manchon (3). Les microgranules sont prises dans le collecteur (3) et ramassées dans un recipient (5).

Pendant la fusion grâce au courant des gaz brulés, la fraction très fine a été entrainée. Les impurités accumulées dans la fraction pulverisée,

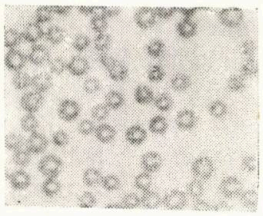


Fig. 3. La micrographie de microgranules

sont ainsi éliminées. Ce fait a été vérifié par analyse. Dans la fig. 3 on a reproduit la micrographie de la micropoudre. Les granules ont un diamètre de 0,1—0,2 mm.

4. *La détermination de la surface spécifique de la semoule et des microgranules.*

La methode la plus utilisée de la détermination de la surface spécifique des matériels pulvérulents — la méthode de la permeabilité à l'air — n'est pas indiquée surtout pour la semoule, parce qu'elle donne des résultats satisfaisants seulement dans le cas des produits finement moulus,

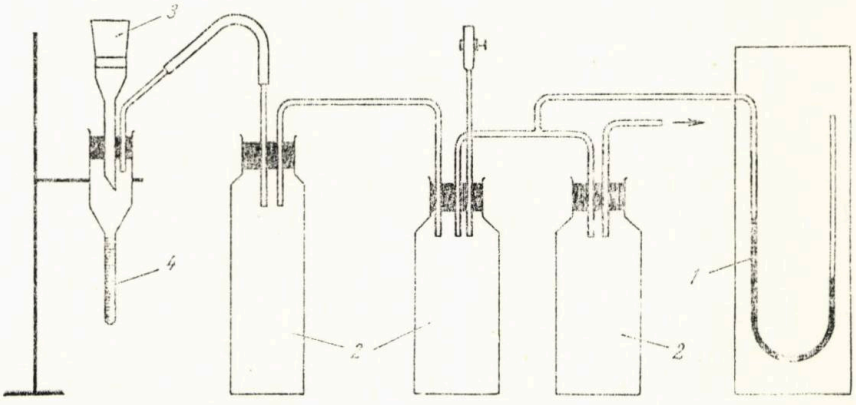


Fig. 4 : 1. L'appareil de la détermination de la surface specifique. Manomètre ; 2. Vase ; 3. Crèuset filtrant ; 4. Burette.

ayant une grande surface spécifique. C'est pour cela qu'il a été nécésaire d'utiliser une méthode plus adéquate de détermination de la surface spécifique.

Dans ce but, on a utilisé la méthode récement proposée de détermination de la surface spécifique pour matériels grosièrement granulés, indiquée par Ringquist (7). La base théorique de cette méthode est de calculer le travail necessair à l'extraction de l'eau des granules. Le travail est d'autant plus grand que le materiel est plus fin, c'est à dire proportionel à sa surface specifique.

Dans l'appareil de Ringquist presenté dans la fig. 4 les granules sont introduites dans le creuset filtrant (3) humectées d'eau. Dans l'appareil on produit un vide de divers degrés et l'on mesure la quantité d'eau extraite du lit des granules dans la burette (3). Les dépressions sont mesurées au manomètre (1).

En inscrivant les volumes d'eau extraits des granules humectées et les pressions pendant les extractions respectives, sur le graphique p = f(V), on aboutit à une courbe comme celle representée dans la fig. 3.

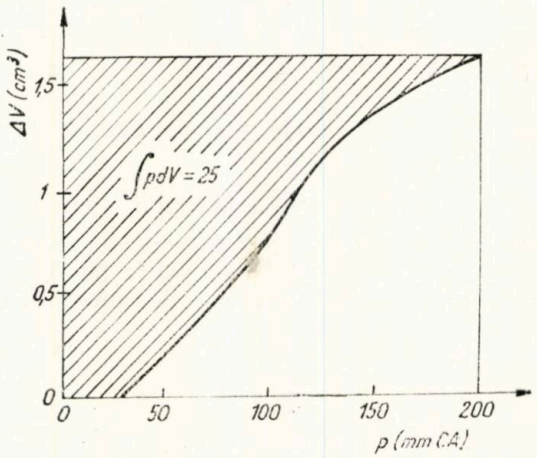


Fig. 5. La diagramme $\Delta V - p$

La courbe peut être representée par l'équation

$$ms = a\ p \cdot dv + b$$

qui relie la surface $S = \int pdv$ par l'intermède de deux constantes a et b, obtenus par l'etalonnage de l'apareil avec des granules de verre dont la surface a été determinée par calcul et du poids de l'épreuve — m.

Les resultats obtenus sur émaux sous forme de semoule et sous forme de microgranules sont presentés dans le tableau 3.

Tableau 3

La surface spécifique des émaux granules

Email	La surface spécifique (cm^2/g)	
	Semoule	Microgranules
E_1	175	543
E_2	178,2	603
E_3	210	635

Il résulte que la surface spécifique est environ trois fois plus grande que celle de la semoule.

6. *Les résultats obtenus*

a) *Mode d'exprimer la résistence à la corrosion*

Les déterminations de la surface spécifique, faites par la méthode de l'absorption d'eau, donnent pour la semoule des divers émaux des valeurs différents de la surface spécifique, comprises entre 175 et 210 cm^2/g c'est à dire des différences jusqu'au 20% par rapport à la valeur minime.

C'est pour cele que si l'on rapporte la perte de poids de la semoule, au poids initial (comme il est prévu par la norme pour la verre) et ensuite d'une manière similaire à sa surface spécifique les resultats obtenus dans les deux cas, peuvent être sensiblement différents, ainsi qu'il résulte des données présentées dans le tableau nr. 4.

Tableau 4

La perte de poids de la semoule des émaux traités avec la solution de HCl

L'émail	Oxyde	Surface Specifique	La perte de poids apres 3 heures d'ebullition			
			En % par rapport du poids de l'émail	% par rapport a $E_1 = 100$	En mg^2/cm	% par rapport a $E_1 = 100$
E_1	SiO_2	175	0,7	100	0,040	100
E_2	Sb_2O_3	178	1,13	162	0,063	152
F_3	TiO_2	210	0,58	82	0,027	69

En considérant les valeurs pour $E_1 = 100$ on remarque que les valeurs de l'attaque des émaux exprimés par les deux façons ne different pas d'une manière proportionelle. Par exemple : l'attaque de l'émail E_2

exprimée en mg/cm² diffère de 83 — 69 = 14% par rapport à l'expression en pourcentage de poids.

Pour cette raison on peut considérer a priori-que la méthode de détérmination de l'attaque chimique sur semoule ne peut-être considérée juste que si l'on rapporte la perte de poids à la surface spécifique et non au poids initial de l'émail (en %) comme il est d'usage.

Ceci est également valable dans le cas des déterminations éffectuées slr microgranules, dont la surface spécifique des épreuves présente des différences allant jusqu'à 17%, par rapport à l'épreuve à la valeur la plus petite.

b) *La cinétique du processus de corrosion des épreuves d'émail sous forme de semoule et de microgranules.*

On considère généralement que le mecanisme de l'attaque chimique des émaux correspond à un processus de diffusion. C'est pour cela que Keppeler (8) indiquent que la variation de la quantité d'émail dissoute, C, est exponentielle avec le temps t :

$$C = K\sqrt{t} \qquad (1)$$

c'est à dire conformément à la loi générale de la diffusion d'après Fick.

D'après Berger (12) l'équation serait :

$$C = a\ \ln(1 + Kt) \qquad (2)$$

C et K ont les mêmes significations que dans l'équation (1) et a est la perte en mg/cm².

Selon Bergeer (12) et Schmidt (9) l'émail est antiacide quand

$$a < 0{,}3 \text{ mg/cm}^2$$

Pour vérifier les relations qui expriment la cinétique de la corrosion pour ces deux types d'épreuves : semoule et microgranules on a examiné les données obtenues en ce qui concerne l'attaque chimique.

Les résultats de l'attaque chimique sur semoule et granules sous l'aspect du temps sont présentés dans les tableaux, 3, 6 et fig. 6.

Tableau 5

La perte de poids des émaux semoule mg/cm²

Temps d'attaque	Le type de l'émail		
	E_1	E_2	E_3
1 heure	0,022	0,035	0,015
3 heures	0,040	0,063	0,027

Tableau 6

Le perte de poids des émaux en microgranules en mg/cm²

Temps d'attaque	Le type de l'émail		
	E_1	E_2	E_3
10′	0,060	0,090	0,030
30′	0,092	0,105	0,065
1 h	0,148	0,157	0,089
2 h	0,175	0,165	0,130
3 h	0,182	0,188	0,135

L'analyse des courbes a été faite en calculant la valeur $K = \frac{C}{\sqrt{t}}$ à des intervalles de temps différents. Les résultats sont présentés dans le tableau 7.

Tableau 7

Calcul de K

Email	t(h)	$C\left(\frac{mg}{cm^2}\right)$	$K = \frac{C}{\sqrt{t}}\left(\frac{mg}{cm^2 h^{1/2}}\right)$
E_1	0,17	0,06	0,145
	0,50	0,10	0,142
	1,00	0,14	0,140
	2,00	0,172	0,122
	3,00	0,185	0,107
E_2	0,17	0,08	0,194
	0,50	0,12	0,170
	1,00	0,15	0,150
	2,00	0,168	0,119
	3,00	0,171	0,099
E_3	0,17	0,03	0,073
	0,50	0,055	0,092
	1,00	0,95	0,095
	2,00	0,137	0,097
	3,00	0,15	0,087

On constate que la formule n'est valable que pour les 2—3 premieres heures d'attaque. Par exemple pour l'émail E_1 les courbes devient horizontalles après 2,5 heurs et pour E_3 après 2 heures. Ce phénomène est

explicabile par la fait que l'attaque chimique cesse pratiquement après quelques heurs de contact. L'attaque de la solution acide provoque sur la surface de l'émail la formation d'une couche coloidalle, protectrice de SiO_2. L'examen des données des tableaux 5 et 6 montre aussi que l'attaque chimique sur la semoule est plus reduit que sur les microgranules ; la valeur des pertes de poids des microgranules est 4 a 7 fois supérieure

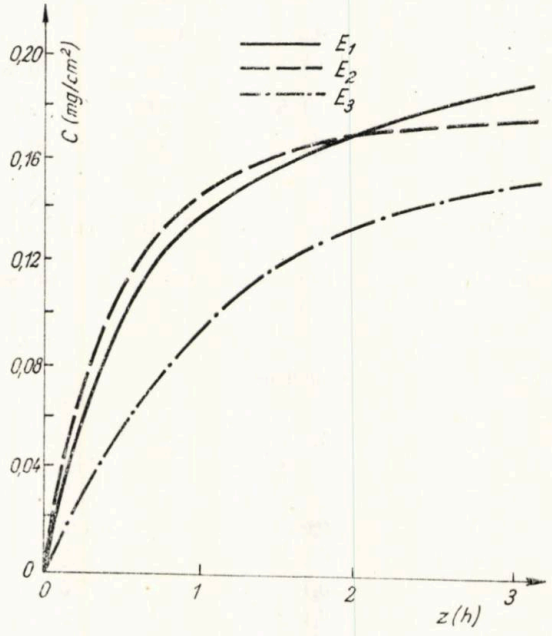


Fig. 6. L'attaque chimique en fonction du temps

pendant la première heure que sur semoule et après 2 heures, 3—5 fois. Il résulte que le mécanisme d'attaque de la surface de la semoule est différent de celui de l'attaque sur microgranules.

On déduit que le traitement thermique subi par les microgranules pendant leur preparation, peut modifier la structure de leur surface et donc le comportament à la corrosion.

c) *La sensibilité de la méthode des microgranules.*

Les différences entre les vitesses de corrosion de la semoule et des microgranules, conduisent à la conclusion que par l'utilisation de la méthode d'essai l'émail sous forme de microgranules on peut réduire la durée de l'ebullition sans diminuer la pertes de poids déterminées au point de vue gravimétrique et donc sans porter préjudice à la sensibilité de la méthode.

d) *L'influence de la composition chimique des émaux.*

Il résulte, du grafique présenté, l'augmentation de l'antiacidité par le remplacement de SiO_2 pas trop résistent aux acides par TiO_2.

L'ordre de l'augmentation de la resistence envers les acides est la suivante :

$$Sb_2O_3 < SiO_2 < TiO_2$$

Une explication de l'augmentation de la resistence à l'attaque des acides des émaux SiO_2 et TiO_2 est celle selon laquelle ces oxides forment avec les élèments basiques, des réseaux vitreux (ou quasicristalins) ayant une résistence chimique superieure

Conclusions

1. On a demontré que la methode classique de la semoule pour la determination de la resistence à la corrosion des émaux ne peut donner der resultats comparables, parce que sa surface specifique varie aux differents echantillons. Pour remédier ces difficultés, on propose la determination de la surface specifique de la semoule par le procedé de l'absorbtion de l'eau.

2. On a proposé une nouvelle methode de determination de la resistance à la corrosion — la methode des microgranules obtenues par la fusion de la poudre d'camil. La nouvelle methode presente l'avantage d'avoir une sensibilité augmentée par rapport à celle de la semoule.

La nouvelle methode par le fait que l'echantillon des microgranules possède la surface obtenue par fusion, presente l'avantage de reproduire de plus près, l'état de la surface des objects émaillés soumis à la corrosion.

La chaire de materiaux de constructions
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *A. Petzold:* Email, VEB Verlag Tech, Berlin, 1955
2. *A. Otremba:* Keram, Rdsch, 33, 1956.
3. *V. Vielhaber:* Emailwaren Ind, 15, 1938
4. *I. Malinovski:* Journ. Amer. Ceram. Soc. 12, 1929
5. *H. Frauendienst:* Glass Email-Keram. Tech. 6, 1961
6. *J. Nagoi et colab.:* J. Ceram. Japan Assoc., 59, 1951
7. *G. Ringquist:* Handlinger, 28 ,1955
8. *G. Keppeler et colab.:* Keram, Rdsch, 42, 1934
9. *F. Schmidt:* Chem. Fabr. 13, 1940
10. STAS 598-53
11. Manualul chimistului Vol. II E. T. Bucureşti
12. *E. Berger:* Glassteeshn. Ber. 14, 1936

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

ORGANE DE MAȘINI

C. Z.: 678.057

CONTRIBUȚII LA TEORIA MAȘINII DE EXTRUDERE CU UN MELC *

M. RENERT, H. IONESCU

1

La studiul curgerii topiturilor de material termoplastic în canalul elicoidal al melcului mașinii de extrudere, trebuie să se țină seama de faptul, că aceste topituri se comportă, în cazul general, nenewtonian.

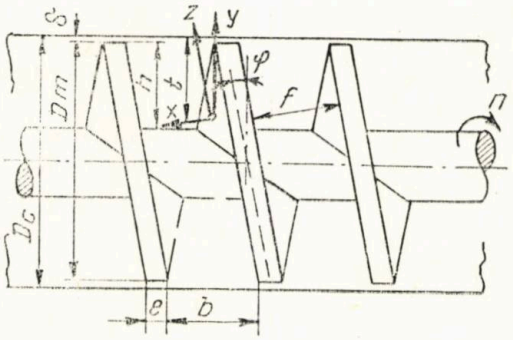


Fig. 1.1. Schema cuplului melc — cilindru. D_c — diametrul cilindrului; D_m — diametrul melcului; δ — joc la vîrful spirei; h — înălțimea flancului spirei; $t = h + \delta$ adîncimea canalului; $e =$ grosimea aparentă a spirei; b — lățimea aparentă a canalului; f — lățimea (normală a) canalului; n — turația melcului; φ — înclinarea filetului.

Pentru canalul elicoidal, de geometrie a secțiunii oarecare, viscozitatea aparentă a topiturii variază cu poziția punctului de coordonate (x, y, z), considerat (fig. 1.1.).

* Manuscris predat la redacție la 20 ianuarie 1965.

Pentru curgerea staționară, *lentă* [1], a unui lichid izotrop, necompresibil, în direcția z, adică după axa canalului elicoidal, se poate utiliza ecuația de mișcare [5, 7, 8].

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta_a \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_a}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y_a}{\partial y}, \tag{1.1}$$

unde p este presiunea în topitură în planul de cotă z, perpendicular pe axa canalului, η_a — viscozitatea aparentă a topiturii, v_z — componenta după axa z a vitezei. Aici, $\eta_a = \eta_a\,(x, y, z)$, depinzînd de temperatura topiturii și de reopanta („gradientul de viteză") în punctul considerat.

Ecuația de mișcare, sub forma (1.1), nu este legată de ipoteze simplificatoare.

Este însă de observat că, în cele ce urmează, canalul elicoidal se consideră desfășurat (plan). Neglijarea efectului curburii canalului — adică a variației unghiului de înclinare a elicei pe adîncimea canalului — duce la erori de mai puțin de 4% în evaluarea debitului, în cazul canalelor *puțin adînci*, caracteristice melcilor pentru materiale termoplastice [3].

Pînă acum, ecuația (1.1) a fost integrată cu aplicarea principiului suprapunerii soluției generale a ecuației omogene ($\partial p/\partial z = 0$, ceea ce corespunde cazului cînd cilindrul descarcă liber) și a unei soluții particulare pentru ecuația neomogenă ($\partial p/\partial z \neq 0$, ceea ce corespunde cazului cînd topitura este descărcată sub presiune, prin capul de extrudere). Așa s-a procedat îndeosebi în primele lucrări fundamentale privind extruderea, admițînd că topiturile se comportă newtonian [2].

De fapt, topiturile se comportă — mai pronunțat sau mai puțin pronunțat — nenewtonian, ceea ce înseamnă că dependența dintre reopantă și viscozitatea aparentă este neliniară. În consecință, principiul suprapunerii nu poate fi aplicat. Aceasta s-a relevat într-un număr de lucrări și în special, pe larg, în lucrarea recentă [4].

2

În cazul canalului puțin adînc ($h \ll D_m$), de lățime mare în raport cu adîncimea ($f \gg h$), se poate admite că viscozitatea aparentă nu variază pe lățimea acestuia ($\partial \eta_a/\partial x = 0$). Admițînd de asemenea că influența pereților canalului poate fi neglijată ($\partial v_z/\partial x = 0$; $\partial^2 v_z/\partial x^2 = 0$), ecuația (1.1) ia forma

$$\eta_a \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta_a}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.1}$$

Aici și în cele ce urmează se tratează cazul funcționării mașinii de extrudere în regim *izoterm*.

[1] Acest tip de curgere a topiturilor de material termoplastic, de viscozitate aparentă ridicată, este caracteristic pentru zona de pompare a mașinilor de extrudere.

Admițînd, în concordanță cu practica, că relația Ostwald — de Waele [1]

$$\tau = m\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^{\nu}, \tag{2.2}$$

unde τ este efortul unitar de forfecare (tangențial) în planul paralel cu axa z, de cotă y și m și ν sînt constante reologice [2] — reflectă comportarea topiturii, viscozitatea aparentă se exprimă, după cum se știe, sub forma

$$\eta_a = m\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^{\nu-1}, \tag{2.3}$$

deci

$$\frac{\partial \eta_a}{\partial y} = m(\nu-1)\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^{\nu-2} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}. \tag{2.4}$$

Ținînd seama de relațiile (2.3) și (2.4), ecuația (2.1) devine

$$m\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

sau

$$m\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^{\nu}\right] = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.5}$$

În condițiile problemei de față, într-un plan normal pe axa z, de cotă, z mărimile $p = p(z)$ și $\partial p/\partial z$ sînt date. La rîndul ei, în planul considerat, mărimea v_z variază cu y. Dacă se notează, pentru ușurarea scrierii, $\partial p/\partial z = \bar{p}$, ecuația (2.5) ia forma

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{dv_z}{dy}\right)^{\nu}\right] = \frac{\bar{p}}{m}, \tag{2.6}$$

unde s-a ținut seama de faptul că v_z variază numai cu y. În lucrarea citată [4], H. Krüger ajunge la o formă asemănătoare a ecuației diferențiale, pornind de la condițiile de echilibru al elementului de volum de lichid.

O primă integrare a ecuației (2.6) dă

$$\left(\frac{dv_z}{dy}\right)^{\nu} = \frac{\bar{p}}{m}(y - y_0) \tag{2,7}$$

unde $\left(-\frac{\bar{p}}{m}y_0\right)$ este constanta de integrare.

[1] Această relație, stabilită empiric, este o formulă aproximativă și nu o ecuație reologică, în sensul strict al noțiunii [6].

[2] Pentru topiturile de materiale termoplastice, de regulă, ν este cuprins între 0,25 și 1. Cînd $\nu = 1$, topitura se comportă newtonian și m devine identic cu viscozitatea dinamică η. Pentru unele materiale, cum sînt poliamidele și anumite tipuri de politenă, valorile ν sînt apropiate de 1.

Se introduce variabila nedimensională [1] $\xi = y/h$, avînd semnificația *înălțimii relative* a punctului considerat, raportată la fundul canalului. Deoarece y variază între 0 și h, ξ variază între 0 și 1. Ecuația (2.7) ia forma

$$\frac{1}{h^{\nu}}\left(\frac{dv_z}{d\xi}\right) = \frac{\bar{p}}{m} h\,(\xi - \xi_0)$$

sau

$$\frac{dv_z}{d\xi} = \left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{1/\nu} h^{\frac{1}{\nu}+1} (\xi - \xi_0)^{1/\nu}, \tag{2.8}$$

unde s-a ținut seama că

$$dy = h\,d\xi\,.$$

Integrarea ecuației (2.8) dă distribuția vitezelor pe adîncimea canalului

$$v_z = \frac{1}{\frac{1}{\nu}+1}\left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{1/\nu} h^{\frac{1}{\nu}+1}\left[(\xi - \xi_0)^{\frac{1}{\nu}+1} + C\right], \tag{2.9}$$

unde C este (a doua) constantă de integrare. Pentru ușurarea scrierii se notează mai departe $1/\nu = \varepsilon$.

În ceea ce privește mărimea ε, care ia locul exponentului reologic ν, este important să se observe următoarele: a) În general, $\varepsilon > 1$; la limită, pentru fluidul newtonian, $\varepsilon = 1$. Pentru topiturile de material termoplastic, $\varepsilon \leqslant 4$.

b) În cazul general, ε este un număr irațional. Deoarece efortul unitar de forfecare τ are întotdeauna semnul reopantei $\mathfrak{R} = dv_z/dy$ relația exponențială (2.2), scrisă sub forma

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{m^{\varepsilon}}\,\tau^{\varepsilon} \tag{2.10}$$

arată că, m fiind întotdeauna pozitiv, ε trebuie considerat *putere impară* [1].

Această asimilare a mărimii ε cu un număr impar, pe bază de considerente fizice, se justifică și matematic, după cum urmează:

Deoarece ε este în general un număr irațional, el poate fi exprimat printr-o fracție continuă. Cu aproximație, fracția continuă poate fi înlocuită printr-o redusă de ordin oarecare. Redusa cu care se aproximează ε este un număr rațional. Dacă acest număr rațional nu este cîtul a două numere impare, el este de forma $\frac{2m}{2p+1}$ sau $\frac{2m+1}{2p}$ el poate fi aproximat

[1] Se consideră $h \approx t$ (fig. 1.1.).

prin alte numere raționale, conform neegalităților

$$\frac{2m-1}{2p+1} < \frac{2m}{2p+1} < \frac{2m+1}{2p+1};$$

$$\frac{2m+1}{2p+1} < \frac{2m+1}{2p} < \frac{2m+1}{2p-1}.$$

Cum șirul reduselor este convergent, șirurile formate cu termenii construiți în neegalitățile de mai sus sînt convergente și ele și au aceeași limită.

Rezultă că ε poate fi asimilat că se comportă față de (-1) ca un număr impar — mai ales că sînt necesare numai valori aritmetice — și că se poate scrie $(-1)^{\varepsilon} = -1$.

Este comod, pentru calcul, să se considere melcul fix, iar cilindrul rotind cu viteza periferică

$$V_z = \pi D_c \bar{n} \cos\varphi, \tag{2.11}$$

unde notațiile sînt cele din figura 1.1. Jocul δ dintre vîrful spirei și suprafața interioară a cilindrului fiind mic, se consideră $D_c \approx D_m$. Se precizează că turația $\bar{n}$ se exprimă în rot/s, adică $\bar{n} = n/60$, unde n este, ca de obicei, turația exprimată în rot/min.

Constantele de integrare din relațiile (2.9) și (2.8) se determină ținînd seama de condițiile la limită

$$\text{pentru } \xi = 0, \quad v_z = 0; \tag{2.12, a}$$

$$\text{pentru } \xi = 1, \quad v_z = V_z \tag{2.12, b}$$

după cum urmează.

Cu condiția (2.12, a) se obține din relația (2.9).

$$C = -\xi_0^{\varepsilon+1},$$

unde s-a ținut seama că, ε fiind putere impară, $(\varepsilon+1)$ este putere pară adică

$$(-\xi_0)^{\varepsilon+1} = +\xi_0^{\varepsilon+1},$$

deci

$$v_z = \frac{1}{\varepsilon+1}\left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} h^{\varepsilon+1}\left[(\xi-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}\right]. \tag{2.13}$$

Condiția (2.12 *b*) se utilizează pentru determinarea constantei de integrare ξ_0. Relația (2.13) dă

$$\frac{1}{\varepsilon+1}\left(\frac{\bar{p}}{m}\right) h^{\varepsilon+1}\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}\right] = V_z. \tag{2.14}$$

În acest mod, la gradient de presiune $\bar{p}$ dat și la V_z de asemenea dat, profilul vitezelor v_z este determinat de relația (2.13) în care, independent de valoarea lui ξ_0, $\xi \in [0,1]$.

Relația (2.8) arată că mărimea ξ_0 definește punctul în care tangenta la profilul vitezelor v_z este paralelă cu axa ξ, respectiv cu axa y. Dacă valoarea ξ_0 este cuprinsă între 0 și 1, acest punct se află în interiorul secțiunii canalului, iar dacă această valoare se află în afara intervalului [0,1], punctul se află în afara secțiunii canalului. Pentru un

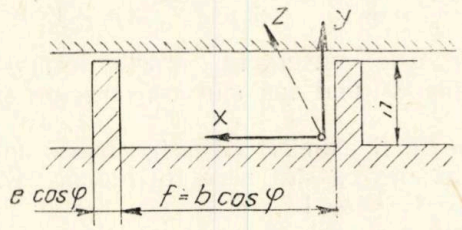


Fig. 3.1. Secțiunea normală prin canalul elicoidal (a se compara cu fig. 1.1).

material dat, la temperatură de lucru dată (m și ε date), parametrii de care depinde ξ_0 sînt viteza periferică V_z, adîncimea h a canalului și gradientul de presiune $\bar{p}$.

3

Debitul melcului cu un singur început, cu canal de secțiune dreptunghiulară, de lățime f (fig. 3.1) este, în exprimare volumică,

$$Q = f \int_{y=0}^{h} v_z \, dy = f h \int_{\xi=0}^{1} v_z \, d\xi .$$

După înlocuirea mărimii v_z conform relației (2.13) și efectuarea integrării, ținînd seama că $(\varepsilon + 2)$ este putere impară, rezultă

$$Q = \frac{f}{(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \cdot \left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} h^{\varepsilon+2} \left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+2} + \xi_0^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,\xi_0^{\varepsilon+1}\right]. \qquad (3.1)$$

Cînd cilindrul este *deschis*, are loc curgerea „de antrenare" :

$$p = 0 \; ; \; \bar{p} = 0 \; ; \; \frac{dv_z}{d\xi} = \text{const.} = V_z$$

și, așa cum rezultă din relația (2.8), $\xi_0 = -\infty$. Relația (3.1), care dă valoarea lui Q, în acest caz devine nedeterminată de forma $0 \cdot \infty$. Însă acum, deoarece $dv_z/d\xi = V_z$,

$$v_z = V_z \xi + C .$$

Condiția (2.12, a) dă $C = 0$. A doua condiție, (2.12, b) este satisfăcută. În consecință,

$$(v_z)_{Q=Q_a} = V_z \xi = \frac{V_z}{h} y ,$$

unde Q_a este debitul curgerii de antrenare, care rezultă la

$$Q_a = f \int_{y=0}^{h} \frac{V_z}{h} y \, dy = \frac{1}{2} f h V_z \tag{3.2}$$

sau, după înlocuirea vitezei V_z conform expresiei (2.14),

$$Q_a = \frac{1}{2(\varepsilon+1)} \cdot \left(\frac{\bar{p}}{m}\right)^{\varepsilon} f h^{\varepsilon+2} [(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}]. \tag{3.3}$$

Debitul relativ, $\bar{Q}$, rezultă astfel la

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_a} = \frac{2}{\varepsilon+2} \cdot \frac{(1-\xi_0)^{\varepsilon+2} + \xi_0^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,\xi_0^{\varepsilon+1}}{(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}}, \tag{3.4}$$

unde s-a utilizat, pentru Q, relația (3.1). Se observă că debitul relativ depinde numai de mărimile ε — constantă de material, la temperatura de lucru — și ξ_0 — parametru de regim, definit prin relația (2.14). În fond, în condiții de lucru date, $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{p})$ adică depinde de presiunea necesară la capătul cilindrului, melcul aflîndu-se în unitate funcțională cu capul de extrudere.

Pentru cazul cilindrului *deschis* la capăt ($\bar{p} = 0$, $\xi_0 = -\infty$), expresia (3.4) pentru debitul relativ devine nedeterminată. După ridicarea nedeterminării se obține [1]

[1] Dacă se scrie expresia lui $\bar{Q}$ fără a impune exponentului ε asimilarea cu un număr impar,

$$(\bar{Q})_{\bar{p}=0} = \lim_{\xi_0 \to -\infty} \left[\frac{2}{\varepsilon+2} \cdot \frac{(1-\xi_0) - (-\xi_0)^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,(-\xi_0)^{\varepsilon+1}}{(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - (-\xi_0)^{\varepsilon+1}}\right]$$

și se notează $u = 1/\xi_0$, unde $u \to 0$ cînd $\xi_0 \to -\infty$, se obține

$$(\bar{Q})_{\bar{p}=0} = \lim_{u \to 0} \left[\frac{2}{\varepsilon+1} \cdot \frac{(u-1)^{\varepsilon+2} - (1)^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,u\,(-1)^{\varepsilon+1}}{<(u-1)^{\varepsilon+1} - (-1)^{\varepsilon+1}>u}\right],$$

deci o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Mai departe

$$(\bar{Q})_{\bar{p}=0} = \frac{2}{\varepsilon+2} \lim_{u \to 0} \frac{(\varepsilon+2)\,(u-1)^{\varepsilon+1} - (\varepsilon+2)\,(-1)^{\varepsilon+1}}{(u-1)^{\varepsilon+1} - (-1)^{\varepsilon+1} + (\varepsilon+1)\,(u-1)^{\varepsilon}\,u} =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon+2} \lim_{u \to 0} \frac{(\varepsilon+2)\,(\varepsilon+1)\,(u-1)^{\varepsilon}}{2(\varepsilon+1)\,(u-1)^{\varepsilon} + \varepsilon(\varepsilon+1)\,(u-1)^{\varepsilon-1}\,u} =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon+2} \cdot \frac{\varepsilon+2}{2} = 1$$

$$(\bar{Q})_{\bar{p}=0} = \lim_{\xi_0 \to -\infty} \left[\frac{2}{\varepsilon+2} \cdot \frac{(1-\xi_0)^{\varepsilon+2} + \xi_0^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,\xi_0^{\varepsilon+1}}{(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}} \right] = 1,$$

adică $Q = Q_a$, așa cum este normal.

În cazul cilindrului *obturat*

$$\bar{Q} = 0 \; ; \quad \bar{p} = \bar{p}_{max} .$$

Relația (3.4) arată că trebuie să avem:

$$(1-\xi_0)^{\varepsilon+2} + \xi_0^{\varepsilon+2} - (\varepsilon+2)\,\xi_0^{\varepsilon+1} = 0 \tag{3.5}$$

cu condiția ca

$$(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1} \neq 0 .$$

Această condiție se mai scrie

$$\left(\frac{1}{\xi_0} - 1 \right)^{\varepsilon+1} \neq 1 .$$

Considerînd ecuația

$$\left(\frac{1}{\xi_0} - 1 \right)^{\varepsilon+1} = 1 = e^{2k\pi i}$$

unde k este un număr întreg, se obține

$$\frac{1}{\xi_0} = 1 + \cos \frac{k\pi}{\varepsilon+1} + i \sin \frac{k\pi}{\varepsilon+1} =$$

$$= 2 \cos \frac{k\pi}{\varepsilon+1} \left(\cos \frac{k\pi}{\varepsilon+1} + i \sin \frac{k\pi}{\varepsilon+1} \right)$$

sau

$$\xi_0 = \frac{\cos \dfrac{k\pi}{\varepsilon+1} - i \sin \dfrac{k\pi}{\varepsilon+1}}{2 \cos \dfrac{k\pi}{\varepsilon+1}} .$$

Cum ξ_0 trebuie să fie real, rezultă

$$\frac{k\pi}{\varepsilon+1} = k'\pi$$

deci $\xi_0 = 1/2$.

Condiția impusă, conduce la concluzia că singura valoare reală pe care *nu* trebuie să o ia ξ_0 este $1/2$, adică $\xi_0 \neq 1/2$. Această concluzie este în concordanță cu practica: examinarea tabelei 3.1 arată că, în domeniul care interesează din punct de vedere practic, această condiție este îndeplinită.

Tabela 3.1

Valori ξ_0 și $\mathfrak{P}$ pentru cilindrul obturat *

ε	1	1,5	2	2,5	3,0	4,0
$(\xi_0)_{obt}$	0,3330	0,3476	0,3590	0,3644	0,3771	0,3304
$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{max}$	3,0	2,38	2,14	2,01	1,975	1,925

* A se vedea și lucrarea [4].

Gradientul de presiune, în expresie nedimensională, $\mathfrak{P}$, se obține din relația (2.14) sub forma

$$\mathfrak{P} = \frac{h^{1+\frac{1}{\varepsilon}}}{m(\varepsilon+1)^{1/\varepsilon} V_z^{1/\varepsilon}} \bar{p} = \frac{1}{[(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}]^{1/\varepsilon}}, \tag{3.6}$$

cu valorile maxime (cilindrul obturat înscris în tabela 3.1. Pentru $\varepsilon = 1$ (topitură cu comportare newtoniană), valorile ξ_0 și $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{max}$ sînt cele care rezultă din teoria simplificată a extruderii [2, 5, 7].

Relațiile teoriei simplificate ale extruderii se obțin, de altfel, din relațiile (3.4) și (3.6), punînd $\varepsilon = 1$, așa cum se poate constata ușor. Pe baza acelorași relații (3.4) și (3.6) se poate construi graficul generalizat al extruderii, $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{p})$, cu ε ca parametru [4]. Acest grafic reprezintă un mijloc de lucru deosebit de util pentru stabilirea, pe bază științifică, a regimului de extrudere în secțiile de fabricație.

După teoria simplificată a extruderii, debitul relativ se exprimă sub forma

$$\bar{Q} = 1 - \frac{1}{6} \frac{\bar{p} h^2}{\eta_a V_z}. \tag{4.1}$$

Dacă se consideră că valoarea *medie* a reopantei, pe adîncimea canalului, este $\mathfrak{R}_m = V_z/h$ se poate scrie [v. relația (2.3)].

$$\eta_a = m \left[\left(\frac{dv_z}{dy} \right)_{med} \right]^{\nu-1} = m \left(\frac{V_z}{h} \right)^{\nu-1}. \tag{4.2}$$

Relațiile dezvoltate în cele ce precedă, permit să se evalueze corecția ce trebuia aplicată viscozității aparente astfel calculate, pentru a se obține valorile $\bar{Q}$ date de relația (3.4) care, evident, reflectă mai bine comportarea topiturii de material termoplastic în timpul extruderii. Notînd cu K factorul de corecție, se obține din relațiile (4.1) și (4.2).

$$\bar{Q} = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\bar{p} h^{1+\nu}}{K m V_z^{\nu}} \tag{4.3}$$

adică

$$K = \frac{1}{6} \cdot \frac{\bar{p}\, h^{1+\nu}}{m V_z} \cdot \frac{1}{1-\bar{Q}}. \tag{4.4}$$

Dacă V_z se înlocuiește în această relație prin valoarea dată de relația (2.14) se obține ($\varepsilon = 1/\nu$)

$$K = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\bar{Q}} \cdot \frac{(\varepsilon+1)^{1/\varepsilon}}{\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}\right]^{1/\varepsilon}}. \tag{4.5}$$

Pentru $\varepsilon = 1$ (lichid newtonian), $K = 1$ cum se poate constata ușor, înlocuind pe $\bar{Q}$ conform relației (3.4) în relația (4.5).

Ecuația (4.3) a debitului, care se mînuiește ușor, poate fi utilizată fie împreună cu relația (4.4), pentru un caz practic, dat, fie împreună cu relația (4.5) care are caracter de generalitate.

Cînd $\bar{Q} \to 1$, $\xi_0 \to -\infty$ (v. partea a 3-a a lucrării) și, la numitorul expresiei (4.5) pentru K, apare o nedeterminare de forma $0.\infty$. Dacă se notează

$$\Pi = (1-\bar{Q})\left[(1-\xi_0)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}\right]^{1/\varepsilon}$$

se poate scrie, ținînd seama de relația (3.4)

$$\lim_{\xi_0 \to -\infty} \Pi = \lim_{\xi_0 \to -\infty} \frac{(\varepsilon+2)\left[(\xi_0-1)^{\varepsilon+1} + \xi_0^{\varepsilon+1}\right] + 2\left[(\xi_0-1)^{\varepsilon+2} - \xi_0^{\varepsilon+2}\right]}{(\varepsilon+2)\left[(\xi_0-1)^{\varepsilon+1} - \xi_0^{\varepsilon+1}\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

unde în scrierea lui $(1-\xi_0)^{\varepsilon}$ și a lui $(\xi_0-1)^{\varepsilon}$ s-a ținut seama de particularitatea numărului ε[1]. Atunci, pentru valori foarte mari ale lui se poate trece la forma

$$\lim \Pi = \lim \left\{ \frac{(\varepsilon+2)\left[2\xi_0^{\varepsilon+1} - (\varepsilon+1)\xi_0^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2!}\xi_0^{\varepsilon-1} - \dots\right]}{(\varepsilon+2)\left[-\frac{(\varepsilon+1)}{1!}\xi_0^{\varepsilon} + \frac{(\varepsilon+1)\varepsilon}{2!}\xi_0^{\varepsilon-1} - \dots\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\left[-\frac{\varepsilon+2}{1}\xi_0^{\varepsilon+1} + \frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)}{2!}\xi_0^{\varepsilon} - \frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)}{3!}\xi_0^{\varepsilon-1} + \dots\right]}{(\varepsilon+2)\left[-\frac{\varepsilon+1}{1!}\xi_0^{\varepsilon} + \frac{(\varepsilon+1)^{\varepsilon}}{2!}\xi_0^{\varepsilon-1} - \dots\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} \right\}$$

[1] Aceasta nu este neapărat necesar, însă simplifică mult calculul.

sau, după reducerea termenilor asemenea,

$$\lim_{\xi_0 \to -\infty} \Pi = \lim_{\xi_0 \to -\infty} \frac{\left[\frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon}{2!} - 2\frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon}{3!}\right]\xi_0^{\varepsilon-1} + \dots}{(\varepsilon+2)\left[-(\varepsilon+1) + \frac{(\varepsilon+1)\varepsilon}{2!}\cdot\frac{1}{\xi_0} - \dots\right]^{1-\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \xi_0^{\varepsilon-1}}$$

deci

$$\lim_{\xi_0 \to -\infty} \Pi = \frac{\frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon}{2!} - 2\frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)\varepsilon}{6}}{(\varepsilon+2)[-(\varepsilon+1)]^{1-\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}}{6}. \tag{4.6}$$

La același rezultat se ajunge și dacă nu se ține seama de ipoteza asimilării lui ε cu un număr impar, analog celor arătate la calculul valorii $(\overline{Q})_{\overline{p}=0}$. Se confirmă astfel justețea acestei ipoteze.

Ținînd seama de relația (4.6), se obține din relația (4.5), pentru $\overline{Q} = 1$,

$$K_{\overline{Q}=1} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Aceste valori, împreună cu valorile $K_{\overline{Q}=0}$ calculate cu relația (4.5), sînt înscrise în tabela 4.1, pentru diferite valori ale mărimii ε.

Tabela 4.1

Valori extreme ale factorului de corecție *

ε	1,5		2		2,5		3		4	
ξ_0	$-\infty$	0,347	$-\infty$	0,359	$-\infty$	0,364	$-\infty$	0,377	$-\infty$	0,390
$\overline{Q}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
K	0,666	0,730	0,500	0,620	0,400	0,550	0,333	0,502	0,250	0,469

* A se vedea și lucrarea [4].

Catedra procedee și aparate *Catedra matematici I*
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *M. N. Balașov și A. N. Levin:* Reșenie nekotorih zadaci, sviazannih s teceniem rasplavlennih polimerov v cerviacinih pressah. In: Him. mașinostroenie, nr. 6, 1961, p. 29—33.
2. *J. F. Carley și colab.:* Symposium on the Teory of Plastic Extrusion. In: Ind. and Engng. Chem., 45, nr. 4, 1953, p. 969 și următ.
3. *J. M. Mc. Kelvey:* Polymer Processing, New-York, Wiley, 1962.
4. *H. Krüger:* Extruder für nicht — newtonsche Schmelzen. In: Kunststoffe, 53, nr. 10, 1963, p. 711—722.
5. *J. B. Paton și colab.:* Extrusion. In: Processing of Thermoplastic Materials. Ed. E. C. Bernhardt, New-York, Reinhold Publishing Corp., 1958.
6. *M. Reiner:* Deformation, Strain and Flow. London, Lewis, 1960.
7. *M. Renert:* Calculul și construcția utilajului chimic, vol. III. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
8. *N. Tipei:* Hidro-aerodinamica lubrificației. București, Editura Academei R.P.R., 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

C. Z.: 515

CU PRVIRE LA ANGRENAJUL MELCAT CILINDRIC *

JOZSEF MAGYAR
Budapesti Muszaki Egyetem, Gépelemek tsz

1. Generarea suprafețelor elicoidale riglate

O dreaptă care execută o mișcare elicoidală de-a lungul unei elice generează o suprafață elicoidală riglată (cu generatoare rectilinie). Acest elicoid este determinat prin: distanța dreptei generatoare la axa de rotație (adică raza cilindrului director k), unghiul dintre dreapta generatoare și planul frontal (adică unghiul generatoarei ψ) [1] și pasul h al elicei. În secțiunea frontală profilele suprafețelor elicoidale riglate sînt: evolvente normale, evolvente scurtate sau evolvente alungite; în caz particular profilul frontal poate fi linie dreaptă. Unghiul elicei de pe cilindrul director (elicea directoare) se va nota cu φ.

În fig. 1 se arată condițiile geometrice în care sînt generați elicoizii riglați cu profilul frontal în formă de evolventă scurtată. Dreapta tt' este tangentă în punctul I la cilindrul de bază avînd rază r_a, iar tangenta în acest punct la elicea cilindrului de bază coincide cu dreapta tt'. Suprafața elicoidală este generată de o dreaptă e paralelă cu t [2].

În fig. 2 se indică elementele similare pentru generarea elicoizilor riglați cu profilul frontal în forma de evolvetă alungită (buclată) [3]. În acest caz dreapta generatoare este tangentă în punctul E la un cilindru director cu raza mai mică decît raza cilindrului de bază, pe a cărei elice tangenta din punctul T este de asemenea paralelă cu dreapta generatoare.

În fig. 3 sînt reprezentate pozițiile caracteristice generale și particulare ale dreptei generatoare (în raport cu cilindrul director) [4], fiind indicată în dreptul fiecărei poziții natura profilului frontal al suprafeței elicoidale descrisă de dreapta generatoare, în ipoteza că se menține cons-

---

* Manuscris predat la redacție la 14 ian. 1965.

1 Unghiul generatoarei ψ este totodată și unghiul elicei de bază (Nota trad. R.F.).

2 ...și tangentă în E la cilindrul director de rază k (Nota trad. R.F.).

3 Frază adăugată de trad. R.F.

4 Obs. trad. R.F.

tantă raza cilindrului director ($k = \text{const}$) și pasul elicei directoare ($h = \text{const}$, deci și $\varphi = \text{const}$). În această figură desigur nu pot fi cuprinse toate suprafețele elicoidale riglate.

În fig. 4 au fost păstrate constante raza cilindrului de bază ($r_a = \text{const}$) și unghiul generatoarei ($\psi = \text{const}$). O serie de drepte,

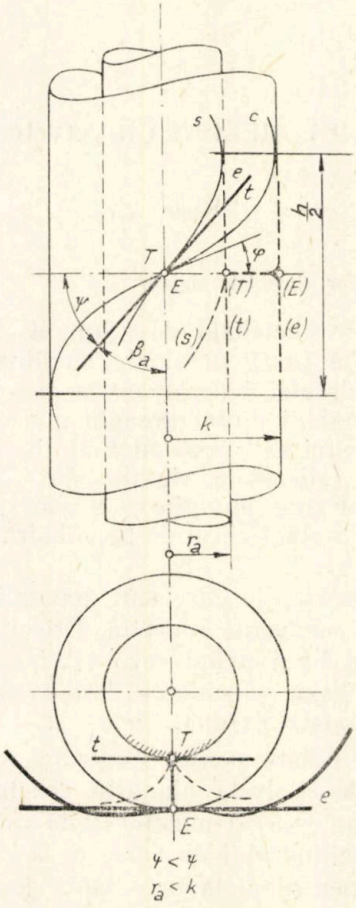


Fig. 1

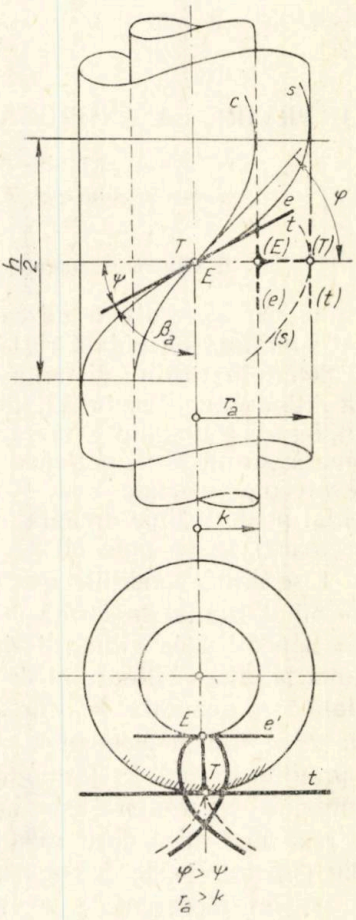


Fig. 2

paralele cu tangenta c' la elicea de pe cilindrul de bază, intersectează în punctele c, d, k, f, g, h dreapta radială perpendiculară pe c' și care execută aceeași mișcare elicoidală ca și tangenta elicei de bază. Dacă dreapta c' se rostogolește pe elicea cilindrului de bază, dreptele paralele cu tangenta elicei de bază generează o serie de suprafețe elicoidale ale căror profile frontale pot fi numai evolvente ale căror forme sînt arătate în fig. 4. Astfel pentru orice suprafață elicoidală riglată posibilă,

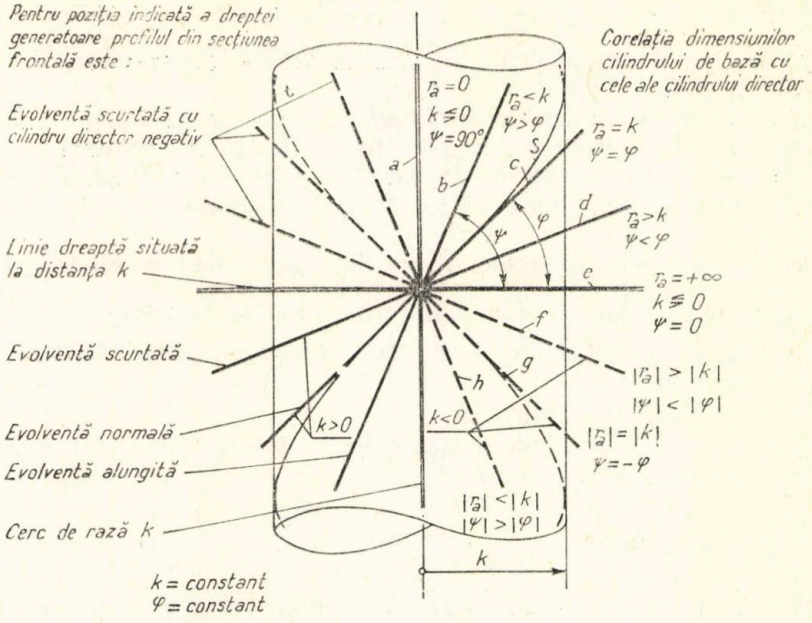

Pentru poziția indicată a dreptei generatoare profilul din secțiunea frontală este :
Corelația dimensiunilor cilindrului de bază cu cele ale cilindrului director
Evolventă scurtată cu cilindru director negativ
Linie dreaptă situată la distanța k
Evolventă scurtată
Evolventă normală
Evolventă alungită
Cerc de rază k
k = constant
φ = constant
r_a = 0
k ≶ 0
ψ = 90°
r_a < k
ψ > φ
r_a = k
ψ = φ
r_a > k
ψ < φ
r_a = +∞
k ≶ 0
ψ = 0
|r_a| > |k|
|ψ| < |φ|
|r_a| = |k|
ψ = −φ
|r_a| < |k|
|ψ| > |φ|
k > 0
k < 0
k
a
b
c
d
e
f
g
h
i
ψ
φ
S

Fig. 3

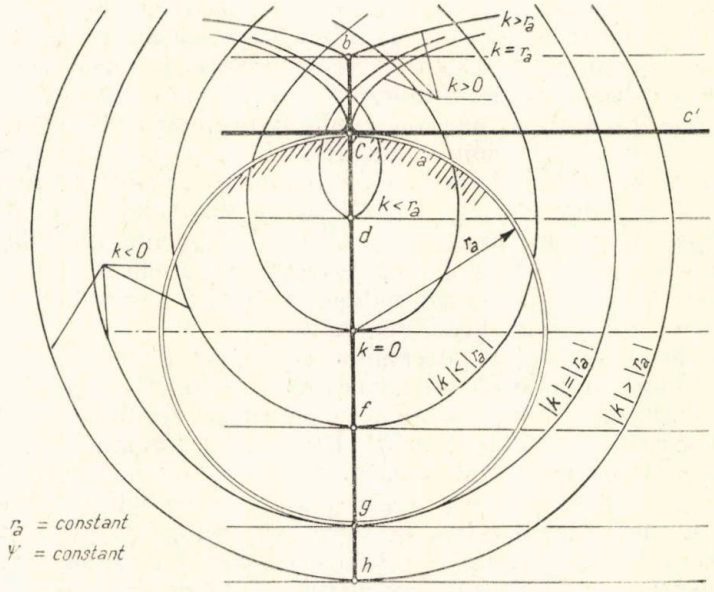

k > r_a
k = r_a
k > 0
k < r_a
k < 0
k = 0
|k| < |r_a|
|k| = |r_a|
|k| > |r_a|
r_a
a
b
c
c'
d
f
g
h
r_a = constant
ψ = constant

Fig. 4

în figurile 3 și 4 este indicată fie poziția dreptei generatoare, fie natura profilului frontal.

In legătură cu generarea elicoizilor riglați, pe baza fig. 1—4 se poate constata că raza cilindrului director poate fi valoare pozitivă, zero sau negativă, iar elicea cilindrului de bază se definește din condiția că tangenta ei este totdeauna paralelă cu dreapta generatoare.

2 Stabilirea elementelor geometrice caracteristice ale suprafețelor elicoidale rîglate

Suprafețele riglate se pot defini cu următoarele date:

ψ — unghiul generatoarei (măsurat față de un plan frontal),

h — pasul elicei,

k — raza cilindrului director,

r_a — raza cilindrului de bază, care se poate calcula în funcție de unghiul ψ și pasul h:

$$r_a = \frac{h}{2\pi \operatorname{tg} \varphi}, \text{ deoarece } \operatorname{tg} \psi = \frac{h}{2r_a \pi}.$$

In locul pasului se poate folosi și unghiul elicei γ de pe un cilindru cu raza r. In afară de acestea:

γ_t = unghiul elicei cilindrului director și

γ_a = unghiul elicei cilindrului de bază.

La o suprafață elicoidală pasul elicei este totdeauna un element dat, care nu necesită a fi calculat niciodată în funcție de restul elementelor. Raza cercului de bază se poate determina în funcție de pasul elicei și unghiul generatoarei cu formula dată mai sus. Aceeași relație poate servi pentru a calcula unghiul generatoarei în funcție de pasul elicei și raza cilindrului de bază. Raza cilindrului director nu figurează în relația unghiului generatoarei și nici nu poate figura, deoarece chiar în cazul acelorași valori ale unghiului generatoarei se pot creia cu cilindri de bază de raze identice o infinitate de suprafețe elicoidale afînd cilindrii directori cu raze diferite (fig. 3). De aceea raza cilindrului director nu poate fi exprimată în funcție de elementele menționate mai sus, ci numai în funcție de poziția dreptei generatoare a elicoidului.

In cele ce urmează să determinăm mărimea cilindrului director în funcție de poziția dreptei generatoare.

In lucrarea „Analytical Mechanics of Gears" (1949) E. Buckingham s-a ocupat deja cu această problemă. In fig. 10.18 de pe pag. 206 se arată un cuțit de strung înclinat, cu tăișurile rectilinii așezate într-o secțiune normală a golului dintelui, indicînd în formula 10.26 mărimea razei cilindrului de bază. Sub această formă relația nu poate fi utilizată în practică, deoarece nu precizează poziția punctului de intersecție al tăișurilor, a cărui distanță față de elice este notată cu litera *A*. *In realitate această literă ascunde o relație, în care trebuie să figureze una dintre dimensiunile de lărgime ale golului dintelui.* In cele ce urmează, luînd ca bază elementele geometrice ale melcilor standardizați, se va

demonstra o relație explicită, folosibilă pentru calcule. Relațiile găsite pot fi transformate desigur și pentru melci nestandardizați (sau filete nestandardizate) cu lărgimea oarecare a golurilor.

În fig. 5 este reprezentată în 3 vederi poziția tăișurilor rectilinii ale unui cuțit de strung înclinat, cu tăișurile așezate într-o secțiune

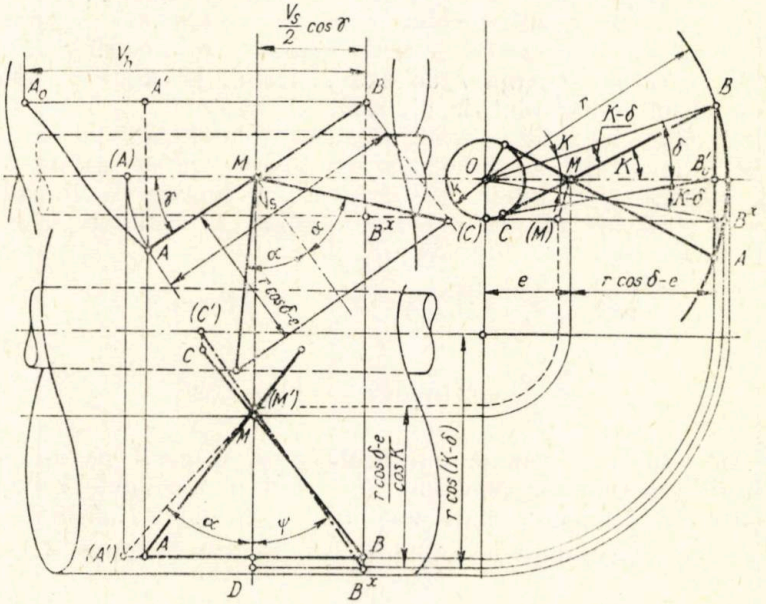


Fig. 5

normală a golului. În vederea laterală cercul de rază k reprezintă proiecția cilindrului director pe planul vederii. Să determinăm mărimea exactă a acestei raze, știind că:

— unghiul format de cele două tăișuri ale sculei este 2α,
— unghiul de înclinare al elicei pe un cilindru de rază r este γ,
— față de axă, unghiul înclinării planului determinat de tăișuri este tot γ,
— lățimea golului pe un cilindru de rază r, pe care unghiul de înclinare este tocmai γ, se poate determina în funcție de pasul elicei și numărul de dinți (începuturi) cu formula

$$v_h = \frac{m\pi}{2} = \frac{h}{2z}, \qquad (1)$$

unde z este numărul de dinți ai melcului, respectiv numărul de începuturi al filetului.

În formula de mai sus, lățimea golului dintelui respectiv filetului, s-a luat egală cu jumătatea pasului axial, conform prescripțiilor pentru melci standardizați, filete trapezoidale standardizate etc. Cu alte cuvinte

la melcul adoptat, grosimea dintelui este egală cu lățimea golului pe cilindrul de divizare. Folosind lățimea axială a golului pe cilindrul de divizare, deja se poate determina distanța dintre punctele A și B ale tăișurilor, precum și distanța dreptei AB de la axa melcului. Aceasta din urmă permite calcularea distanței e dintre punctele de intersecție M ale dreptelor generatoare și axa melcului, iar în funcție de e se poate determina raza cilindrului director k, dacă se cunoaște unghiul δ.

S-a notat cu A respectiv B acele puncte ale tăișurilor cuțitului de strung care sînt la distanța r de axa melcului. Deci, aceste puncte sînt situate pe elicele cilindrului de divizare.

Să stabilim legătura dintre lățimea golului dintelui în secțiune axială și lățimea AB a sculei. Să exprimăm lățimea axială a golului dintelui, măsurată pe cilindrul de divizare, în funcție de distanța dintre punctele A și B ale tăișurilor sculei, unghiul de înclinare γ și unghiul profilului α. Pe baza relațiilor din fig. 5.

$$v_h = \overline{A_0 A'} + \overline{A'B} = 2\delta \frac{h}{2\pi} + \overline{AB} \cos\gamma = \tag{2}$$

$$= \frac{h\delta}{\pi} + 2(r\cos\delta - e)\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma,$$

Primul termen se obține din deplasamentul axial pe elicea punctului A, între generatoarea punctului B și cea a punctului A (cota parte din pasul elicei corespunzătoare unghiului 2δ), iar cel al doilea termen este proiecția segmentului de dreaptă $\overline{AB}$. Pentru distanța $\overline{AB}$ se poate scrie

$$AB = (r\cos\delta - e)\operatorname{tg}\alpha.$$

Înlocuind în ecuația (2) relația $h = 2r\pi\operatorname{tg}\gamma$, ordonînd și simplificînd se obține

$$v_h = 2r\left[\left(\cos\delta - \frac{e}{r}\right)\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma + \delta\operatorname{tg}\gamma\right]. \tag{3}$$

În această expresie mărimea unghiului δ este încă necunoscută și trebuie determinată separat.

Pe baza vederii laterale din fig. 5 se poate exprima raza cilindrului director astfel:

$$k = e\sin x. \tag{4}$$

Unghiul x se poate determina din triunghiurile dreptunghice formate din tăișurile sculei, axa de simetrie a sculei, respectiv dreapta AB și din triunghiul OBB_0':

$$\operatorname{tg} x = \sin\gamma\operatorname{tg}\alpha. \tag{5}$$

Din aceasta, pe baza relațiilor trigonometrice, se poate scrie relația care definește cel de al doilea factor al produsului din expresia (4):

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sin\gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\gamma}}. \tag{6}$$

Rămine de a fi exprimată doar mărimea lui e. Aceasta se poate calcula din relația (2) în care însă nu se cunoaște încă mărimea unghiului δ. Să determinăm pe δ din condiția ca lățimea axială a golului dintelui să fie egală tocmai cu jumătatea pasului axial, deci

$$v_h = \frac{t_{ax}}{2} = \frac{m\pi}{2}. \tag{7}$$

In fig. 6 este reprezentată poziția dreptei AB și cîte o porțiune din elicele care trec prin punctele A și B. Distanța axială dintre aceste elice

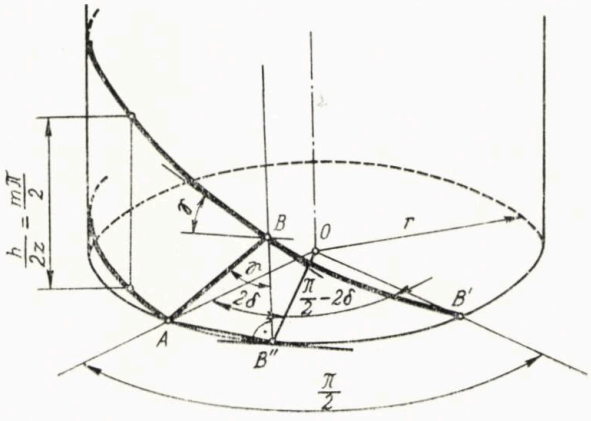


Fig. 6

este tocmai mărimea determinată de formula (7). In planul frontal elicele trec prin punctele A și B'. Unghiul la centru determinat de aceste puncte se poate exprima ușor prin folosirea ecuației (7), deoarece pe cercul de divizare arcul dintelui fiind egal cu arcul golului dintelui rezultă că unghiul la centru corespunzător arcului AB' este tocmai jumătatea pasului unghiular (adică jumătatea unghiului corespunzător pasului circular frontal). Din triunghiul dreptunghic ABB'' se poate scrie că

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\overline{AB''}}{\overline{BB''}} = \frac{2r\sin\delta}{\frac{h}{2\pi}\left(\frac{\pi}{z} - 2\delta\right)}. \tag{8}$$

Numitorul relației (7) este deplasamentul axial de pe elicea punctului B între B' și B, fiind calculat din unghiul $B'OB''$ și deplasamentul axial pe unitatea de unghi.

Să înlocuim în relația (8) expresiile

$$2r = qm \text{ și } h = z\,m\,\pi,$$

în care raza s-a exprimat folosind coeficientul diametral q, iar pasul

elicei în funcție de numărul de dinți (începuturi) ; cu aceasta, relația (8) capătă forma

$$\frac{z}{q} = \frac{q \sin \delta}{2\left(\frac{\pi}{2z} \quad \delta\right)},$$

din care — ordonînd termenii — rezultă expresia

$$\boxed{\left(\frac{q}{z}\right)^2 \sin \delta + \delta = \frac{\pi}{2z}.} \tag{9}$$

Mărimea $\frac{\pi}{2z}$ din partea dreaptă a ecuației este unghiul la centru corespunzător jumătății arcului golului dintelui în planul frontal. Sub această formă expresia (9) este valabilă numai pentru melci standardizați. Dacă lățimea golului dintelui nu este egală cu jumătatea pasului, în partea dreaptă a ecuației (9) trebuie trecută mărimea unghiulară corespunzătoare. Transformată astfel ca să permită determinarea unghiului δ, pornind de la lățimea axială reală a golului dintelui, ecuația (9) se scrie astfel :

$$\boxed{v_h = d \operatorname{tg} \gamma \left[\left(\frac{q}{z}\right)^2 \sin \delta + \delta\right].} \tag{10}$$

Una dintre aceste ecuații ori cum trebuie rezolvată în raport cu δ. Dar în ambele figurează concomitent δ și sin δ. Cu ajutorul tabelelor cu valorile funcțiilor trigonometrice, ecuația (9) se poate rezolva de exemplu în modul următor. Într-o primă aproximație se consideră că sin δ și δ sînt egale, și se rezolvă ecuația dată în raport cu δ sau sin δ. După aceasta, din tabelele funcțiilor trigonometrice, se extrag în coloane alăturate cîteva rînduri cu valori ale lui δ și sin δ în jurul valorii aproximative obținute la rezolvarea ecuației. Într-o a treia coloană se înscriu valorile produsului $\left(\frac{q}{z}\right)^2$ sin δ, care adunate cu valorile din coloana lui δ vor constitui cea de a patra coloană. Astfel prin interpolare se poate determina acea valoare a lui δ pentru care — conform ecuației (9) — suma $\left(\frac{q}{z}\right)^2 \sin \delta + \delta$ din coloana a patra corespunde mărimii $\frac{\pi}{2z}$ din partea dreaptă a ecuației [1]).

[1]) In cazul ecuației (10) suma respectivă trebuie să corespundă mărimii $\frac{v_h}{d \operatorname{tg} \gamma}$. (Nota trad. R.F.).

Unghiul δ fiind stabilit, *sin* δ și *cos* δ sînt de asemenea determinate, și deci poate fi calculată și mărimea lui e.

$$e = \overline{OM} = \overline{OB_0'} - \overline{MB_0'} = r\cos\delta - \frac{v_s}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha};$$

$$e = r\cos\delta - \frac{r\sin\delta}{\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{11}$$

Din relația (4), prin înlocuirea ecuațiilor (6) și (11), rezultă formula razei cilindrului director:

$$k = \left(r\cos\delta - \frac{r\sin\delta}{\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)\frac{\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\gamma\,\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

respectiv

$$\boxed{k = r\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\sin\gamma\cos\delta - \sin\delta}{\sqrt{1+\sin^2\gamma\,\mathrm{tg}^2\alpha}},} \tag{12}$$

Astfel, în cazul unui melc prelucrat cu cuțit de strung cu tăișurile rectilinii așezate într-o secțiune normală a golului dintelui, cilindrul director poate fi determinat în felul următor: cu formula (9) se calculează valoarea unghiului δ, după care *cos* δ și *sin* δ, respectiv unghiul profilului α al cuțitului, unghiului de înclinare γ și raza de divizare r fiind cunoscute se înlocuiesc în expresia (2). În acest fel, raza cilindrului director se determină de fapt în două etape.

În legătură cu aplicarea formulei (12) trebuie să se aibe neapărat în vedere și acele procedee de prelucrare uzuale la care geometria melcului se realizează altfel decît în modul conceput în cele de mai sus. În această privință este de menționat că în practică se evită folosirea simultană a ambelor tăișuri ale cuțitului înclinat. Flancurile filetelor rezultă mai frumoase dacă într-o primă etapă se prelucrează mai întîi de exemplu flancul stîng al filetului, folosind tăișul stîng al cuțitului, iar apoi, după o deplasare axială corespunzătoare a cuțitului, se prelucrează într-o nouă trecere flancul drept al filetului, folosind tăișul din dreapta al sculei.

În tot cursul demonstrațiilor de mai sus s-a presupus că cele două tăișuri ale cuțitului realizează simultan cele două flancuri. Dacă în timpul danturării melcului cuțitul de strung este supus unei deplasări axiale de reglare, atunci, — în cazul unor melci standardizați —, suprafețele elicoidale prelucrate vor avea un cilindru director în general mai mare decît cel al melcului strunjit simultan pe ambele flancuri, dacă desigur și grosimile dinților sînt egale. Deoarece mărimea cilindrului director depinde de poziția radială a sculei, la prelucrarea melcului, în principiu, ar trebui

procedat în felul următor : să se introducă treptat cuțitul de strung pînă la atingerea poziției corespunzătoarea dimensiunii cilindrului director și grosimii teoretice a dintelui, după care, în aceeași poziție radială, și deci menținînd aceeași mărime a cilindrului director, prin deplasări axiale ale cuțitului, la stînga respectiv la dreapta, să se subțieze dinții pînă la realizarea subțierii dintelui determinată de jocul dintre flancuri prescris.

Aceste considerațiuni ne conduc și la o altă concluzie. Dacă prescripțiunile de fidelitate a formei sînt severe, devine greoaie prelucrarea de finisare a melcilor cu cuțite de strung cu tăișuri rectilinii așezate înclinat. De aceea cea mai rațională metodă pare a fi strunjirea melcului cu un cuțit de strung săltat, avînd, un singur tăiș rectiliniu cu care se prelucrează ambele flancuri [1]). (V. Szeniczei Lajos : „Csigahajtóművek" (Angrenaje melcate) pag. 234).

Cele două elemente ale unui angrenaj melcat realizează o pată de contact perfectă numai dacă geometria frezei-melc cu care se danturează roata este identică cu geometria melcului, decît numai dacă sînt identici și cilindrii directori respectivi. De aceea se pune problema stabilirii dimensiunilor caracteristice ale cuțitului de strung folosit pentru prelucrarea melcului în cazul cînd este dată freza-melc, cu care se va dantura roata melcată conjugată melcului. În acest caz și cilindrul director este determinat. Să calculăm deci unghiul generatoarei și raza cilindrului de bază al melcului corespunzător frezei-melc, cunoscînd grosimea dintelui frezei melc și faptul că freza melc a fost strunjită cu un cuțit înclinat cu unghiul γ, avînd unghiul profilului α.

În vederea de sus din fig. 5 este reprezentat (rotit în planul figurii), cu linie groasă unul dintre tăișurile sculei. Punctele extreme ale segmentului de dreapta B^x $(C)'$ care reprezintă acest tăiș, sînt determinate cu ajutorul punctelor (C) și B^x rezultînd din rotirea spre dreapta cu unghiul x a triunghiului OCB din vederea laterală. După rotirea triunghiului punctul M ajunge în (M). Distanța $\overline{(M)\,B^x}$ este lungimea catetei de lîngă unghiul ψ al triunghiului dreptunghic $(M)'\,D\,B^x$, și corespunde distanței $\overline{MB}$ care se poate calcula din distanța $\overline{MB_0}$. Astfel pe baza fig. 5 se poate exprima unghiul ψ prin

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{v_h}{2}\cos\gamma}{\frac{r\cos\delta - e}{\cos x}} = \operatorname{tg}\alpha\cos\gamma\cos x\,; \qquad (13)$$

iar unghiul x și mărimea lui e pot fi înlocuite cu expresiile echivalente date de (5) și (11). Pe baza relațiilor de mai sus, precum și pe baza

[1]) În prealabil se prelucrează unul din flancuri, după care melcul se întoarce cu 180° și cu același cuțit se prelucrează și celălalt flanc. (Nota trad. R.F.).

relațiilor dintre funcțiile trigonometrice se poate exprima ψ printr-o funcție trigonometrică în funcție de ori care două variabile dintre α, x și γ. Astfel

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin x}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{14}$$

$$\cos\psi = \frac{\cos a}{\cos x}, \tag{15}$$

$$\sin\psi = \sin\alpha\cos\gamma. \tag{16}$$

Din relațiile (5), (14), (15), și (16) se pot calcula direct sinusul, consinusul sau tangenta unghiurilor α, γ, x sau ψ.

Cunoscînd valoarea $tg\ \psi$ se poate calcula și raza cilindrului de bază

$$r_a = r\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\psi} = r\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma\cos x} = r\frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\sin x}. \tag{17}$$

Unghiul de înclinare poate fi exprimat cu ajutorul pasului h sau a modulului axial și a numărului de începuturi, și deci

$$r_a = \frac{h}{2\pi\operatorname{tg}\psi} = \frac{z\,m}{2\operatorname{tg}\alpha\cos\gamma\cos x} = \frac{z\,m}{2}\frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\sin x}. \tag{18}$$

Cu ajutorul relațiilor deduse se pot rezolva direct problemele geometriei melcului în orice formă s-ar prezenta ele.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

TERMOTEHNICĂ

C. Z.: 536.7

ANALIZA TERMODINAMICĂ A DIAGRAMEI TEORETICE DE FUNCTIONARE A DETENTORULUI CU PISTON *

VSEVOLOD RADCENCO

Diagrama teoretică de funcționare a detentorului cu piston prevăzut cu supape de admisie și evacuare este arătată în figura 1, ipotezele care definesc această diagramă fiind următoarele:

1. agentul termic care evoluează în cilindru se comportă ca un gaz ideal;

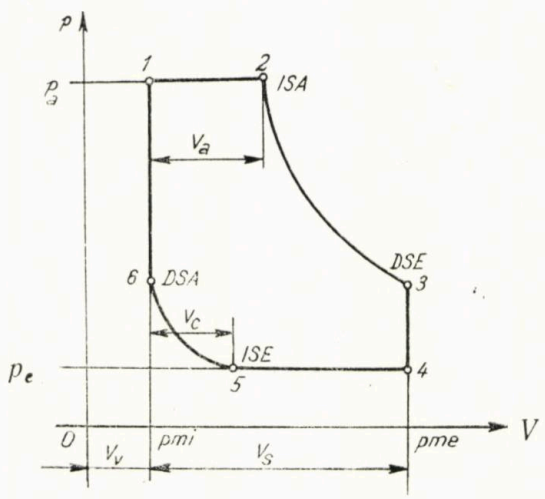


Fig. 1

2. pierderile de presiune datorită laminării gazului în procesele de admisie și evacuare sînt nule;

3. între capacul cilindrului și pistonul aflat la punctul mort interior rămîne un spațiu denumit volum vătămător (V_v);

4. deschiderea supapelor de admisie (DSA) și evacuare (DSE) are loc în punctul mort interior (*p.m.i.*) și respectiv exterior (*p.m.e.*);

* Manuscris predat la redacție la 2 martie 1965.

5. procesele de destindere 2—3 și precomprimare 5—6 sînt transformări adiabatice reversibile (izentropice) ;

6. procesele de umplere 6—1—2 și de evacuare 3—4—5 sînt procese adiabatice ireversibile compuse din faze care au loc atît la volum constant (6—1 și 3—4) cît și la presiune constantă (1—2 și 4—5).

Factorii funcționali și constructivi care pot caracteriza un detentor cu piston sînt :

— gradul de destindere : $\pi = \frac{p_a}{p_e}$ (1)

— coeficientul spațiului vătămător : $a_v = \frac{V_v}{V_s}$ (2)

— gradul de umplere : $\delta_a = \frac{V_2}{V_s}$ (3)

— gradul de precomprimare : $\delta_c = \frac{V_5}{V_s}$ (4)

în care p_a și p_e reprezintă presiunile în conducta de admisie și evacuare iar V_s volumul cursei pistonului.

În analiza termodinamică a diagramelor teoretice de funcționare ale detentoarelor experimentale cu piston prevăzute cu supapă de admisie și ferestre de evacuare [1] și respectiv cu ferestre de admisie și evacuare [2] este comod să se lucreze și cu următorii factori constructivi și funcționali :

$$\varepsilon = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_v + V_s}{V_v} = \frac{1 + a_v}{a_v} \tag{5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2/V_s}{V_v/V_s} = \frac{\delta_a}{a_v} \tag{6}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{V_5}{V_1} = \frac{V_5/V_s}{V_v/V_s} = \frac{\delta_c}{a_v} \tag{7}$$

Pe baza ipotezelor care definesc diagrama de funcționare a detentorului cu supape de admisie și evacuare au fost stabilite [3] expresiile generale ale temperaturii gazului la finele procesului de umplere și în conducta de evacuare :

$$T_2 = T_a \frac{k}{k - (k-1)\frac{a_v}{\delta_a} + \left(k\,\frac{T_a}{T_6} - 1\right)\frac{p_6}{p_a}\cdot\frac{a_v}{\delta_a}} \tag{8}$$

$$T_e = T_3 \frac{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p_e}{p_3}\right) + \frac{p_e}{p_3}\left(1 - \frac{\delta_c}{1 + a_v}\right)}{1 - \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{\delta_c}{1 + a_v}}. \tag{9}$$

Pentru a exprima temperaturile T_2 și T_e în funcție numai de factorii constructivi și funcționali se ține seama de existența următoarelor relații de legătură între mărimile de stare ale punctelor caracteristice ale diagramei teoretice (fig. 1) :

$$p_6 = p_e \left(\frac{V_5}{V_6}\right)^k = p_e \left(\frac{V_5/V_s}{V_v/V_s}\right)^k = p_e \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k \tag{10}$$

$$T_6 = T_5 \left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{k-1} = T_4 \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^{k-1} \tag{11}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} = T_3 \left(\frac{p_e}{p_3}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{12}$$

$$T_3 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{k-1} = T_2 \left(\frac{V_2}{V_s + V_v}\right)^{k-1} = T_2 \left(\frac{\delta_a}{1 + a_v}\right)^{k-1} \tag{13}$$

$$p_3 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^k = p_a \left(\frac{\delta_a}{1 + a_v}\right)^k \tag{14}$$

Ținînd seama de relațiile (12) ... (14) temperatura T_6 dată de expresia (8) se poate pune sub forma :

$$T_6 = T_2 \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^{k-1} \pi^{\frac{1-k}{k}} . \tag{15}$$

Relațiile stabilite permit exprimarea în funcție de factorii constructivi și funcționali a temperaturilor T_2 și T_e:

$$\frac{T_2}{T_a} = k \pi^{\frac{k-1}{k}} \frac{\pi^{\frac{1}{k}} - \frac{\delta_c}{\delta_a}}{k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi} \cdot \frac{\delta_a}{a_v} \tag{16}$$

$$\frac{T_e}{T_2} = \frac{1}{k \pi^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \frac{\pi \left(\frac{\delta_a}{1 + a_v}\right)^k - k \frac{\delta_c}{1 + a_v} + (k-1)}{\pi^{\frac{1}{k}} - \frac{\delta_c}{\delta_a}} \cdot \frac{1 + a_v}{\delta_a} . \tag{17}$$

Relația de legătură între temperatura gazului evacuat T_e și cea a gazului admis T_a se obține prin efectuarea produsului expresiilor (16) și (17) :

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{1 + a_v}{a_v} \cdot \frac{\pi \left(\frac{\delta_a}{1 + a_v}\right)^k - k \frac{\delta_c}{1 + a_v} + (k-1)}{k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi} . \tag{18}$$

Se observă că, pentru un gaz dat, raportul de temperatură T_e/T_a depinde de cei patru factori constructivi și funcționali ai detentorului cu piston:

$$\frac{T_e}{T_a} = f(\pi, a_v, \delta_a, \delta_c).$$

Expresia (18) se poate scrie sub o altă formă dacă se ține seama că (fig. 1):

$$\delta_a = \frac{V_2}{V_s} = \frac{V_a + V_v}{V_s} = \varepsilon_a + a_v \tag{19}$$

$$\delta_c = \frac{V_5}{V_s} = \frac{V_c + V_v}{V_s} = \varepsilon_c + a_v \tag{20}$$

unde $\varepsilon_a = \frac{V_a}{V_s}$ și $\varepsilon_c = \frac{V_c}{V_s}$ reprezintă gradul de admisie și respectiv de recompresie [4], [5], [6]. Rezultă:

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{1 + a_v}{a_v} \cdot \frac{\pi \left(\frac{\varepsilon_a + a_v}{1 + a_v} \right)^k - k \frac{\varepsilon_c + a_v}{1 + a_v} + (k - 1)}{k \pi \frac{\varepsilon_a + a_v}{a_v} - \left(\frac{\varepsilon_c + a_v}{a_v} \right)^k - (k-1)\pi}. \tag{21}$$

Expresia (21) arată că:

$$\frac{T_e}{T_a} = f(\pi, a_v, \varepsilon_a, \varepsilon_c).$$

Pentru a exprima raportul de temperaturi T_e/T_a dat de relația (18), în funcție de factorii ε, ε_2 și ε_5 definiți de relațiile (5) ... (7), se observă că:

$$\frac{\delta_a}{1 + a_v} = \frac{\frac{\delta_a}{a_v}}{\frac{1 + a_v}{a_v}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \tag{22}$$

$$\frac{\delta_c}{1 + c_v} = \frac{\frac{\delta_c}{a_v}}{\frac{1 + a_v}{a_v}} = \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon}. \tag{23}$$

Ținînd seama de relațiile (22) și (23), raportul de temperaturi T_e/T_a dat de expresia (18) devine:

$$\frac{T_e}{T_a} = \varepsilon \frac{\pi \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \right)^k - k \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k - 1)}{k \pi \varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k - 1)\pi} \tag{24}$$

adică,

$$\frac{T_e}{T_a} = f(\pi, \varepsilon, \varepsilon_2, \varepsilon_5).$$

In cazul detentorului cu piston experimental cu supapă de admisie și ferestre de evacuare care funcționează pe baza diagramei teoretice arătate în figura 2, se impun următoarele condiții:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \pi^{\frac{1}{k}} \tag{25}$$

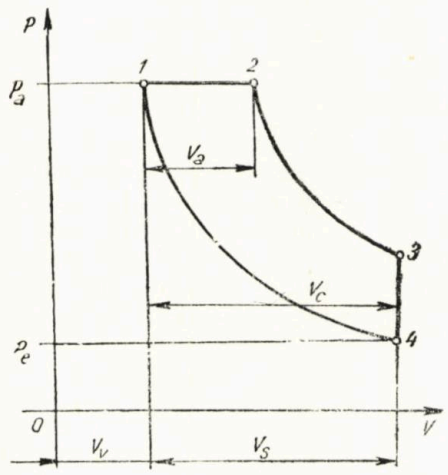


Fig. 2

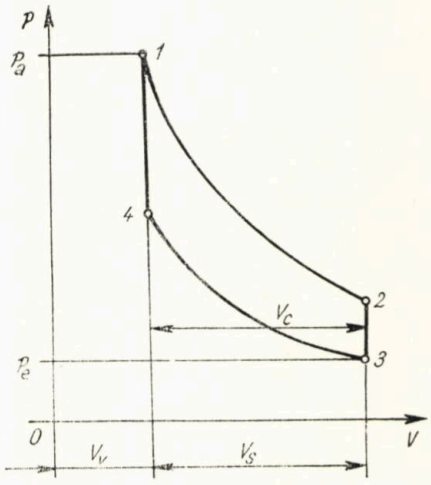


Fig. 3

Aceste condiții simplifică expresia (25) care devine:

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{k}}} \cdot \frac{\varepsilon_2^k - 1}{\varepsilon_2 - 1} \tag{26}$$

adică,

$$\frac{T_e}{T_a} = f[\varepsilon(\pi), \varepsilon_2].$$

Detentorul cu piston experimental cu ferestre de admisie și evacuare funcționează după diagrama teoretică arătată în figura 3 și este caracterizat prin condițiile:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon_2 = 1. \tag{27}$$

In acest caz expresia (24) se reduce la [2]:

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \tag{28}$$

adică,

$$\frac{T_e}{T_a} = f(\varepsilon).$$

Din cele arătate, se desprinde concluzia că expresiile (18), (21) și (24) ale raportului de temperaturi T_e/T_a sînt expresii generale care, pe de o parte pun în evidență influența factorilor constructivi și funcționali asupra temperaturii gazului evacuat din cilindrul detentorului cu piston, iar pe de altă parte permit, prin particularizare, stabilirea unor expresii mai simple care pot fi utilizate în analiza termodinamică a detentoarelor cu piston experimentale.

Pe baza expresiilor generale ale raportului T_e/T_a se pot stabili expresiile indicilor tehnico-economici teoretici ce caracterizează funcționarea detentoarelor cu piston. Acești indici formează un ansamblu de criterii care vor permite aprecierea perfecțiunii proceselor care se desfășoară în cilindru și compararea diferitelor tipuri de detentoare cu piston.

1. *Randamentul adiabatic teoretic*

Randamentul adiabatic sau convențional (tehnic) [7] permite aprecierea gradului de perfecțiune a proceselor care se desfășoară în cilindrul detentorului cu piston. El reprezintă raportul între căderea de entalpie realizată în procesul de evoluție a unității de cantitate de gaz admisă în cilindru și căderea maximă de entalpie care s-ar putea obține într-un proces de destindere izentropică în același interval de presiuni. În cazul gazului ideal, a cărui căldură specifică nu depinde de temperatură, randamentul adiabatic este dat de expresia:

$$\eta_{ad} = \frac{\Delta T}{\Delta T_{ad}} \tag{29}$$

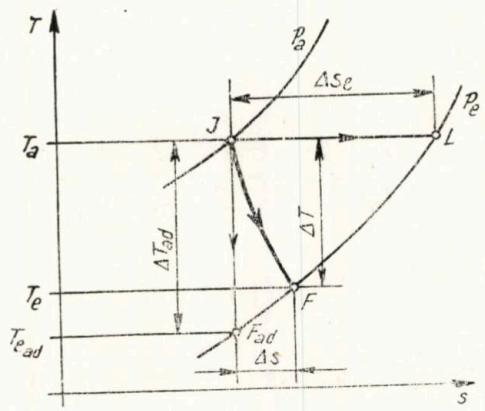


Fig. 4

în care, așa cum se observă și din figura 4, cele două diferențe de temperatură sînt date de expresiile:

$$\Delta T = T_a - T_e = T_a\left(1 - \frac{T_e}{T_a}\right) \tag{30}$$

$$\Delta T_{ad} = T_a - T_{e_{ad}} = T_a\left(1 - \frac{T_{e_{ad}}}{T_a}\right) = T_a\left(1 - \pi^{\frac{1-k}{k}}\right). \tag{31}$$

Ținînd seama de expresiile (18) și (24) ale raportului T_e/T_a și de relațiile (30) și (31), expresia (29) devine expresia randamentului adiabatic teoretic și poate fi pusă sub următoarele două forme:

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1}{1-\pi^{\frac{1-k}{k}}}\left[1-\frac{1+a_v}{a_v}\cdot\frac{\pi\left(\frac{\delta_a}{1+a_v}\right)^k - k\,\frac{\delta_c}{1+a_v}+(k-1)}{k\pi\frac{\delta_a}{a_v}-\left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k-(k-1)\pi}\right] \tag{32}$$

adică,

$$\eta_{0_{ad}} = f(\pi,\ a_v,\ \delta_a,\ \delta_c)$$

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1}{1-\pi^{\frac{1-k}{k}}}\left[1-\varepsilon\,\frac{\pi\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^k - k\,\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon}+(k-1)}{k\pi\varepsilon_2-\varepsilon_5^k-(k-1)\pi}\right] \tag{33}$$

adică,

$$\eta_{0_{ad}} = f(\pi,\ \varepsilon,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_5)$$

Se observă că, randamentul adiabatic teoretic depinde de aceeași factori ca și raportul de temperaturi T_e/T_a.

Randamentele adiabatice teoretice ale detentoarelor experimentale se obțin prin particularizarea expresiei generale (33) pe baza condițiilor (25) și respectiv (27):

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1}{1-\pi^{\frac{1-k}{k}}}\left(1-\frac{1}{k}\,\pi^{\frac{1-k}{k}}\,\frac{\varepsilon_2^k-1}{\varepsilon_2-1}\right) \tag{34}$$

și [2]:

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1-\varepsilon^{1-k}}{1-\pi^{\frac{1-k}{k}}}. \tag{35}$$

2. *Randamentul entropic teoretic*

Spre deosebire de randamentul adiabatic teoretic care compară procesul $I-F$ din cilindru cu un proces ideal $I-F_{ad}$ de destindere izentropică (fig. 4), randamentul entropic compară creșterea de entropie Δs în procesul $I-F$ cu creșterea maximă de entropie Δs_l care poate apare în procesul de laminare adiabatică $I-L$ a gazului în același interval de presiuni. În cazul gazului ideal, laminarea adiabatică este un proces total ireversibil deoarece variația temperaturii în acest proces este nulă.

Analiza proceselor din cilindru pe baza ipotezelor enunțate duce la concluzia că atît randamentul adiabatic teoretic cît și cel entropic teoretic pun în evidență numai ireversibilitatea provocată de procesele de umplere și evacuare, celelalte procese fiind considerate reversibile.

Deci,

$$\eta_{0_s} = 1 - \frac{\Delta s}{\Delta s_l} \tag{36}$$

în care :

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T_e}{T_a} - AR \ln \frac{p_e}{p_a} \tag{37}$$

$$\Delta s_l = - AR \ln \frac{p_e}{p_a}. \tag{38}$$

Ținînd seama de relațiile (37) și (38), expresia (36) devine :

$$\eta_{0_s} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{\ln \frac{T_a}{T_e}}{\ln \pi}. \tag{39}$$

Expresia randamentului entropic teoretic poate fi pusă sub următoarele două forme, dacă se procedează la înlocuirea raportului de temperaturi T_a/T_e pe baza expresiilor generale (18) și (24) :

$$\eta_{0_s} = \frac{1}{\ln \pi^{\frac{k-1}{k}}} \ln \frac{a_v}{1 + a_v} \cdot \frac{k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi}{\pi \left(\frac{\delta_a}{1 + a_v}\right)^k - k \frac{\delta_c}{1 + a_v} + (k-1)} \tag{40}$$

și

$$\eta_{0_s} = \frac{1}{\ln \pi^{\frac{k-1}{k}}} \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{k \pi \varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi}{\pi \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^k - k \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k-1)}. \tag{41}$$

Pentru stabilirea expresiilor randamentelor entropice teoretice ale detentoarelor cu piston experimentale se impun condițiile (25) și respectiv (27) :

$$\eta_{0_s} = \frac{1}{\ln \pi^{\frac{k-1}{k}}} \ln k \cdot \pi^{\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2^k - 1} \tag{42}$$

și

$$\eta_{0_s} = \frac{\ln \varepsilon^{k-1}}{\ln \pi^{\frac{k-1}{k}}}. \tag{43}$$

Din cele arătate rezultă că randamentul entropic teoretic depinde de aceeași factori ca și randamentul adiabatic teoretic. În cazul gazului

ideal, între cele două randamente se poate stabili o relație de legătură utilizînd expresiile stabilite anterior și prelucrate în mod convenabil :

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1 - \frac{T_e}{T_a}}{1 - \pi^{\frac{1-k}{k}}} \tag{44}$$

$$\eta_{0_s} = \frac{\ln \frac{T_a}{T_e}}{\ln \pi^{\frac{k-1}{k}}} . \tag{45}$$

După eliminarea raportului de temperaturi T_e/T_a din relațiile (44) și (45) rezultă :

$$\eta_{0_{ad}} = \frac{1 - \pi^{\frac{1-k}{k} \cdot \eta_{0_s}}}{1 - \pi^{\frac{1-k}{k}}} \tag{46}$$

sau

$$\eta_{0_s} = \frac{\ln \left[1 - \eta_{0_{ad}} \left(1 - \pi^{\frac{1-k}{k}}\right)\right]}{\ln \pi^{\frac{1-k}{k}}} \tag{46, a}$$

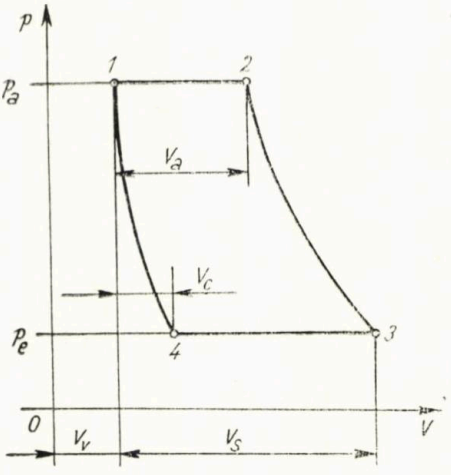


Fig. 5

Se observă că indiferent de valoarea gradului de destindere π, randamentul entropic teoretic este mai mic decît randamentul adiabatic teoretic [8] :

$$\eta_{0_s} < \eta_{0_{ad}} . \tag{47}$$

Cele două randamente devin egale numai în cazul detentorului tehnic ideal [9] a cărui diagramă de funcționare este arătată în figura 5. Se

observă că etapele de umplere și evacuare la volum constant sînt eliminate ceea ce impune următoarele condiții :

$$\varepsilon_5 = \pi^{\frac{1}{k}} \quad ; \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} = \pi^{\frac{1}{k}}. \tag{48}$$

Introducerea acestor condiții în expresiile (33) și (41) ale lui $\eta_{0_{ad}}$ și η_{0_s} conduce la rezultatul :

$$\eta_{0_{ad}} = \eta_{0_s} = 1$$

care arată că în acest caz toate procesele din cilindru se desfășoară reversibil. Prezența spațiului vătămător nu este o sursă de ireversibilitate deoarece, în această situație, așa cum rezultă din expresia (16) $T_2 = T_a$, adică temperatura gazului în procesul de umplere la presiune constantă, nu se modifică.

In acest caz cu totul particular amestecarea a două cantități de gaz (gazul rezidual din V_v și gazul admis) care au aceeași natură și sînt caracterizate prin aceeași presiune și temperatură nu este însoțită de creșterea entropiei.

3. *Puterea frigorifică specifică teoretică*

Puterea frigorifică specifică reprezintă cantitatea de căldură pe care o poate prelua unitatea de cantitate de agent de lucru într-un proces de încălzire la presiunea constantă p_e de la temperatura de evacuare T_e pînă la cea de admisie T_a. Din definiție rezultă că variația de entalpie a agentului în procesul de încălzire este identică cu puterea frigorifică specifică.

Considerînd ca unitate de cantitate normal metru cub, puterea frigorifică specifică teoretică este dată de expresia :

$$q_0 = C_p (T_a - T_e) \left[\frac{\text{kcal}}{\text{Nm}^3}\right] \tag{49}$$

în care C_p este căldura specifică, raportată la Nm^3.

Ținînd seama că :

$$C_p = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} \tag{50}$$

unde

A este echivalentul în căldură al lucrului mecanic ;

R_M — constanta universală a gazelor perfecte, în kgm/kmol·grd ;

$V_{M,0}$ — volumul molar normal, în Nm^3/kmol, rezultă :

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_a \left(1 - \frac{T_e}{T_a}\right). \tag{51}$$

După înlocuirea raportului de temperaturi T_e/T_a dat de expresiile (18) și (24) rezultă:

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_a \left[1 - \frac{1+a_v}{a_v} \cdot \frac{\pi \left(\frac{\delta_a}{1+a_v} \right)^k - k \frac{\delta_c}{1+a_v} + (k-1)}{k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v} \right)^k - (k-1) \pi} \right] \tag{52}$$

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_a \left[1 - \varepsilon \frac{\pi \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \right)^k - k \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k-1)}{k \pi \varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1) \pi} \right] \tag{53}$$

Expresiile puterilor frigorifice specifice ale agentului care evoluează în cilindrii detentoarelor cu piston experimentale se obțin prin particularizarea expresiei generale (53) pe baza condițiilor (25) și respectiv (27):

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_a \left(1 - \frac{1}{k} \frac{1-k}{\pi^k} \frac{\varepsilon_2^k - 1}{\varepsilon_2 - 1} \right) \tag{54}$$

și

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_a (1 - \varepsilon^{1-k}). \tag{55}$$

Puterea frigorifică specifică q_0 poate fi exprimată și în funcție de temperatura gazului evacuat T_e dacă se procedează la înlocuirea raportului de temperaturi T_a/T_e în expresia (51) scrisă sub forma:

$$q_0 = \frac{k}{k-1} A \frac{R_M}{V_{M,0}} T_e \left(\frac{T_a}{T_e} - 1 \right). \tag{56}$$

4. *Debitul teoretic de gaz*

Expresia debitului teoretic de gaz prelucrat de detentorul cu piston se stabilește cu ajutorul cantității de gaz admise în cilindru la fiecare rotație a arborelui cotit în decursul căreia se desfășoară procesele care compun diagrama teoretică de funcționare a detentorului. Această cantitate de gaz este diferența între cantitatea de gaz care se află în cilindru la finele procesului de umplere și cea de la finele procesului de evacuare, adică:

$$G_0 = G_2 - G_5 \qquad [\text{kg}] \tag{57}$$

în care:

$$G_2 = \frac{p_2 V_2}{R T_2} = \frac{p_a V_s}{R T_2} \delta_a \tag{58}$$

$$G_5 = \frac{p_5 V_5}{R T_5} = \frac{p_e V_s}{R T_5} \delta_c. \tag{59}$$

Înlocuind cantităţile de gaz G_2 şi G_5 definite de relaţiile (58) şi (59) în expresia (57) se obţine:

$$G_0 = \frac{V_s}{R} p_a \left(\frac{\delta_a}{T_2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\delta_c}{T_5} \right) \tag{60}$$

unde R este constanta gazului perfect, în kgm/kg grd.

Temperatura T_5 se determină cu ajutorul relaţiilor (11) şi (15):

$$T_5 = T_2 \cdot \pi^{\frac{1-k}{k}}. \tag{61}$$

După înlocuirea în expresia (60) a temperaturilor T_6 şi T_5 date de expresiile (16) şi (61) se obţine în formă finală:

$$G_0 = \frac{p_a V_s}{R T_a} \cdot \frac{a_v}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \left[k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v} \right)^k - (k-1)\pi \right]. \tag{62}$$

Debitul teoretic de gaz, exprimat în Nm^3/h, se determină pe baza relaţiei (62):

$$V_{0,h} = V_s \frac{p_a}{T_a} \cdot \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{a_v}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \left[k \pi \frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v} \right)^k - (k-1)\pi \right] 60 \cdot n \tag{63}$$

sau

$$V_{0,h} = V_s \frac{p_a}{T_a} \cdot \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{1}{k(\varepsilon - 1)\pi} \left[k \pi \varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi \right] 60 \cdot n \tag{64}$$

în care n este turaţia detentorului, în rot/min.

Prin particularizarea expresiei generale (64) rezultă expresiile debitelor teoretice de gaz prelucrate de cele două detentoare experimentale:

$$V_{0,h} = V_s \frac{p_a}{T_a} \cdot \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{\varepsilon_2 - 1}{\pi^{\frac{1}{k}} - 1} 60 \cdot n \tag{65}$$

şi

$$V_{0,h} = V_s \frac{p_a}{T_a} \cdot \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{\pi - \varepsilon^k}{k(\varepsilon - 1)\pi} 60 \cdot n. \tag{66}$$

Atunci cînd este necesară raportarea debitului de gaz la condiţiile din conducta de evacuare, se recurge la relaţiile (17) şi (61) care se introduc în expresia (60) a cantităţii de gaz G_0.

5. *Puterea frigorifică teoretică*

Puterea frigorifică reprezintă cantitatea de căldură preluată în fiecare oră de către agentul de lucru care a evoluat în detentor, într-un proces de încălzire la presiunea constantă p_e, în timpul căruia temperatura lui creşte de la T_e la T_a. Din definiţie rezultă că produsul dintre debitul teoretic de gaz şi puterea frigorifică specifică teoretică reprezintă tocmai puterea frigorifică teoretică a detentorului:

$$Q_{0,h} = V_{0,h} \cdot q_0 \qquad \left[\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right] \tag{67}$$

După efectuarea înlocuitorilor lui q_0 și $V_{0,h}$ pe baza relațiilor (52), (63) și respectiv (53), (64) se obține:

$$Q_{0,h} = V_s p_a A \frac{a_v}{(k-1)\pi}\left\{k\pi\frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi - \right.$$

$$\left. - \frac{1+a_v}{a_v}\left[\pi\left(\frac{\delta_a}{1+a_v}\right)^k - k\frac{\delta_c}{1+a_v} + (k-1)\right]\right\} 60 \cdot n \qquad (68)$$

și

$$Q_{0,h} = V_s p_a A \frac{1}{(k-1)(\varepsilon-1)\pi}\left\{k\pi\varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi - \right.$$

$$\left. - \varepsilon\left[\pi\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^k - k\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k-1)\right]\right\} 60 \cdot n. \qquad (69)$$

Aplicarea condițiilor (25) și (27) expresiei generale (69) permite stabilirea expresiilor puterilor frigorifice teoretice ale detentoarelor cu piston experimentale:

$$Q_{0,h} = V_s p_a A \frac{1}{(k-1)(\pi^{\frac{1}{k}} - 1)\pi}\left[k\pi(\varepsilon_2 - 1) - \pi^{\frac{1}{k}}\left(\varepsilon_2^k - 1\right)\right] 60 \cdot n \qquad (70)$$

și

$$Q_{0,h} = V_s p_a A \frac{(\pi - \varepsilon^k)(1 - \varepsilon^{1-k})}{(k-1)(\varepsilon-1)\pi} 60 \cdot n \qquad (71)$$

*
* *

Studiind expresiile generale stabilite pentru puterea frigorifică specifică teoretică, debitul teoretic de gaz și puterea frigorifică teoretică a detentorului se desprinde concluzia că, pe lîngă factorii constructivi și funcționali adimensionali care intervin și în expresiile celor două randamente teoretice mărimile enumerate mai depind și de o serie de factori constructivi și funcționali dimensionali cum sînt:

— temperatura de admisie sau evacuare pentru puterea frigorifică specifică teoretică;

— temperatura de admisie și presiunea de admisie sau temperatura de evacuare și presiunea de evacuare pentru debitul teoretic de gaz;

— presiunea de admisie sau evacuare pentru puterea frigorifică teoretică;

— volumul cursei pistonului pentru debitul teoretic de gaz și puterea frigorifică teoretică;

— turația detentorului pentru debitul teoretic de gaz și puterea frigorifică teoretică a detentorului.

În cazul cînd este necesară efectuarea unui studiu comparativ al indicilor tehnico-economici care caracterizează diferitele tipuri constructive

de detentoare cu piston este utilă introducerea următoarelor complexe adimensionale care depind numai de factorii constructivi și funcționali adimensionali ținînd seamă că :

$$p_o V_{M,o} = R_M T_o \tag{72}$$

Rezultă :

$$q_0^* = \frac{q_0}{A T_a} \cdot \frac{T_0}{p_0} \tag{73}$$

$$V_{0,h}^* = \frac{V_{0,h}}{60 n V_s} \cdot \frac{T_a}{p_a} \cdot \frac{p_0}{T_0} \tag{74}$$

$$Q_{0,h}^* = \frac{Q_{0,h}}{A\, 60 n V_s p_a} \tag{75}$$

Dacă se efectuează produsul expresiilor (73) și (74) și se ține seama de relația (67) rezultă :

$$Q_{0,h}^* = V_{0,h}^* \cdot q_0^* \tag{76}$$

Comparînd relațiile (52), (53), (63), (64), (68), (69) cu expresiile complexelor adimensionale (73), (74) și (75) rezultă :

$$q_0^* = \frac{k}{k-1}\left[1 - \frac{1+a_v}{a_v} \cdot \frac{\pi\left(\frac{\delta_a}{1+a_v}\right)^k - k\frac{\delta_c}{1+a_v} + (k-1)}{k\pi\frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi}\right] \tag{77}$$

sau

$$q_0^* = \frac{k}{k-1}\left[1 - \varepsilon \frac{\pi\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^k - k\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k-1)}{k\pi\varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi}\right] \tag{78}$$

$$V_{0,h}^* = \frac{1}{k} \cdot \frac{a_v}{\pi}\left[k\pi\frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi\right] \tag{79}$$

sau

$$V_{0,h}^* = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(\varepsilon-1)\pi}\left[k\pi\varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi\right] \tag{80}$$

$$Q_{0,h}^* = \frac{a_v}{(k-1)\pi}\left\{k\pi\frac{\delta_a}{a_v} - \left(\frac{\delta_c}{a_v}\right)^k - (k-1)\pi - \frac{1+a_v}{a_v}\left[\pi\left(\frac{\delta_a}{1+a_v}\right)^k - k\frac{\delta_c}{1+a_v} + (k-1)\right]\right\} \tag{81}$$

sau

$$Q_{0,h}^* = \frac{1}{(k-1)(\varepsilon-)\pi}\left\{k\pi\varepsilon_2 - \varepsilon_5^k - (k-1)\pi - \varepsilon\left[\pi\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\right)^k - k\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon} + (k-1)\right]\right\} \tag{82}$$

În cazul detentoarelor experimentale, particularizarea expresiilor generale (78), (80) și (82) conduce la următoarele relații:

— pentru detentorul cu supapă de admisie și ferestre de evacuare:

$$q_0^* = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{k}\,\pi^{\frac{1-k}{k}}\,\frac{\varepsilon_2^k - 1}{\varepsilon_2 - 1}\right) \tag{83}$$

$$V_{0,h}^* = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\pi^{\frac{1}{k}} - 1} \tag{84}$$

$$Q_{0,h}^* = \frac{k\,\pi\,(\varepsilon_2 - 1) - \pi^{\frac{1}{k}}(\varepsilon_2^k - 1)}{(k-1)\,(\pi^{\frac{1}{k}} - 1)\,\pi} \tag{85}$$

— pentru detentorul cu ferestre de admisie și evacuare:

$$q_0^* = \frac{k}{k-1}\,(1 - \varepsilon^{1-k}) \tag{86}$$

$$V_{0,h}^* = \frac{\pi - \varepsilon^k}{k\,(\varepsilon - 1)\,\pi} \tag{87}$$

$$Q_{0,h}^* = \frac{(\pi - \varepsilon^k)\,(1 - \varepsilon^{1-k})}{(k-1)\,(\varepsilon - 1)\,\pi} \tag{88}$$

Expresiile (83) ... (88) se pot utiliza atît în analiza termodinamică a diagramelor teoretice de funcționare ale detentoarelor cu piston experimentale în echicurent cît și la prelucrarea datelor experimentale publicate în literatura de specialitate.

Trebuie remarcat că în funcționarea detentoarelor cu piston există două cazuri arătate în figurile 6 și 7.

În primul caz (fig. 6) presiunea de admisie p_a este mai mică decît presiunea p^L_a corespunzătoare punctului 1_L aflat la intersecția între adiabata punctului 4 și izocora volumului vătămător, adică:

$$\pi < \varepsilon^k \tag{89}$$

Se observă că în această situație volumul de admisie nu poate scade sub V_a^L care corespunde punctului 2_L aflat la intersecția izobarei p_a și adiabatei 1_L — 4. Această observație se traduce prin condiția:

$$\varepsilon_2 > 1 + \frac{\varepsilon}{\pi^{\frac{1}{k}}} \tag{90}$$

sau ținînd seama de condiția (89) rezultă:

$$\varepsilon_2 > 2 \tag{91}$$

În ceea ce privește volumul de compresie se observă că acesta nu poate depăși volumul V_c^L corespunzător punctului 5_L aflat la intersecția adiabatei punctului 1 cu izobara p_e. Din această observație rezultă următoarea condiție:

$$\varepsilon_5 < \pi^{\frac{1}{k}} \tag{92}$$

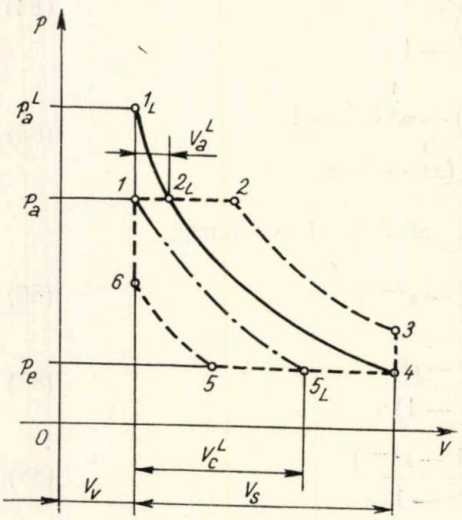


Fig. 6

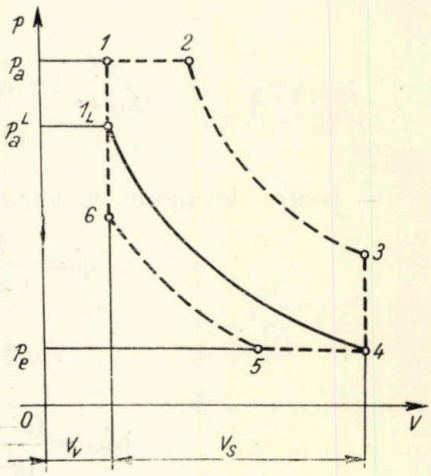


Fig. 7

În cel de al doilea caz (fig. 7) presiunea de admisie p_a este mai mare decît presiunea p_a^L, adică:

$$\pi > \varepsilon^k \tag{93}$$

Se observă că în această situație gradele de admisie și recompresie ε_a și ε_c pot lua orice valori cuprinse între 0 și 1, ceea ce se traduce și prin condițiile:

$$\varepsilon > \varepsilon_2 > 1 \text{ și } 1 < \varepsilon_5 < \varepsilon \tag{94}$$

Diagramele detentoarelor cu piston experimentale se obțin punînd următoarele condiții suplimentare:

— pentru detentorul cu supapă de admisie și ferestre de evacuare:

$$\varepsilon_5 = \varepsilon \tag{95}$$

— pentru detentorul cu ferestre de admisie și evacuare:

$$\varepsilon_2 = 1 \text{ și } \varepsilon_5 = \varepsilon \tag{96}$$

Rezultă deci că, funcționarea detentoarelor experimentale este posibilă numai în cazul cînd este respectată condiția (93).

La limită, pentru $\pi = \varepsilon^k$ și $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_5 = \varepsilon$, diagrama se reduce la o curbă și anume $1_L - 4$ iar detentorul destinde și comprimă aceeași cantitate de gaz fără a primi sau evacua gaz în exterior.

În concluzie, ca rezultat al analizei termodinamice a diagramei teoretice de funcționare a detentorului cu piston prevăzut cu supape de admisie și evacuare, au fost stabilite expresiile generale ale următorilor indici tehnico-economici :

— raportul teoretic între temperatura gazului admis și cea a gazului evacuat din cilindru ;
— randamentul adiabatic teoretic ;
— randamentul entropic teoretic ;
— puterea frigorifică specifică teoretică a gazului ;
— debitul teoretic de gaz admis în detentor ;
— puterea frigorifică teoretică a detentorului.

Prin particularizarea acestor expresii generale au fost obținute expresiile indicilor tehnico-economici teoretici care caracterizează funcționarea detentoarelor cu piston experimentale în echicurent.

Expresiile generale și particulare stabilite permit, pe de o parte efectuarea unor studii comparative ale diferitelor tipuri de detentoare cu piston iar pe de altă parte interpretarea rezultatelor experimentale publicate în literatura de specialitate. Compararea indicilor tehnico-economici experimentali cu cei teoretici permite punerea în evidență a gradului de perfecțiune termogazodinamică și constructivă a detentorului cu piston studiat, precum și a influenței în ansamblu a unor factori ca schimbul de căldură al gazului cu exteriorul, laminarea gazului în supapele și ferestrele de admisie și evacuare, schimbul de căldură intern (regenerativ) și frecarea elementelor componente ale sistemului de etanșare.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *V. B. Gridin :* Priamotocinîi porșnevoi detander s obratnîm sjatiem. Kislorod, N. 3, 1959, pag. 16—25.
2. *R. Doll, F. X. Eder :* Neuartige expansionsmaschine zur erzeugung tiefer temperaturen. Kältetechnik, N. 1, 1964, pag. 5—11.
3. *V. Radcenco :* Analiza termodinamică a proceselor teoretice de umplere și evacuare a gazului din cilindrul detentorului cu piston. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din București, N. 3, 1965, pag. 79—100.
4. *W. A. Morain, J. M. Holmes :* An Analysis of the Performance of Large Reciprocating Expansion Engines with the and of a computer and Laboratory Prototype. Advances in Cryogenic Engineering, vol. VIII, 1963, pag. 228—235.

5. *S. I. Gherș:* Glubokoe ohlajdenie, vol. 2, Moscova, 1960, pag. 13—70.
6. Razdelenie vozduha metodom glubokovo ohlajdenia, vol. 2, Moscova, 1964, pag. 177—232.
7. Tehnica nizkih temperatur, Moscova, 1964, pag. 291—354.
8. *I. I. Ghilman:* Oțenka termodinamiceskoi effectivnosti porșnevîh detanderov. Trudî VNIIKIMAȘ, vîpusk 8, 1964, pag. 141—162.
9. *R. B. Scott:* Cryogenic Engineering, 1962, pag. 41—43.
10. *S. C. Collins, R. L. Cannaday:* Expansion machines for low temperature process, Oxford, 1958.
11. *J. de Wæle:* Reciprocating and Turbo-expanders for low Temperature Refrigeration. Referat N. 3, la al XI-lea Congres internațional de frig, München, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

MAȘINI TERMICE

CZ : 621.43-4

CONSIDERAȚII ASUPRA DESFĂȘURĂRII ARDERII ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE RAPIDE, CU INJECȚIE DIRECTĂ*

N. APOSTOLESCU

Arderea în motoarele cu aprindere prin comprimare (m.a.c.) cuprinde un ansamblu de procese de natură fizică (pulverizarea și vaporizarea combustibilului, formarea amestecului combustibil — aer, transferul de căldură) și de natură chimică (ansamblul proceselor chimice care conduc la formarea produșilor finali).

În teoria clasică, arderea în m.a.c. este divizată în patru perioade, deosebite prin valorile și modul de variație al parametrilor ce caracterizează efectele globale ale arderii : presiune, viteza de creștere a presiunii, temperatura, viteza de degajare a căldurii de reacție, etc.

Procesele fizice și chimice ale arderii, care se găsesc în relații de dependență reciprocă, se desfășoară în condiții diferite în cursul acestor perioade. Ca urmare se modifică raporturile acestor procese și importanța fiecărui proces în desfășurarea de ansamblu a arderii.

În legătură cu prima perioadă a arderii, perioada întîrzierii la autoaprindere, s-a impus astăzi punctul de vedere al importanței preponderente a reacțiilor chimice asupra duratei sale. Cercetările au scos în evidență tot odată importanța proceselor fizice care au loc în această perioadă. S-a stabilit astfel influența diferențiată a condițiilor de formare a amestecului asupra etapelor proceselor chimice ale autoaprinderii. Existența unui cîmp de concentrații variabile combustibil-aer în camera de ardere este favorabilă din punctul de vedere al cineticii reacțiilor chimice /1/.

Pînă la finele perioadei de întîrziere la autoaprindere, în camera de ardere se formează volume de amestec cuasiomogen inflamabil combustibil-aer, dispuse în cea mai mare măsură la periferia jeturilor de combustibil. Desigur că importanța acestor volume și distribuția lor în ca-

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

mera de ardere este determinată de durata întîrzierii la autoaprindere, de viteza de injectare a combustibilului (cantitatea de combustibil injectată în această perioadă), caracteristicile injecției, de intensitatea formării amestecului (intensitatea mișcării turbulente și a mișcării organizate a aerului din camera de ardere).

Distribuția locală a combustibilului la finele acestei perioade ar putea fi reprezentată ca în fig. 1.

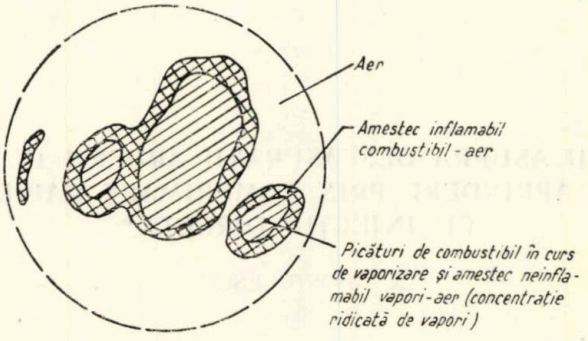


Fig. 1

Perioada arderii rapide, care urmează întîrzierii la autoaprindere, are o durată scurtă (de ordinul 0,5 — 1 m/sec). Ea este caracterizată printr-o viteză înaltă de degajare a căldurii de reacție, rezultînd creșterea rapidă a presiunii și temperaturii.

Intensitatea ridicată a reacțiilor de ardere în această perioadă este explicabilă prin existența unor volume de amestec inflamabil, formate în perioada precedentă, în care au avut loc reacții chimice preliminare de oxidare parțială. În aceste volume apar în urma autoaprinderii nuclee de flacără, de la care arderea se dezvoltă prin propagarea unor fronturi de flacără turbulentă.

Prin fotografiere rapidă, s-au putut pune în evidență 2—3 nuclee de flacără, dispuse pe mantaua jeturilor de combustibil.

Cercetările respective au fost efectuate însă în motoare experimentale, funcționînd la o turație și un raport de comprimare scăzut /2/.

La m.a.c. rapide, funcționînd cu turații și rapoarte de comprimare ridicate se ating presiuni și temperaturi la finele comprimării superioare. Prin urmare, este de așteptat ca în volumele de amestec combustibil-aer formate, reacțiile chimice premergătoare autoaprinderii să se desfășoare cu o amploare cu mult mai mare. Aceasta va antrena o sporire considerabilă a numărului nucleelor de flacără în tot cursul acestei perioade. Va crește astfel mult importanța relativă a arderii prin mecanismul reacțiilor în volum.

Se poate considera deci că arderea combustibilului în perioada arderii rapide are un caracter intermediar, procedînd atît prin mecanismul reacțiilor în volum (succesiune de autoaprinderi, pe măsura încheierii reacțiile preliminare) propus de unii autori /3/ cît și prin propagarea unor fronturi de flacără turbulentă.

În această perioadă este inițiată și arderea unor particole de combustibil lichid după mecanismul arderii difuzive.

Caracteristica perioadei arderii rapide este însă arderea unor amestecuri cuasi-omogene. În acest fel pot fi explicate viteza înaltă de degajare a căldurii, durata redusă a perioadei și scăderea rapidă a vitezei de degajare a căldurii la finele perioadei.

Prin fotografiere în culori, executată recent /4/, a fost dovedită prezența în această perioadă a flacării neluminoase, caracteristică arderii amestecurilor omogene. În acest scop, combustibilul a fost dopat cu compuși de cupru, care au conferit flăcării neluminoase culoarea verde, înregistrată pe film.

Căldura de reacție degajată pînă la finele perioadei la funcționarea la sarcină plină are în general o valoare redusă (de ordinul a 20—40% din căldura de reacție a combustibilului injectat pe ciclu la funcționarea la plină sarcină).

În perioada arderii progresive, ard fracțiuni de combustibil rămas nears în perioada precedentă datorită absenței locale a oxigenului necesar, precum și fracțiuni ale combustibilului care continuă să fie injectat.

Componența camerii de ardere în această perioadă poate fi reprezentată ca în fig. 2.

În camera de ardere sînt prezente acum volume importante de gaze arse, care încorporează eventual și combustibil nears. Combustibilul nears se găsește în stare de vapori, sub formă de picături lichide în curs de vaporizare și în stare solidă, sub forma particolelor de funingine.

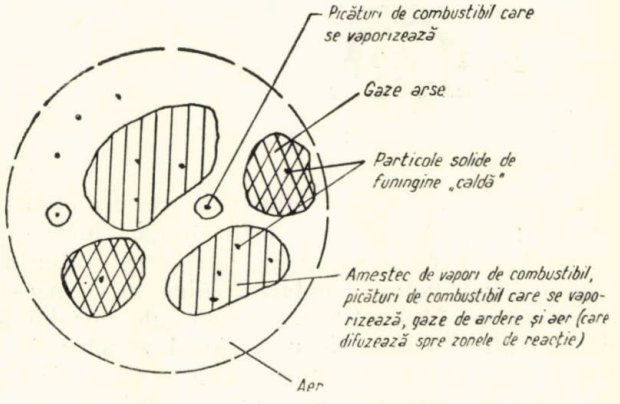


Fig. 2

Mișcările aerului din camera de ardere, mișcarea turbulentă și în special mișcarea organizată tind să disocieze jeturile de combustibil, să repartizeze picăturile de combustibil, și volumele de vapori de combustibil, în întreg volumul camerii de ardere. În același sens influențează deplasarea pistonului în cursa de destindere.

Ultimul efect este pus în evidență pe fotoînregistrări, pe care se observă cum flacăra care a cuprins întreaga suprafață a camerii de ardere

formată în capul pistonului, se dezvoltă apoi pe întreaga suprafață a cilindrului, (fig. 3).

Arderea în această perioadă este caracterizată prin suprapunerea procesului de formare a amestecului cu procesul de ardere, căpătînd astfel caracterul unei arderi difuzive.

Reacțiile de ardere au loc în zonele plasate în jurul volumelor de vapori de combustibil și a particolelor solide de funingine, unde se realizează și procesul formării amestecului combustibil-oxigen.

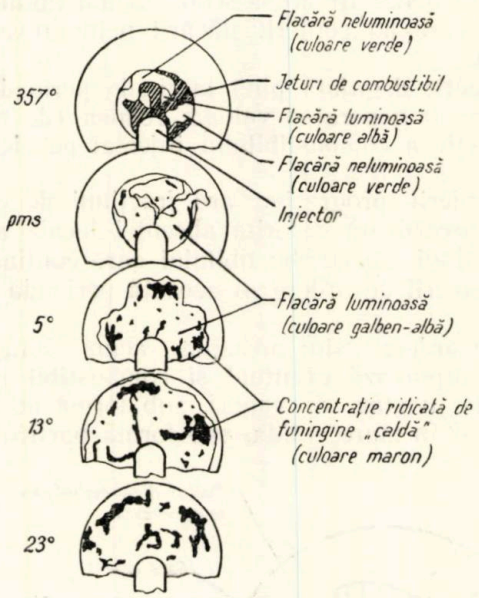


Fig. 3

Desfășurarea reacției în aceste zone este condiționată de transportul continuu de oxigen, care are loc prin difuzie turbulentă. Prezența volumelor de gaze de ardere, a căror mărime crește continuu și în general imperfecțiunile distribuției combustibilului în cameră (v. fig. 2), îngreunează acest proces. Mișcările organizate ale aerului acționează în sensul creșterii concentrației de oxigen în jurul zonelor de reacție.

In literatura de specialitate, se admite în general că factorul care controlează arderea este procesul formării amestecului. Astfel se arată că: „viteza de amestecare și cantitatea de oxigen sînt factori principali care controlează viteza de ardere în cursul acestei faze"/5/, subliniindu-se astfel în mod implicit caracterul difuziv al arderii.

In legătură cu importanța vitezei reacțiilor chimice în raport cu viteza de formare a amestecului, literatura nu prezintă însă un punct de vedere unitar. Pe baza unor cercetări privind arderea unor picături de combustibil la presiuni scăzute, Tarifa /6/, trage concluzia că în condițiile camerelor de ardere ale motoarelor, cinetica chimică influențează puter-

nic procesul de ardere, viteza reacțiilor chimice păstrează o influență însemnată asupra vitezei de ardere. Fără să se precizeze temperatura de lucru, experiențele par să fi fost însă efectuate la temperaturi scăzute ceeace ar depărta mult condițiile experiențelor de condițiile din camera de ardere în perioada arderii progresive. Concluziile experiențelor par astfel inaplicabile arderii în motoare.

Sviridov /7/ și Gherșman /8/ au efectuat studii în bombe la presiuni și temperaturi ridicate caracteristice arderii în m.a.c., cercetînd influențele diferiților factori asupra arderii. Experiențele au evidențiat reducerea continuă a duratei arderii *) la mărirea excesului de aer și a intensității mișcărilor turbulente ale încărcăturii. Aceste rezultate conduc la concluzia că în domeniul cercetat al arderii difuzive, viteza de formare a amestecului are influența preponderentă asupra vitezei de ardere; viteza reacțiilor chimice are o influență secundară.

Această concluzie poate fi întărită de următoarele considerațiuni:

Durata reacției poate fi evaluată prin durata creșterii rapide a presiunii în urma autoaprinderii unui amestec omogen combustibil-aer. În acest sens, se pot utiliza datele obținute de Basevici /9/ cu amestecuri omogene combustibil Diesel — aer, autoaprinse în bombe în condiții de temperaturi și presiuni ridicate. Măsurînd durata creșterii rapide a presiunii pe diagrame indicate, s-au obținut valori de ordinul 0,5 — 1 ms.

La o turație de 1500 rot/min, durata de 1 ms corespunde unui unghi de rotație a arborelui cotit (RAC):

$$\alpha = 6 \text{ nt} = 6.1500.10^{-3} = 9^{\circ} \text{ RAC}$$

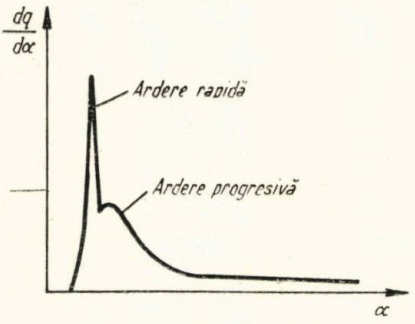


Fig. 4

Această durată este de 6 ÷ 10 ori mai redusă în raport cu durata arderii după sfîrșitul injecției combustibilului la un motor cu aprindere prin comprimare rapid.

Reducerea continuă a vitezei de formare a amestecului în această perioadă a arderii, datorită reducerii proporției oxigenului în camera de ardere determină scăderea progresivă a vitezei de degajare a căldurii. În fig. 4 se prezintă o diagramă tipică de variație a vitezei de degajare

* Măsurată între momentul începutului arderii și momentul în care se atinge presiunea maximă în bombă.

a căldurii de reacție în cursul arderii. Astfel de diagrame au fost calculate recent de Austen și Lyn /10/ pe baza diagramelor indicate obținute la diferite regimuri de funcționare a motorului.

Un aspect caracteristic al arderii în această perioadă este formarea particolelor solide de funingine. Prezența particolelor de funingine a fost pusă în evidență în probele de gaz luate din camera de ardere după punctul mort /11/ și confirmată prin cercetările spectroscopice ale flacării /12/ și prin fotografiere rapidă /4,13/.

Cercetarea spectroscopică a flăcării în domeniul infraroșu pune în evidență continuumul intens al carbonului, asemănător cu cel observat la flăcările difuzive ale acetilenei. Asemănarea celor două spectre și în general prezența carbonului în flacără, caracteristică arderii difuzive, confirmă încă odată caracterul difuziv al arderii progresive în motor.

În fotografiile colorate /4/ prezența funinginii este pusă în evidență prin culoarea intensă albă și galben — albă înregistrată, care corespunde flacării carbonului la 2000 — 2500°C. Funinginea formată este deosebit de densă în unele zone, care apar colorate în maron închis (v. fig. 3).

Deși denumite adeseori carbon în literatura de specialitate, particolele solide apărute în cursul arderii reprezintă compuși cu o structură chimică complexă, atribuindu-se un conținut total de carbon de ordinul a 36% /14/.

Particolele de funingine rezultă în urma polimerizării unor radicali rezultați prin dehidrogenarea hidrocarburilor din combustibil. Aceste procese au loc în absența locală a oxigenului, fiind favorizate mult de presiunea și temperatura ridicată. Condițiile particulare perioadei arderii progresive în motor sînt favorabile prin urmare formării intense de funingine.

Intensitatea formării particolelor de funingine reflectă deci insuficiențele procesului de formare a amestecului.

Reactivitatea acestor particole depinde desigur de structura lor chimică corespunzător tipului de combustibil din care provin. Combustibilii ușori Diesel par să formeze funingine cu o înaltă reactivitate care asigură viteze ridicate de ardere în condițiile prezenței oxigenului necesar.

Această împrejurare, împreună cu dimensiunile extrem de reduse ale acestor particole, explică posibilitatea unor durate reduse ale arderii lor, observate experimental. Astfel Alcock a surprins prin filmare rapidă parcole de funingine care dispar în urma arderii după 140 μ sec. Adoptînd această durată a arderii, se poate determina prin calcul ordinul de mărime al particolelor. În acest scop se utilizează formula lui Nusselt /15/ pentru arderea particolelor de carbon :

$$Z_0 = 144 \frac{\gamma r_0^2}{D_0 T_m} F(\lambda)$$

în care

Z_0 — durata arderii (s)
r_0 — dimensiunea inițială a particolei (m)
γ — greutatea specifică a aerului (kgf/m³)
D_0 — coeficientul de difuzie (m²/h)
λ — coeficientul de exces de aer
T_m — temperatura medie
T_1 — temperatura la suprafața picăturii (°K)
T_0 — temperatura aerului (°K)

$$T_m = \frac{T_1 - T_0}{ln\,(T_1/T_0)}$$

Se aleg valorile medii $\gamma = 1350$ kgf/m³, $D_0 = 0{,}140$ m/h, $T_1 = 1900$°K, $T_0 = 1600$°K, $T_m = 2600$°K, $\lambda = 1{,}3$, $F(\lambda) = 2{,}26$ rezultînd dimensiunea inițială a particolei de 0,35 μ. Această dimensiune este apropiată de dimensiunile determinate direct în probele de gaz prelevate de Mizerniuc (0,5 μ).

Considerînd vitezele ridicate de ardere menționate, se poate conchide că prezența în sine a particolelor de carbon nu constituie un factor de încetinire a arderii. În condiții normale de formare a amestecului, aceste particole ard complet într-un interval de timp relativ scurt, rezultînd o evacuare necolorată de fum.

Atunci cînd formarea amestecului este imperfectă, reacțiile de ardere se prelungesc însă în destindere, pînă la încetarea lor datorită efectului scăderii temperaturii. Prin răcire aceste particole condensează, rezultînd particole de dimensiuni mari, care sînt parțial evacuate cu gazele de ardere, restul intrînd în compoziția depozitelor formate în camera de ardere. Ținînd seama de condițiile specifice de formare, apare justificată denumirea pentru funinginea prezentă în cursul arderii „funingine caldă" spre deosebire de „funinginea rece" prezentă în evacuare, denumiri propuse de prof. C. Aramă.

În mod obișnuit, se consideră că arderea progresivă se termină odată cu sfîrșitul injecției. Căldura de reacție degajată pînă în acest moment reprezintă 40—80% din căldura de reacție a combustibilului injectat.

Complectarea degajării căldurii de reacție a combustibilului are loc în ultima perioadă a arderii, postarderea.

Arderea în perioada postarderii păstrează caracterul difuziv, componența camerii de ardere rămînînd principial aceeași (v. fig. 2).

Oxigenul este prezent la începutul perioadei într-o proporție încă importantă, asigurînd viteze ridicate de ardere. Dificultățile crescînde ale formării amestecului datorită scăderii concentrației medii a oxigenului, acumulării de noi volume de gaze de ardere, antrenează însă reducerea rapidă a vitezei de ardere. În ultima parte a perioadei viteza de degajare a căldurii de reacție este scăzută (v. fig. 4).

Temperatura gazelor la începutul post-arderii este foarte ridicată (temperatura maximă a ciclului este atinsă adeseori după începutul post-arderii). Această împrejurare, precum și absența locală a oxigenului, mai

accentuată în perioada post-arderii, trebuie să determine o intensificare a formării particolelor de carbon. Se poate admite prin urmare că proporţia combustibilului care arde sub forma particolelor solide creşte mult în această perioadă. Aceste consideraţii sînt confirmate experimental.

Fotografiile indică prezenţa unor zone cu concentraţie ridicată de funingine şi flacără luminoasă specifică carbonului pînă la încetarea reacţiilor de ardere.

În concluzie, considerînd arderea în ansamblu se constată că perioadele arderii se disting prin mecanisme deosebite de desfăşurare a arderii. Pentru perioada arderii rapide este caracteristică arderea unor amestecuri formate în perioada precedentă, prin propagarea de flăcări şi autoaprinderi succesive iar pentru arderea progresivă şi post-ardere este caracteristică arderea difuzivă.

Arderea amestecurilor preformate angajează o cantitate redusă de combustibil. Masa principala de combustibil (de ordinul a 60—80% din cantitatea injectată pe ciclu la funcţionarea motorului la plină sarcină) arde difuziv, sub intluenţa dominantă a condiţiilor formării amestecului.

Modificarea condiţiilor de formare a amestecului antrenează schimbarea raportului între cantitatea de combustibil ars sub forma amestecului preformat şi cantitatea arsă difuziv. Prezenţa unor volume importante de amestec omogenizat în momentul autoaprinderii, prin accelerarea injecţiei şi intensificarea formării amestecului antrenează creşterea importanţei arderii rapide şi corespunzător, scăderea importanţei arderii difuzive.

Precizarea mecanismelor după care se desfăşoară arderea atrage unele consideraţii asupra împărţirii pe faze a arderii în motorul cu aprindere prin comprimare.

Introdusă de Ricardo şi acceptată de toţi autorii, divizarea arderii în mai multe faze se face pe baza diagramei indicate presiune-unghiu RAC, la care se ataşează diagrama de ridicare a acului injectorului. Urmărindu-se modificările modului în care decurge arderea prin efectele globale înregistrate pe diagramă, se stabilesc cele patru faze ale arderii ;

— întîrzierea la autoaprindere, cuprinsă între momentul începerii injecţiei şi momentul desprinderii curbei presiunii de pe curba de presiune în cazul fără injecţie ;

— arderea rapidă, în intervalul în care se înregistrează viteze ridicate de creştere a presiunii ;

— arderea progresivă, în intervalul în care vitezele de variaţie a presiunii sînt reduse ;

— post-arderea, din momentul terminării injecţiei pînă la terminarea completă a arderii.

Modul de desfăşurare a proceselor care au loc în cursul arderii, existenţa unor mecanisme diferite ale arderi, aşa cum s-a arătat mai sus, demonstrează caracterul raţional al divizării arderii pe faze. Din acest punct de vedere faza arderii progresive trebuie concepută desigur din momentul în care mecanismul arderii difuzive devine preponderent.

Separarea ultimei perioade a arderii în două faze distincte derivă din concepţia lui Ricardo după care în faza arderii progresive combustibilul arde progresiv, pe măsura injectării sale. Această reprezentare a desfăşu-

rării arderii se aplică motoarelor lente, funcționînd cu excese mari de aer, la care pînă la sfîrșitul injecției arde majoritatea combustibilului.

La motoarele cu aprindere prin comprimare rapide, după datele lui Tolstov, combustibilul injectat după terminarea arderii rapide arde în cea mai mare parte după sfîrșitul injecției. Componența camerii de ardere rămîne principial nemodificată după terminarea injecției, schimbîndu-se numai progresiv proporțiile componenților. Mecanismul de desfășurare a arderii rămîne același și după terminarea injecției. Momentul sfîrșitului injecției nu marchează astfel nici o schimbare importantă a condițiilor de desfășurare a arderii, apărînd astfel ca nesemnificativ pentru divizarea arderii.

Mecanismul comun al arderii, condițiile principal nemodificate fac ca influențele care se exercită asupra ultimelor două faze ale arderii să fie comune.

Divizarea sfîrșitului arderii prin momentul sfîrșitului injecției apare astfel lipsită de o bază fizică.

Dacă se iau în considerare procesele reale care au loc în cursul arderii rezultă că cea de a treia fază distinctă a arderii în motoarele cu aprindere prin comprimare este *faza arderii difuzive*, care se extinde pînă la terminarea arderii.

Ca moment al începutului destinderii se poate admite momentul în care se realizează presiunea maximă a ciclului, convenție care este adoptată pentru motoarele cu aprindere prin scînteie. Ar exista astfel o convenție unică pentru ambele tipuri de motoare.

S-ar putea admite de asemenea ca moment al începutului destinderii și momentul sfîrșitului injecței, urmîndu-se astfel o corespondență cu convenția după care începutul injecției marchează sfîrșitul comprimării.

Indiferent de convenția adoptată în acest sens, perioada arderii difuzive se suprapune parțial începutului destinderii.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Sviridov, I. B.:* Priroda vosplamenenia raspîlenîh topliv s diffuzionno-kineticeskoi tociki zrenia, în culeg. Sgoranie i smeseobrazovanie v dizeliah. Izd. Akad. Nauk SSSR Moskova, 1960.
2. *Basevici, V. I., Socolic, A.S.:* Fiziko — kimiceskaia priroda vosplamenenia v dizeliah, în culeg. Porșnevîe dvigateli vnutrennego sgorania, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskova 1956.
3. *Inozemțev, N. V., Koșkin, V. K.:* Proțesî sgorania v dvigateliah, Mașghiz, Moskova, 1949.
4. *Alcock, J. F., Scott, W. M.:* Some more light on Diesel combustion, The Instit, of Mech. Engrs. (A. D.) 1962—63, Nr. 5.
5. *Taylor Fayette, C., Taylor, E. S.:* The internal combustion engine, International Text book Company, Scranton, Pennsylvania, 1948.

6. *Tarifa, C. S.:* On the influence of chemical kinetics on the combustion of fuel droplets, CIMAC Danmak 1962, B 9.

7. *Sviridov, I. V.:* O protessah vosplamenenia i gorenia v dvigateliah s vosplameneniem ot sjatia. În culeg. Porșnevîe dvigateli vnutrenego sgornia.

8. *Gherșman, I. I.:* Vosplamenenie i gorenia dizelnogo topliva v zavisimosti ot kacestva evo raspîlivania, în culeg. Sgorania i smeseobrazovania v Dizeliah.

9. *Basevici, V. Ia.:* O skorosti gorenia raspîlennovo topliva, în culeg. Sgorania i smeseobrazovania v Dizeliah.

10. *Austen AEW și Lyn WT:* Some steps toward calculating Diesel engine behavior, SAE Trans. 1962 (vol. 70).

11. *Mizerniuc, G. N.:* Issledovanie indikatornogo protessa bîstrohodnogo dvigatelia, tipa Ia, AZ 204. În culeg. Dvigateli vnutrennego sgorania vîpusk 25, Mașghiz 1954.

12. *Lyn, W. T.:* Diesel combustion study by infra-red emission spectroscopy, J. Inst. Petroleum, vol. 43 N. 398, 1957/febr.

13. *Nagao, F., Kakimoto, H:* Swirl and combustion in Diesel engine with divided chambers, SAE Trans, 1962.

14. *Thomas, A.:* Carbon formation in flames, Comb. and flame, vol. 6, 1962/3.

15. *Nusselt, W.:* Der Verbrennungsvorgang in der Kohlenstaubfeuerung, VDI, 68, 1924, p. 124.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

ELECTRONICĂ

C. Z.: 621.385

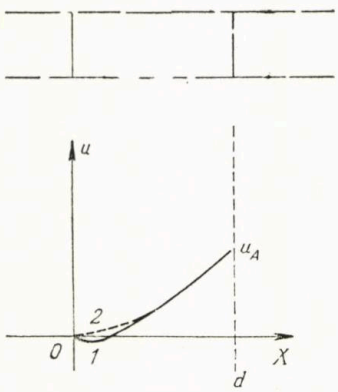
ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИОДА ПРИ МАЛЫХ СИГНАЛАХ *

МИХАИ ДРЭГЭНЕСКУ

1. Введение

Диэлектрический диод — новый электронный прибор [1, 2], работа которого основана на инъекции электронов в зону проводимости диэлектрика.

Электрический ток инъецированных электронов в зону проводимости диэлектрика ограничен пространственным зарядом [3, 4]. В ста-



Риз. 1. Диэлектрический диод (а) и распределение потенциала внутри диода (б):
1 — реальное расределение
2 — приблизительное распределение

ционарном режиме электрический ток I зависит от напряжения u_A, приложенного к диоду согласно $I \sim u_A^2$, если u_A больше чем контактная разность потенциалов между электродами диода. Электрический ток, ограниченный пространственным зарядом (ток ОПЗ) в диэлектрическом

* Manuscris predat la redacție la 10 aprilie 1965.

диоде, похож на ток ОПЗ вакуумного диода, (где $I \sim u_A^{3/2}$). Распределение потенциала между электродами также похоже (рис. 1). Стационарный режим диэлектрического диода исследован в некоторых работах [3, 4 и друг.].

Диэлектрический диод при переменном токе для малых сигналов исследован в работе [6]. Этому вопросу и посвящена настоящая работа. Наш результат был получен независимо от работы [6] и после работы [6]. Конечные результаты этой работы и работы [6] совпадают. Так как методы решения различаются (в настоящей работе используем более прямой способ), считаем целесообразным опубликовать эту работу. Это также важно и для некоторых новых работ [7] [8], которые последуют после этой работы и вскоре будут опубликованы.

2. Постановка вопроса и основные соотношения

В теории диэлектрического диода делаются следующие предположения:

(I) В зону проводимости инъецируются только электроны (концентрация дырок ничтожная).

(II) В запрещенной зоне существуют только мелкие ловушки и в ничтожной концентрации. Поэтому существование ловушек пренебрегается.

(III) Диффузионный ток пренебрегается по сравненню с дрейфовым током. Реальное распределение потенциала в диоде (1, рис. 1 б) предполагает существование диффузионного тока. Для такого распределения потеициала диффузионный ток существенный в непосредственной близости катода, где он превышает дрейфовый ток. но в пространстве минимума потенциала — анод, диффузионный ток пренебрежимо мал по сравнению с дрейфовым током. При u_A достаточно большои, распределение 1 (рис. 1 б) может быть приблизительно установлено распределением 2. Для этого распределения (2, рис. 1 б), если диффузионный ток пренебрежимо мал, следует, что для $x=0$, $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}=0$. В самом деле, для $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}<0$ нет электрического тока, для $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}>0$ существует ток накыщения (все электроны, инъецированные катодом, определяют электрический ток) и только для $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0}=0$ существует ток ОПЗ.

Допущения (I), (II) и (III) характеризуют идеальный диэлектрический диод.

Для этого диода электрические процессы описаны следующими уравнениями:

$$j = e n \mu E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + eD \operatorname{grad} n \simeq e \mu n E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} E = \frac{e n}{\varepsilon} \tag{2}$$

$$E = \operatorname{grad} u \tag{3}$$

где: j — плотность электронного тока (абсолютная величина);
n — концентрация электронов;
μ — подвижность электронов;
E — напряженность электричнского поля (абсолютная величина);
ε — диэлектрическая проницаемость;
u — электрический потенциал.

Из первых двух уравнений следует:

$$j = e\mu E \frac{\partial E}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{4}$$

Если плотность электрического тока известна

$$j = J_0 + \underline{J}_1 \epsilon^{i\omega t} \tag{5}$$

где для малых сигналов

$$J_1 \ll J_0 \tag{6}$$

то решение уравнения (4) имеет также вид

$$\xi = \xi_0 + \underline{\xi}_1 \epsilon^{i\omega t} \tag{7}$$

где для малых сигналов

$$\xi_1 \ll \xi_0. \tag{8}$$

При подстановке (7) и (5) в уравнение (4), получаются следующие уравнения для постоянных и переменных составляющих

$$\frac{dE_0^2}{dx} = \frac{2}{\varepsilon\mu} \tag{9}$$

$$E_0 \frac{d\underline{E}_1}{dx} + \left[\frac{dE_0}{dx} + i\frac{\omega}{\mu}\right] E_1 = \frac{J_1}{\varepsilon\mu}. \tag{10}$$

Для этих уравнений применяются следующие граничные условия:

$$x = 0 \quad , \quad E_0 = 0 \quad , \quad \underline{E}_1 = 0. \tag{11}$$

3. Решение для постоянного составляющего

Из уравнения (9) с граничным условием (11) следует

$$E_0 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\mu} J_0 x} \tag{12}$$

Тогда

$$u = \int_0^x \xi \, dx = \sqrt{\frac{8}{9\varepsilon\mu} J_0} \cdot x^{3/2} \tag{13}$$

Для $x = d$, $u = U_{A0}$ и из (13) следует

$$J_0 = \frac{9}{8} \varepsilon\mu \frac{U_{A0}^2}{d^3}. \tag{14}$$

Это и есть известное выражение постоянного тока ОПЗ [3, 5]. Для настоящей работы нас интересует выражение внутреннего сопротивления диода (для единичного сечения):

$$R_i = \frac{1}{\left(\frac{dJ}{dU_{A0}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{8}\frac{\varepsilon\mu}{d^3}} J_0^{1/2}} = \frac{U_{A0}}{2J_0}. \tag{15}$$

4. Решение для переменного составляющего

Принимая во внимание соотношение (12), уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{dE_1}{dx} + \frac{1 + i\omega\eta\sqrt{x}}{2x} E_1 = \frac{J_1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta}{2\varepsilon} \tag{16}$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{J_0\mu}} \tag{17}$$

Обозначая

$$P(x) = \frac{1 + i\omega\eta\sqrt{x}}{2x} \quad ; \quad Q(x) = \frac{\eta J_1}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{18}$$

уравнение (16) имеет решение

$$E_1 = e^{-\int P(x)\,dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)\,dx} \, dx + B\right] =$$

$$= \frac{e^{-i\omega\eta\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \left[\frac{\eta J_1}{\varepsilon} e^{i\omega\eta\sqrt{x}} \left(-i\frac{\sqrt{x}}{\omega\eta} + \frac{1}{\omega^2\eta^2}\right) + B\right]. \tag{19}$$

Из условия (11) следует, что

$$B = -\frac{1}{\omega^2\eta^2} \cdot \frac{\eta J_1}{\varepsilon}. \tag{20}$$

Соотношение (19) приобретает вид

$$E_1 = \frac{\eta J_1}{\varepsilon} \left[-i\frac{1}{\omega\eta} + \frac{1 - e^{-i\omega\eta\sqrt{x}}}{\omega^2\eta^2\sqrt{x}}\right] \tag{21}$$

Интегрируя выражение (21) получается

$$\underline{U}_1(x) = \frac{\eta \underline{J}_1}{\varepsilon}\left(\frac{-ix}{\omega\eta} + \frac{2\sqrt{x}}{\omega^2\eta^2} - \frac{2i}{\omega^3\eta^3}\,\epsilon^{-i\omega\eta\sqrt{x}}\right) + D \tag{22}$$

Из условия $x = 0$, $\underline{U}_1 = 0$ следует, что

$$D = i\frac{\eta \underline{J}_1}{\varepsilon}\cdot\frac{2}{\omega^3\eta^3}. \tag{23}$$

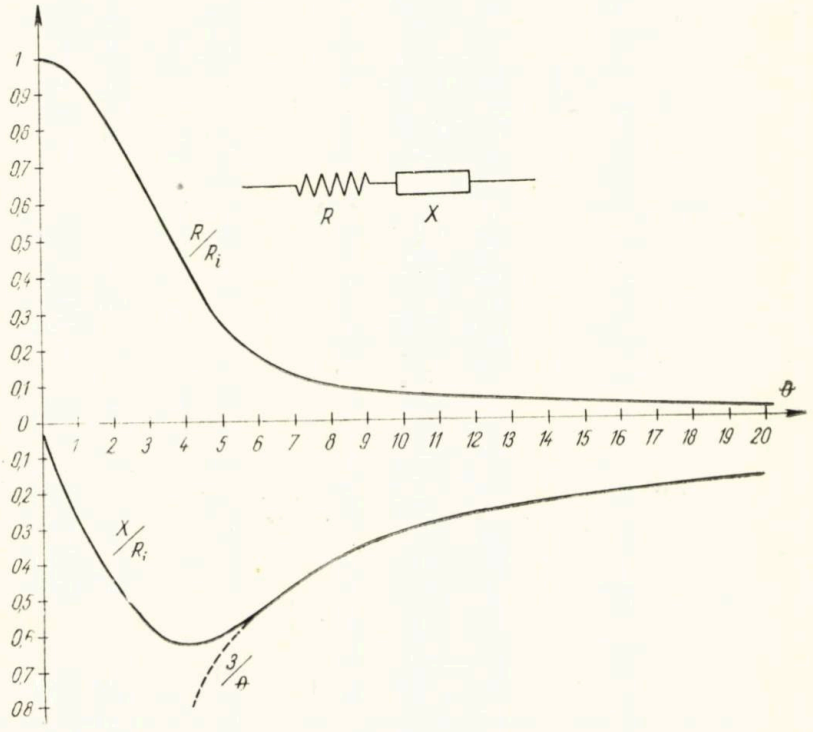


Рис. 2. Зависимость реальной и мнимой части полного сопротивления идеального диэлектрического диода от угла пролета

Тогда, для $x = d$

$$\underline{U}_a = R_i \underline{J}_1\left[-i\frac{3}{\Theta} + \frac{6}{\Theta^2} + i\frac{6}{\Theta^3}\,(1-\epsilon^{-i\Theta})\right] \tag{24}$$

где (приложение I)

$$R_i = \frac{\eta d^{3/2}}{3\varepsilon} \tag{25}$$

и (приложение II)

$$\Theta = \omega\eta\sqrt{d}\,. \tag{26}$$

Как показано в приложении II, Θ представляет собой угол пролета электронов. Следовательно, полное сопротивление диода имеет выражение

$$Z = R_i \left\{ \frac{6}{\Theta^2} \left(1 - \frac{\sin\Theta}{\Theta} \right) - i \frac{3}{\Theta} \left[1 - \frac{2}{\Theta^2} (1 - \cos\Theta) \right] \right\} \tag{27}$$

На рис. 2 изображены реальная и мнимая части полного сопротивления в зависимости от угла пролета

5. Случай низких частот

Для низких частот, $\Theta \to 0$. Тогда,

$$\frac{Z}{R_i} = \left[1 - \frac{\Theta^2}{20} + \ldots \right] - i \frac{\Theta}{4} \left[1 - \frac{\Theta^2}{120} + \ldots \right]. \tag{28}$$

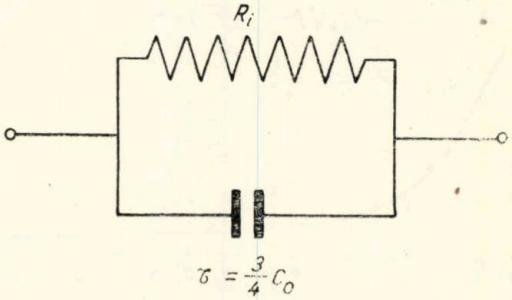


Рис. 3. Эквивалентная схема диэлектрического диода при низких частотах

Для $\Theta \ll 1$

$$Z = R_i \left[1 - i \frac{\Theta}{4} \right] \tag{29}$$

или

$$Y = \frac{1}{R_i} \cdot \frac{1}{1 - i \dfrac{\Theta}{4}} \simeq \frac{1}{R_i} \left(1 + i \frac{\Theta}{4} \right). \tag{30}$$

Этому выражению соответствует эквивалентная схема, изображенная на рис. 3, где емкость $\mathcal{C}$ имеет выражение

$$\mathcal{C} = \frac{\Theta}{4 R_i \omega} = \frac{\tau}{4 R_i}. \tag{31}$$

Поскольку (приложение III)

$$\frac{\tau}{R_i} = 3 C_0. \tag{32}$$

следует

$$\mathcal{C} = \frac{3}{4} C_0. \tag{33}$$

Величина C_0 есть геометрическая емкость структуры металл-диэлектрик-металл. Этот результат очень интересный.

Известно, что для вакуумного диода параллельная емкость при низких частотах есть $\mathcal{C}=\frac{3}{5}C_0$, где C_0 представляет собой геометрическую емкость. Пространственный заряд имеет тенденцию увеличивать емкость диода $\left(\text{стационарная емкость диода равна } \frac{4}{3}C_0\right)$, но вследствие инерции электронов появляется индуктивный эффект (даже при очень низких частотах), который уменьшает эквивалентную емкость.

Также для диэлектрического диода пространственный заряд имеет тенденцию увеличивать емкость диода. Стационарная емкость диэлектрического диода есть $\frac{3}{2}C_0$, потому что электрическое поле на аноде в присутствии пространственного заряда, согласно формуле (13), в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем в отсутствии этого заряда, но вследствие инерции электронов эквивалентная емкость представляет собой только $\frac{3}{4}$ геометрической емкости.

6. Случай высших частот

При высших частотах $(\omega\to\infty)$

$$\frac{Z}{R_i}=-i\frac{3}{\Theta}+\frac{6}{\Theta^2}+\ldots\simeq-i\frac{3}{\Theta}. \tag{34}$$

При высших частотах импеданс диода является чисто емкостным Емкость диода имеет выражение

$$\mathcal{C}'=\frac{3\omega}{\Theta R_i}=C_0. \tag{35}$$

Следовательно, емкость диода при высших частотах равна геометрической емкости. При высших частотах инерция электронов очень велика и электроны не могут следовать за изменениями электрического поля. Такой же результат получается и для вакуумного диода.

Приложение I

Из соотношений (16) и (19) следует, что

$$R_i=\frac{\eta d^{3/2}}{3\varepsilon}.$$

Приложение II

Из выражения

$$\frac{dx}{dt} = \mu E_0(x)$$

следует, что время пролета равно

$$\tau = \frac{1}{\mu} \int_0^d \frac{dx}{E_0(x)}.$$

Имея в виду выражение (12) для E_0, следует, что

$$\tau = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{J_0 \mu}} \sqrt{d}$$

то есть

$$\tau = \eta \sqrt{d}.$$

Тогда

$$\Theta = \omega \tau = \omega \eta \sqrt{d}$$

представляет собой угол пролета.

Приложение III

Поскольку геометрическая емкость диода имеет выражение

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0}{d}$$

следует, что

$$R_i C_0 = \frac{\eta d^{3/2}}{3\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{d} = \frac{\eta \sqrt{d}}{3} = \frac{\tau}{3}$$

и

$$3 R_i C_0 = \tau.$$

Catedra de tuburi electronice și tranzistori
Institutul politehnic „Gheorghe-Gheorghiu-Dej"
București

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. T. Wright:* Some properties and applications of space carge limited current in insulating crystals, Proceedings Inst. Electr. Eng., 1959, 106 B, Suppl. 17, Paper Nr. 2928.
2. *D. A. Bell:* Cadmium sulphyde crystals. Experimental diodes and triodes. Electronic Technology, 1962, 39, 3, 94—97.
3. *M. A. Lampert:* Injection currents in insulators. Proceedings I.R.E. 1962, 50, 8, 1781—1796.
4. *G. T. Wright:* Mechanisms of space charge limited currents in solids. Solid state electronics 1961, 2, 165—189.
5. *N. F. Mott, R. W. Gurney:* Electronic processes in ionic crystals. Oxford Clarendon Press, 1940.
6. *J. Shao, G. T. Wright:* Characteristics of the space charge limited diode at very high frequencies. Solid state electronics 1961, 3, 291—303.
7. *M. Drăgănescu, D. Dascălu:* A detailed equivalent scheme for the ideal dielectric diode, Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București. Nr. 5/1965.
8. *D Dascălu:* Efectul capcanelor asupra comportării diodei dielectrice în c.a. la semnale mici, comunicare Colocviul de fizica solidului, București, 20—22 nov. 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 4

C. Z : 621.311.1

RELAȚII PENTRU DETERMINAREA DIRECTĂ A ELEMENTELOR UNEI MATRICE PĂTRATICE DE ORDINUL DOI RIDICATĂ LA PUTEREA n ȘI APLICAREA LOR ÎN TEORIA REȚELELOR ELECTRICE LINEARE *

G. Rulea

1. *Introducere.* În cazul analizei rețelelor electrice lineare se cunosc elementele de circuit, rezistența R, inductanța L, capacitatea C din brațele rețelei, ca și tensiunile aplicate în diferite ochiuri ale rețelei și se pune problema să se determine curenții care parcurg fiecare braț, sau printr-o transformare simplă, curenții fiecărui ochi al rețelei.

În acest caz, ecuațiile ce caracterizează funcționarea rețelei se scriu sub forma :

$$\begin{aligned} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \ldots\ldots + Z_{1n} I_n &= U_1 \\ Z_{n1} I_1 + Z_{n2} I_2 + \ldots\ldots + Z_{nn} I_n &= U_n \end{aligned} \tag{1}$$

unde

$$Z_{jk} = Z(p) = pL_{jk} + \frac{1}{pC_{jk}} + R_{jk} \tag{2}$$

reprezintă impedanța operațională comună ochiurilor j și k, tensiunea $U_n(p)$ este transformata operațională a tensiunii $U_n(t)$ (fără sarcini sau curenți inițiali).

În cazul unor tensiuni sinusoidale $u_n(t) = U_n e^{j\omega t}$ se aplică calculul cu cantități complexe și impedanța devine :

$$Z_{jk} = j\omega L_{jk} + \frac{1}{j\omega C_{jk}} + R_{jk}. \tag{3}$$

În multe cazuri, rețelei i se aplică numai tensiunile U_1 și U_2 la două perechi de borne 1, 1′ și 2, 2′. Rețeaua electrică devine un cuadripol. Este

* Manuscris predat la redacție la 1 februarie 1965.

necesar să se calculeze curentul I_1 la intrarea cuadripolului și curentul I_2 la ieșirea cuadripolului. Din (1) rezultă aplicînd regula lui Kramer

$$I_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} U_k \tag{4}$$

unde Δ este determinantul general al sistemului (1), iar Δ_{jk} determinantul minor rezultat din Δ prin eliminarea liniei j și a coloanei k și deci în cazul cuadripolului:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 + \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_2 \\ I_2 &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Notînd

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = Y_{11}\ ; \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = Y_{12}\ ;$$

$$\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = Y_{21} \text{ și } \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = Y_{22}\ ;$$

sistemul (5) devine:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \end{aligned} \tag{6}$$

care se exprimă matriceal sub formă:

$$[I] = [Y]\,[U] \tag{7}$$

unde $[Y]$ este matricea pătratică:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ecuațiile cuadripolului se pot scrie exprimînd tensiunile în funcție de curenți, adică:

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \tag{9}$$

sau

$$[U] = [Z]\,[I] \tag{10}$$

unde este pusă în evidență matricea impedanță $[Z]$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dacă se exprimă mărimile de la intrare în funcție de cele de la ieșire se obține

$$\begin{aligned} U_1 &= A\,U_2 + B\,I_2 \\ I_1 &= C\,U_2 + D\,I_2 \end{aligned} \tag{12}$$

adică este pusă în evidență matricea transfer, sau matricea generală.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Este simplu de demonstrat (1), că matricea admitanță a mai multor cuadripoli conectați în paralel este egală cu suma matricelor admitanță a cuadripolilor

$$[Y] = \sum_1^n [Y_n]. \tag{14}$$

De asemenea, matricea impedanță a cuadripolilor conectați în serie este dată de suma matricelor impedanță proprii:

$$[Z] = \sum_1^n [Z_n]. \tag{15}$$

În sfîrșit, în cazul cuadripolilor montați în cascadă, matricea de transfer a ansamblului este dată de produsul matricelor de transfer proprii:

$$[A] = \prod_1^n [A_n]. \tag{16}$$

2. *Cuadripoli simetrici identici în cascadă*

De obicei, cuadripolii conectați în cascadă sînt diferiți. În unele cazuri, de exemplu în cazul structurilor periodice sau în cazul trecerii de la un sistem cu constante distribuite la un sistem cu constante concentrate, cuadripolii conectați în cascadă sînt identici.

În acest caz relația (16) devine:

$$[A] = [A_a]^n \tag{17}$$

unde $[A_a]$ este matricea transfer corespunzătoare cuadripolului de bază. Fie

$$[A_a] = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{11} \end{bmatrix} \tag{18}$$

în care s-a considerat cazul particular al unui cuadripol simetric ($a_{11} = a_{22}$). În cazul matricei $[A_a]$, $a_{21} \neq a_{12}$, chiar dacă cuadripolul este simetric. Se pune problema determinării elementelor matricei:

$$[A_a]^n = [A] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)}\, a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)}\, a_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{19}$$

pentru a se deduce structura cuadripolului global echivalent.

Se știe că n cuadripoli simetrici identici conectați în cascadă au aceeași impedanță caracteristică Z, iar constanta de transfer totală θ_t este de n ori constanta θ a unui cuadripol, ceea ce se exprimă prin relațiile cunoscute :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ch\theta & Zsh\theta \\ \frac{1}{Z} sh\theta & ch\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} ch\, n\theta & \frac{1}{Z} sh\, n\theta \\ \frac{1}{Z} shn\theta & ch n\theta \end{bmatrix} \tag{20}$$

ceea ce arată că formule clasice simple conduc ușor la rezultat.

Pentru generalizarea ulterioară este utilă ca etapă intermediară și deducerea directă.

Aplicînd regula înmulțirii matricelor obținem succesiv :

$$a_{11}^{(2)} = a_{11}^2 + a_{12}\, a_{21}$$

$$a_{12}^{(2)} = 2\, a_{11}\, a_{12}$$

$$a_{11}^{(3)} = a_{11}^3 + 3\, a_{11}\, a_{12}\, a_{21}$$

$$a_{12}^{(3)} = 3\, a_{11}^2\, a_{12} + a_{12}^2\, a_{21}$$

$$a_{11}^{(4)} = a_{11}^4 + 6\, a_{11}^2\, a_{12}\, a_{21} + a_{12}^2\, a_{21}^2$$

$$a_{12}^{(4)} = 4\, a_{11}^3\, a_{12} + 4\, a_{11}\, a_{12}^2\, a_{21}$$

$$a_{11}^{(5)} = a_{11}^5 + 10\, a_{11}^3\, a_{12}\, a_{21} + 5\, a_{11}\, a_{12}^2\, a_{21}^2$$

$$a_{12}^{(5)} = 5\, a_{11}^4\, a_{12} + 10\, a_{11}^2\, a_{12}^2\, a_{21} + a_{12}^3\, a_{21}^2$$

adică

$$a_{11}^{(n)} = C_n^0\, a_{11}^n + C_n^2\, a_{11}^{n-2}\, a_{12}\, a_{21} + C_n^4\, a_{11}^{n-4}\, a_{12}^2\, a_{21}^2 + \ldots \tag{21}$$

sau

$$\boxed{a_{11}^{(n)} = \sum_{p=0} C_n^{2p}\, a_{11}^{n-2p}\, a_{12}^p \cdot a_{21}^p = a_{22}^{(n)}} \tag{22}$$

Evident această relație rezultă și direct din (20). În adevăr

$$a_{11}^{(n)} = ch\, n\theta = \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, ch^{n-p}\theta\, sh^p\theta - (-1)^p \sum_{p=0}^{n} C_n^p \cdot ch^{n-p}\theta \cdot sh^p\theta\right] =$$

$$= \sum_{q=0}^{n} C_n^{2q}\; ch^{n-2q}\theta\, sh^q\theta$$

unde $ch\theta = a_{11}$ și $sh\,\theta = \sqrt{a_{12} \cdot a_{21}}$ și se deduce relația (22).

De asemenea se pot stabili relațiile pentru a_{12} și a_{21} sau formele binominale de mai jos care sînt deduse prin generalizarea operației de înmulțire a matricelor.

Relația (22) se mai poate pune și sub forma următoare:

$$a_{11}^{(n)} = (a_{11} + a_m)^n - \sum_{p=0} C_n^{2p+1} a^{n-(2p+1)} \cdot a_m^{2p+1} \tag{23}$$

unde

$$a_m = \sqrt{a_{12}\, a_{21}}\,. \tag{24}$$

Această formulă se stabilește grupînd termenii în (20) astfel încît în prima parte să se realizeze un binom la puterea n. Din (22) și (23) se deduce identitatea:

$$\sum_{p=0} C_n^{2p}\, a_{11}^{n-2p}\, a_m^{2p} = (a_{11} + a_m)^n - \sum_{p=0} C_n^{2p+1}\, a_{11}^{n-(2p+1)}\, a_m^{2p+1} \tag{25}$$

care se constată ușor că duce la cunoscuta dezvoltare a binomului lui Newton:

$$(a_{11} + a_m)^n = \sum_k C_n^k\, a_{11}^{n-k}\, a_m^k\,. \tag{26}$$

Din (25) și (26) rezultă că se poate scrie:

$$\sum_p C_n^p\, a_{11}^{n-p}\, a_m^p = \sum_{p=0} C_n^{2p}\, a_{11}^{n-2p}\, a_m^{2p} + \sum_{p=0} C_n^{2p+1}\, a^{n-(2p+1)}\, a_m^{2p+1} \tag{26a}$$

Pentru termenul $a_{12}^{(n)}$ se obține pe baza rezultatelor succesive din (20):

$$a_{12}^{(n)} = C_n^1\, a_{11}^{n-1}\, a_{12} + C_n^3\, a_{11}^{n-3}\, a_{12}^2\, a_{21} + C_n^5\, a_{12}^{n-2}\, a_{21}^2 + \ldots \tag{27}$$

adică:

$$a_{12}^{(n)} = \sum_{p=0} C_n^{2p+1}\, a_{11}^{n-(2p+1)}\, a_{12}^{p+1}\, a_{21}^p \tag{28}$$

3. *Forma binomială a termenului* $a_{11}^{(n)} = a_{22}^{(n)}$

Să utilizăm notația:

$$a_{11}^2 = x$$

$$a_{12}\, a_{21} = y = a_m^2 \tag{29}$$

și $m = \dfrac{n}{2}$ (evident pentru cazurile pare)

Relația (22) devine:

$$a_{11}^{(n)} = \sum_{p=0} C_{2m}^{2p}\, x^{m-p}\, y^p \tag{30}$$

adică

$$\boxed{a_{11}^{(n)} = (x+y)^m \quad C_{2m}^{2p}} \tag{31}$$

Cu alte cuvinte, dacă se iau ca mărimi de bază pătratul elementului a_{11}, $a_{11}^2 = x$ și pătratul mediei geometrice $\sqrt{a_{12}\,a_2}$, $(\sqrt{a_{12}\,a_{21}})^2 = y$ și se consideră jumătatea puterii la care se ridică matricea (evident în cazul puterii pare), atunci termenul $a_{11}^{(n)} = a_{22}^{(n)}$ se determină cu ajutorul dezvoltării binomului $(x+y)$ la puterea $m = \frac{n}{2}$, în care coeficienții se calculează cu ajutorul combinărilor cu indici dubli față de dezvoltarea binomială normală la puterea $m = \frac{n}{2}$.

Asemenea formă binomială ia, pentru (a_{11}) (4) de exemplu, forma:

$$a_{11}^{(4)} = \sum_{p=0} C_{2m}^{2p}\, x^{m-p} \cdot x^p = x^2 + 6xy + x^2 = a_{11}^4 + 6\,a_{11}^2\,a_{12}\,a_{21} + a_{12}^2\,a_{21}^2 \tag{32}$$

care evident coincide cu expresia termenului $a_{11}^{(4)}$ din (20)

În cazul n impar:

$$a_{11}^{(4)} = x^{1/2}\,(x+y)^m \quad C_n^{2p} \tag{33}$$

în care

$$m = \frac{n-1}{2}$$

iar C_n^{2p} dă coeficienții dezvoltării. De exmplu, în cazul $n = 5$:

$$a_{11}^{(5)} = x^{1/2}\,(x+y)^2 \quad C_5^{2p} \tag{34}$$

$$a_{11}^{(5)} = x^{1/2}\,(x^2 + C_5^2\,xy + C_5^4\,y^2) \tag{35}$$

$$a_{11}^{(5)} = a_{11}^5 + 10\,a_{11}^3\,a_{12}\,a_{21} + 5\,a_{12}\,a_{21}. \tag{36}$$

Ultima expresie coincide evident cu cea din (20)

4. *Stabilirea relațiilor directe de determinare a elementelor* $a_{11}^{(n)} = a_{22}^{(n)}$, $a_{12}^{(n)}$ și $a_{21}^{(n)}$ pe baza teoremei Hamilton-Cayley.

Teorema lui Hamilton-Cayley (orice matrice pătratică satisface ecuația ei caracteristică) (2), permite să deducem relațiile (22) și (28) stabilite anterior.

În cazul matricei pătratice de ordinul 2, în care $a_{11} = a_{22}$, ecuația caracteristică este:

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \Delta = 0 \tag{37}$$

unde $\alpha = 2a_{11}$, iar $\Delta = a_{11}^2 - a_{12}a_{21}$.

În cazul general, $\alpha = a_{11} + a_{22}$, iar $\Delta = a_{11}\ a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Matricele transfer $[A]$ au proprietatea

$$\Delta = 1. \tag{38}$$

Pentru generalitate se va considera Δ oarecare, particularizîndu-se cînd e cazul.

În baza teoremei de mai sus se scrie ținînd seama de

$$[A]^2 = \alpha[A] - \Delta[I] \tag{39}$$

și apoi

$$[A]^3 = \alpha[A]^2 - \Delta[I][A] \tag{40}$$

unde $[I]$ este matricea unitate.

Se obține succesiv:

$$\begin{aligned}
[A]^3 &= \alpha^2[A] - \Delta[I][A] - \alpha\Delta[I] \\
[A]^4 &= \alpha^3[A] - 2\alpha\Delta[I][A] - \alpha\Delta[I] + \Delta^2[I] \\
[A]^5 &= \alpha^4[A] - 3\alpha^2\Delta[I][A] + \Delta[I]^2[A] - \alpha^3\Delta[I] + 2\alpha\Delta^2[I] \\
[A]^6 &= \alpha^5[A] - 4\alpha^3\Delta[I][A] + 3\alpha\Delta[I]^2[A] - \alpha^4\Delta[I] + \\
&\quad + 3\alpha^2\Delta^2[I] - \Delta^3[I] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{41}$$

adică:

$$\begin{aligned}
[A]^n = &\sum_{p=0} (-1)^p C^p_{n-(p+1)}\ \alpha^{n-(2p+1)}\ \Delta^p[I][A] + \\
&+ \sum_{p=0} (-1)^{p+1} C^p_{n-(p+2)}\ \alpha^{n-(2p+2)}\ \Delta^{p+1}[I]
\end{aligned} \tag{42}$$

de unde se deduce:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(n)} = &\sum_{p=0} (-1)^p C^p_{n-(p+1)}\ 2^{n-(2p+1)} \cdot a_{11}^{n-2p} \cdot \Delta^p + \\
&+ \sum_{p=0} (-1)^{p+1} C_{n-(p+2)}\ 2^{n-(2p+2)} \cdot a_{11}^{n-(2p+)} \cdot \Delta^{p+1}
\end{aligned} \tag{43}$$

relație care se poate pune sub forma (22).

5. *Stabilirea relațiilor directe de determinare a elementelor matricei pătratice ridicate la puterea n, pe baza teoremei lui Sylvester.*

În baza teoremei lui Sylvester (3), se stabilește pentru matricea pătratică de ordinul doi relația:

$$[A]^n = \lambda_1^n \frac{[A]-\lambda_2[I]}{\lambda_1-\lambda_2} + \lambda_2^n \frac{[A]-\lambda_1[I]}{\lambda_2-\lambda_1} \tag{44}$$

unde λ_1 și λ_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_{11} + a_m = s \\ \lambda_2 &= a_{11} - a_m = d \end{aligned} \tag{45}$$

și:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2a_{11} \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \Delta = 1 \end{aligned} \tag{46}$$

Relația (44) devine utilizînd (45):

$$[A]^n = \frac{1}{2a_m}[(s^n - d^n)[A] - (s^n d - d^n s)[I]] \tag{47}$$

$$[A]^n = \frac{1}{2a_m}[(a_{11}+a_m)^n - (a_{11}-a_m)^n][A] - (a_{11}^2 - a_m^2)[(a_{11}+a_m)^{n-1} - (a_{11}-a_m)^{n-1}][I] \tag{48}$$

adică:

$$[A]^n = \sum_{p=0} C_n^{2p+1} a_{11}^{n-(2p+1)} a_m^{2p}[A] - (a_{11}^2 - a_m^2) \cdot \sum_{p=0} C_{n-1}^{2p+1} \cdot a_{11}^{n-(2p+1)} a_m^{2p}[I] \tag{49}$$

de unde:

$$a_{11}^{(n)} = \sum_{p=0} C_n^{2p+1} a_{11}^{n-2p} a_m^{2p} - \sum_{p=0} C_{n-1}^{2p+1} a_{11}^{n-2p} a_m^{2p} + \sum_{p=0} C_{n-1}^{2p+1} a_{11}^{n-(2p+2)} a_m^{2p+2} \tag{50}$$

care se pune sub forma (22).

Dacă se utilizează relația (38), se poate scrie (49) sub forma:

$$[A]^n = \sum_{p=0} C_n^{2p+1} a_{11}^{n-(2p+1)} a_m^{2p}[A] - \sum_{p=0} C_{n-1}^{2p+1} a_{11}^{n-(2p+2)} a_m^{2p}[I] \tag{49a}$$

care duce la:

$$a_{11}^{(n)} = \sum_{p=0} C_n^{2p+1} a_{11}^{n-2p} a_m^{2p} - \sum_{p=0} C_{n-1}^{2p+1} a_{11}^{n-(2p+2)} a_m^{2p} \tag{50a}$$

și apoi la (22).

6. *Cuadripoli nesimetrici identici în cascadă.*

În cazurile precedente s-au considerat cuadripolii simetrici ($a_{11} = a_{22}$) conectați în cascadă, analizîndu-se astfel un caz particular. În cazul general $a_{11} \neq a_{22}$ și deci din relația (19) se obțin succesiv termenii:

$$\begin{aligned}
&a_{11}^2 + a_{21}\, a_{12}\\
&(a_{11} + a_{22})\, a_{12}\\
&a_{11}^3 + (2\, a_{11} + a_{22})\, a_{11}\, a_{22}\\
&a_{12}\,(a_{11}^2 + a_{11}\, a_{22} + a_{22}^2) + a_{12}^2\, a_{21}\\
&a_{11}^4 + a_{12}\, a_{21}(3\, a_{11}^2 + 2\, a_{22}\, a_{11} + a_{22}^2) + a_{12}^2\, a_{21}^2\\
&a_{11}^3\, a_{12} + a_{12}^2\, a_{21}(2\, a_{11} + 2\, a_{22}) + a_{12}\, a_{22}\,(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{11}\, a_{22})
\end{aligned} \tag{51}$$

de unde se deduce:

$$\boxed{a_{11}^{(n)} = a_{11}^n \sum_{k=1} \sum_{p=0} (n-k-p)\, a_{11}^{n-2k-p}\, a_{22}^p \cdot a_{12}^k\, a_{21}^k} \tag{52}$$

iar pentru $a_{12}^{(n)}$ se stabilește formula de recurență:

$$a_{12}^{(n)} = a_{12}\, a_{11}^{(n-1)} + a_{12}^{(n-1)} \cdot a_{22} \tag{53}$$

din care se deduce:

$$a_{12}^{(n)} = \sum_{n=2} a_{22}^{n-1}\, a_{12} + a_{12} \sum_{n=2} a_{11}^{(n-1)} \tag{54}$$

de unde ținînd seama de (52) se obține:

$$a_{12}^{(n)} = \sum_{n=2} [a_{11}\, a_{22}^{n-1} + a_{12}\,(a_{11}^{n-1} + \sum_{k=1} \sum_{p=0} (n-1-k-p)\, a^{n-1-2k-p}$$

$$a_{22}^p \cdot a_{12}^k \cdot a_{21}^k)]. \tag{55}$$

Catedra de radiocomunicații
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Angot:* Compléments de mathématiques, Paris, 1957 ediția rusă, Moscova, Ed Nauka, 1964, p. 174 și p. 210—217.
2. *R. F. Gantmaher:* Teoria Matricelor — trad. din l. rusă, Acad. R.P.R., vol. I, pag. 123.
3. *E. R. Collin:* Field Theory of Guided Waves, Mc Graw Hill, New York, 1960, pag. 371—388 și pag. 572.

INTREPRINDEREA POLIGRAFICA „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 9454

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 JUN 1

F1130

REFERÁLVA

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII NUMĂRUL 5 ANUL 1965
SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE
1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. *I. S. Antoniu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici ;* Prof. Dr. *E. Bratu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli ;* Conf. *S. Călin,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu ;* Prof. *S. Gîdea ;* Conf. *I. Grădișteanu,* cand. Șt. Ec. ; Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. *Gh. Manea,* Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea ;* Prof. *N. Marinescu,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu ;* Prof. *C. Penescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. *Răduleț ;* Prof. *Al. Rău ;* Prof. *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. Dr. *R. Voinea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei Republicii Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

M. St. Botez, A. Tănăsescu
Uber die Newton'sche Perspektive 17

I. M. Miu
Asupra descompunerii în factori a polinoamelor diferențiale 29

Gh. D. Simionescu
Generalizări ale formulei mediei a lui Cauchy 39

FIZICA

C. Bereny, G. Teodorescu, M. Chimirel
Metodă pentru colectarea și determinarea spectrochimică a compoziției suspensiilor solide din atmosferă 45

ORGANE DE MAȘINI

Gh. Manea, M. R. Mustafa, M. Pascovici
Asupra temperaturii lagărelor radiale cu alunecare și efectul izolant al cuzineților din mase plastice 51

REZISTENȚA MATERIALELOR

V. Drobotă
Flambajul lateral simetric și antisimetric al grinzilor pendulare sub sarcini transversale 75

TERMOTEHNICA

N. Leonăchescu
Folosirea metodei imaginilor în calculul fluxului termic la conducte îngropate în sol și la canale de termoficare 91

MAȘINI TERMICE

N. Apostolescu
O metodă de calcul al arderii picăturii de combustibil în perioada arderii difuzive în motorul cu aprindere prin comprimare 107

ELECTROTEHNICA

N. Galan
Funcționarea motorului asincron cu rotor masiv la frecvență și tensiune variabilă 119

CENTRALE ELECTRICE

N. Dănilă, C. Haiduc
Détermination de la meilleure température de l'eau d'alimentation dans les centrales électronucléaires aux réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire 129

ELECTRONICA

M. Drăgănescu, D. Dascălu
A Detailed Equivalent Scheme for the Dielectric Diode at Small Signals. 145

Резюме

М. Шт. Ботез, А. Тэнэсеску Д. К. 517

Относительно ньютоновской перспективы.

Ньютоновской перспективой названо перспективное изображение линейного пространства, полученное из данной Б. Нивенгловским геометрической интерпретации использованному Ньютоном преобразованию для исследования ассимптот некоторых алгебраических кривых.

В настоящем сообщении в некоторой мере углубляется ньютоновская перспектива, причем выявляются отдельные свойства полученной таким образом эпюры и рассматриваются некоторые основные вопросы, как например: эпюра ньютоновской перспективы, определение предельной точки, координата, деление отрезка на равные части, прямая, перпендикулярная на плоскость, общая двум прямым падения перспектива, изменение точки опоры, ньютоновская перспектива на горизонтальном или юртикальном экране и преобразование эпюры Монжа в ньютоновскую перспективу.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

И. М. Миу Д. К. 517

О разложении множителей дифференциальных полиномов.

В работе рассматриваются дифференциальные полиномы. Определяются решения, соответствующие множителям первой степени дифференциации справа, когда степень множественности есть единица. Демонстрируется теорема: дифференциальное линейное уралнение с допущением множителя первой степени дифференцирования, со степенью множественности, большей единицы, с возможным исключением одного множителя, который имеет степень множественности, равную единице, может быть интегрировано путем квадратур.

Не обязательно, чтобы уравнение было представлено в форме произведения множителей.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Г. Д. Симионеску Д. К. 517

Обобщение средней формулы Кожи.

В работе обобщается средняя формула Кожи с помощью формулы, в которой отношение двух определений порядка $(n+1)$ равно отношению двух данных учитываемых функций.

Для $(n = 2)$ формула имеет интересное геометрическое толкование. Полученные результаты могут найти применение при расчете некоторых пределов.

Более широкое обобщение мы можем получить, если вместо двух функций учитывается $(n + 1)$ функций.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Summary

D.C. 517

M. St. Botez, A. Tănăsescu

About the Newtonian Perspective

It is designated as Newtonian perspective a perspective representation of ruled space obtained starting from the geometrical interpretation given by B. Niewenglopsky to a transformation used by Newton for the study of the asymptotes of some algebraic curves.

In the present paper the Newtonian perspective is deepened to a certain extent, placing in evidence certain features of the thus obtained epure and dealing with some basal problems as the Newtonian perspective, the determination of the point limit, the co-ordinate, the division of a se ment in equal parts, the straight line perpendicular to a plane, the common perspective of two-non-incident straight lines, the change of the bench-mark, the Newtonian perspective on horizontal or vertical tables and the transformation of an epure Monge into a Newtonian perspective.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

I. M. Miu D.C. 517

On the Factorization of the Differential Polynoms

This paper deals with differential polynoms. The solutions corresponding to the factors of the I order of differentiality from the right, when their multiplicity order is greater than one, are determined. The following theorem is demonstraled: a linear differential equation, admitting factors of the I order of linear differentiality with the multiplicity order greater than one, excepting eventually a factor that may have the multiplicity order 1, may be integrated by quadratures. It is not necessary to present the equation in the form of differential factor produce.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Gh. D. Simionescu D.C. 517

Generalizations of Cauchy's Mean Value Formula.

Cauchy's mean value formula is generalized by a formula in which the ratio of the two determinants of the order $(n+1)$th is equal to the ratio of the derivatives of the two considered functions. For $n=2$ the formula has an interesting geometrical interpretation. The obtained results are applied to the calculus of some limits. A more extensive generalization is obtained if instead of two functions, $(n+1)$ functions are considered.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 544.62 : 545.822 : 535.33

К. Бертени, Т. Теодореску, М. Кимирел

Методы собирания и спектрохимическое определение состава твердых примесей из атмосферы.

В работе дается краткое перечисление элементов, входящих в состав атмосферы, а также факторов, которые могут влиять на наличие или отсутствие некоторых из этих компонентов: описывается метод собирания пыли из атмосферы.

Затем описывается спектрохимический способ определения состава твердых примесей атмосферы и перечисляются полученные результаты.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 621.822.5:678

Г. Маня, М. Р. Мустафа, М. Пашкович

О температуре радиальных подшипников скольжения в состоянии теплового равновесия и изолирующий эффект вкладыша из палстмаесы.

Исследование термических процессов в подшипниках скольжения аналитическим путем наталкивается на особые математические трудности. Поэтому до последного времени температура шарикоподшипников в рабочем состоянии определяется с помощью уравнения термического равновесия. В результате сравнительного изучения существующих методов анализа основных параметров найден новый метод определения температуры подшипников.

Одновременно делаются выводы для сплошных вкладышей из палстмассы с учетом их изолирующего эффекта как с точки зрения передачи тепла, так и с точки зрения распределения температуры в смазывающей пленке.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

В. Дроботэ Д. К. 624.023.9 : 624.075.2/3

Боковой — симметричный и ассиметричный устоичивость маятниковых балок под воздействием поперечных нагрузок.

В работе выводится формула, которая определяет величину критических изгибных нагрузок для цельных балок с малой поперечной жесткостью, положенных на упоры, которые дают возможность поворачивать балку в любом направлении и на равных расстояниях.

Рассматриваются цельные балки с равномерно распределенной нагрузкой или с нагрузкой, расположенной в середнне каждого интервала.

Рассматриваются основные случаи симметричного и ассиметричного изгиба.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Н. Леонэкеску Д. К. 621.643.1 : 697.3

Использование метода изображения в вычислении термического потока в трубе, находящейся под землей и в теплофикационных каналах.

Работа рассматривает вопросы распространения тепла через землю в том случае, когда трубы монтируются сразу изолированно или неизолированно методом изображения Келвина. Рассматривается случай, когда отсутствует слой подземной воды, а также тот случай, когда существует этот слой — проблема, которая не рассматривается в специальной литературе (т.е. не рассматриваются практические соотношения для вычисления термического потока).

Метод изображения используется и для термофикационных каналов, сравниваются полученные результаты с выводами и результатами Шварца-Кристоффелж.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 544.62:545.822:535.33

C. Bereny, G. Teodorescu, M. Chimirel

A Method for the Collecting and for the Spectrochemical Determining of the Solid Suspension Composition in the Atmosphere.

After briefly mentioning the elements which form the atmospheric composition as well as the factors which may influence the presence or the absence of some of these components, the authors describe in this paper a method of collecting the atmospheric powder. Further, the spectrochemical method for determining the composition of the solid suspensions in the atmosphere is described and the obtained results are herein given.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 621.822.5:678

Gh. Manea, M. R. Mustafa, M. Pascovici

On the Temperature of Radial-Alide-Bearings in a State of Temperature Equilibrium and the Insulating Effect of the Bushings of Plastics.

The analytical pursuit of thermic processes in slidebearings meets particular mathematical difficulties, so that, up to now, the temperature of the bearings in stationary state is determined by means of the thermic equilibrium equation. As a result of a comparative study on some basical parameters, a new method of determining the bearing temperature is being worked out. At the same time conclusions are drawn for the bearing bushings of plastics, considering their insulating effect, regarding both the heat transfer and the temperature distribution over the lubricating film.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

V. Drobotă

D.C. 624.023.9:624.075.2/.3

The Asymmetrical and Symmetrical Lateral Buckling of the Pendulous Beams under Transversal Loads.

The contents of this paper establishes the formulas which point out the critical buckling load for the continuous beams of low transversal rigidity backed on supports and placed at equal distances between them and which permit the rotation of the beam in any direction. The continuous beam with a uniformly distributed load or with a concentrated load in the middle of each interval is dealt with. The most important cases of symmetrical and asymmetrical buckling are also shown.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Leonăchescu

D.C. 621.643.1:697.3

The Use of the Limage Method in the Thermic Flux Calculus in Undergroud Pipes and Heating-lighting Conduits.

The paper deals with the problem of the propagation of heat through the ground, when the conduits are directly set, insulated or not, by Kelvin's image method. Both the case when there isn't an underground water layer, and the case when thare is such a layer are studied. The author finding out practical calculus relations for the thermic flux. This problem is not to be found in the literature of speciality. The image method is as well applied te the heating and lighting canals. The obtained results are compared to the conclusions resulting from the transformation, according to Scwarz-Christoffel.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 621.431

Н. Апостолеску

Метод расчёта горения топливных капель во время дифузного горения в дизелях.

В работе развивается метод расчета закона горения топливных капель на основе сферической модели диффузного горения.

Физическая модель приспособлена соответственно периоду диффузного горения в дизели. Данный метод может быть интегрирован с помощью общего метода расчёта горения в моторе, который основан на реальных механизмах развертывания.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 621.313.333

Н. Галан

Работа асинхронного мо ора с массивным ротатором при переменной частоте и при переменном напряжении.

В этой работе изучается поведение асинхронного мотора при переменной частоте, при переменном напряжении и при соотношении $\frac{u}{j} = ct$. Были выявлены соотношения для общих случаев, а затем рассматривался каждый частный случай.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 621.311.25 : 621.039

Н. Дэнилэ, К. Хайдук

Определение оптимальной температуры питательной воды на атомных электростанциях с кипящим реактором и ядерным перегревом пара.

Устанавливается метод определения оптимальных температур питательной воды для атомных электростанций с кипящим реактором и ядерным перегревом пара.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Д. К. 621.385.2

М. Дрэгэнеску, Д. Даскэлу

Детальная эквивалентная схема для диэлектрического диода при малых сигналах.

Устанавливается эквивалентная схема для диэлектрического диода, содержащего две параллельные проводимости: одна — соответствующая полевому току, а другая — току перемещения.

Исследование этой схемы об'ясняет целую серию физических эффектов на диэлектрическом диоде.

Таким образом, выявляется индуктивный эффект в области низких частот, который об'ясняет почему емкость диэлектрического диода меньше, чем электорстатическая емкость, хотя между электродами диода накапливается дополнительная электрическая заряда.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 621.431

N. Apostolescu

Calculation Method of the Fuel Drop Combustion during the Diffusive Combustion in the Diesel Engine.

A method of calculation of the combustion of a fuel drop is developed in this paper, on the basis of a spherical model of diffusive combustion. The adopted physical model corresponds to the diffusive combustion period in the Diesel Engine. The method shown may be included into a general method of calculating the combustion in the motor, based on the actual displaying processes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 621.313.333

N. Galan

The Running of the Massive Rotor Induction Motor at Variable Frequency and Voltage.

This article is a study of the running of the asynchronous electric motor at variable frequency, variable voltage and $\frac{U}{f} = ct$ ratio. First were obtained the relations in the general cases, these being then studied for each separate case.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 621.311.25:621.039

N. Dănilă, C. Haiduc

Determination of Feed Water Temperature of Nuclear Power Stations with Boiling Water Reactors and Nuclear Superheating.

The authors establish the method of determining the optimum temperature of feed water in the case of nuclear power stations with boiling water reactors and nuclear superheating.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.C. 621.385.2

M. Drăgănescu, D. Dascălu

Detailed Equivalent Scheme for the Dielectric Diode at Low Frequencies.

An equivalent scheme is established for the dielectric diode, including two admittances in parallel, one corresponding to the field current and the other to the displacement current. Examining this scheme, a series of physical effects at the dielectric diode are explained. Thus, in the domain of low frequencies, is emphasized an inductive effect, explaining why the capacitance of the dielectric diode is smaller than the electrostatic capacitance, though a supplementary electric charge is stored between the diode electrodes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Résumé

M. St. Botez, A. Tănăsescu C.D. 517

Sur la perspective Newtonienne

On a dénommé perspective newtonienne une représentation perspective de l'espace réglé obtenue en partant de l'interprétation géométrique donnée par B. Niewenglovsky à une transformation utilisée par Newton pour l'étude des asymptotes de certaines courbes algébriques.

Dans cette communication on aprofondit dans une certaine mesure la perspective newtonienne, mettant en évidence certaines propriétés de l'épure ainsi obtenue et traitant quelques problèmes fondamentaux, comme l'épure de la perspective newtonienne, la détermination du point limite, la coordonnée, la division d'un segment en parties égales, la droite perpendiculaire sur un plan, la perspective de deux droites non incidentes, le changement du repère, la perspective newtonienne sur un tableau horizontal ou vertical et la transformation d'une épure de Monge dans une perspective newtonienne.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

I. M. Miu C.D. 517

Sur la décomposition en facteurs des polynômes différentiels

On traite dans cet auvrage des polynômes différentiels. On détermine les solutions correspondant aux facteurs du premier ordre de différention de droite, lorsque leur ordre de multiplicité est > 1. On démontre le théorème : une equation différentielle linéaire qui admet des facteurs du premier ordre de différenciabilité à l'ordre de multiplicité plus grand que 1, à l'exception éventuellement d'un facteur qui puisse avoir l'ordre de multiplicité un, peut être résolue par des quadratures.

Il n'est pas nécessaire que l'équation soit mise sous forme de produit de facteurs différentiels.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Gh. D. Simionescu C.D. 517

Généralisations de la formule moyenne de Cauchy

On généralise la formule moyenne de Cauchy par une formule où le rapport des deux déterminants de l'ordre $(n+1)$ est égal ou rapport des dérivées d'ordre n des deux fonctions considérées. Pour $n=2$ la formule a une interprétation géomètrique interessante. Les résultats trouvés ont des applications dans le calcul de quelques limites. Une généralisation plus large est obtenue si au lieu de considérer deux fonctions l'on considére $(n+1)$ fonctions.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Zusammenfassung

M. St. Botez, A. Tănăsescu D.K. 517

Über die Newton'sche Perspektive

Eine perspectivische Darstellung des schraffierten Raumes, der erhalten wurde, ausgehend von der geometrischen Interpretierung, welche B. Niewenglovschi einer von Newton angewandten Umwandlung zum Studium der Asymptoten algebraischer Kurven gegeben wurde, wurde Newton'sche Perspektive benannt.

In der vorliegenden Mitteilung wird die Newton'sche Perspektive in gewissem Masse vertieft durch Hervorheben einiger Eigenschaften, der auf diese Weise erhaltenen Skizze und durch Behandlung einiger Grundprobleme, wie der Skizze der Newton'schen Perspektive, der Bestimmung des Endpunktes, der Koordonate, der Teilung eines Segments in gleiche Teile, der auf eine Ebene senkrechten Geraden, der gemeinsamen Perspektive von zwei zueinander windschiefen Geraden, der Aenderung des Bezugspunktes, der Newton'schen Perspektive auf horizontaler oder vertikaler Tafel und der Umwandlung einer Skizze Monge in eine Newton'sche Perspektive.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

I. Miu D.K. 517

Über die Zerlegung der differentialen Polynome in Faktoren.

In dieser Arbeit werden die differentialen Polynome behandelt. Es werden die entsprechenden Lösungen der Faktoren ersten Differentialgrades von rechts bestimmt, wenn ihr Vielheitsgrad 1 ist. Es wird folgendes Theorem bewiesen: Eine liniäre Differentialgleichung, die zwei Faktoren ersten Differentialgrades mit einem Vielheitsgrad, der grösser als 1 ist, zulässt, mit Ausnahme des Faktors der den Vieheitsgrad 1 besitzt, kann durch Quadraturen integriert werden.

Es ist nicht nötig, die Gleichung in Form eines Produkts der Differentialfaktoren aufzustellen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

Gh. D. Simionescu D.K. 517

Verallgemeinerungen der Formel des Mittels von Cauchy.

Es wird die Formel des Mittels von Cauchy durch eine Formel verallgemeinert, in welcher das Verhältnis zweier Determinanten der Ordnung $(n+1)$, gleich ist mit dem Verhältnis der Ableitungen der beiden betrachteten Funktionen. Für $n=2$, hat die Formel eine interessante geometrische Auslegung. Die erhaltenen Ergebnisse finden bei Begrenzungsberechungen Anwendung.

Eine breitere Verallgemeinerung erhält man, wenn an Stelle von zwei Funktionen, $(n+1)$ Funktionen angenommen werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

C.D. 544.62:545.822:535.33

C. Bereny, G. Teodorescu, M. Chimirel

Méthode pour collecter et déterminer d'une manière spectrochimique la composition des suspensions solides de l'atmosphère.

Dans l'ouvrege présent après avoir rappelé en raccourci les éléments qui entrent dans la composition atmosphérique, de même que les facteurs qui peuvent influencer la présence ou l'absence de quelques uns de ces facteurs, on décrit une méthode de collecter les poussières de l'atmosphère. En continuant on décrit la méthode spectrochimique pour la détermination de la composition des suspensions solides de l'atmosphère et on donne les résultats obtenus.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

C.D. 621.822.5 : 678

Gh. Manea, M. R. Mustafa, M. Pascovici.

Sur la température des paliers glissants à l'état d'equilibre thermique et l'effet isolant des coussinets en mathière plastique.

En considérant les difficultés, du point de vue mathématique de l'investigation des procès thermiques dans les paliers glissants, on détermine généralement la température des paliers à l'état de régime, à l'aide de l'éguation d'équilibre thermique. A la suite d'une étude comparative de quelque méthodes existantes, on analyse les parametres de base et on établie une nouvelle méthode graphoanalytique de déterminer la température des paliers.

En considerant l'effet isolant des mathières plastiques, on tire en même temps, des conclusions valables pour les coussinets en polyamide, en ce qui concerne le transfer de chaleur et la distribution de la température dans la pélicule de lubréfiant.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

V. Drobotă C.D. 624.023.9:624.075.2/.3

Le flambage latéral symétrique et antisymétrique des poutres pendulaires sous des fardeaux transversaux.

On établit dans cet article les formules qui donnent la valeur du fardeau critique de flambage pour les poutres continuntes de rigidité transversale réduite soutenues par des appuis qui permettent le roulement de la poutre dans toute direction, assises à distances égales entre elles. On traite des poutres continues chargées d'un fardeau uniformément réparti ou un fardeau concentré au milieu de chacun des intervalles. On y traite les cas les plus importants de flambage symétrique et asymétrique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Leonăchescu C.D. 621.643.1:697.3

Emploi de la méthode des images dans le calcul du flux thermique dans les conduites enfouies dans le sol et dans les canaux de thermofication.

L'ouvrage traite du problème de la propagation de la chaleur par la terre au cas où les conduites se montent directement, isolément ou non, par la méthode des images de Kelvin. On étudie tout aussi bien le cas où il n'y a pas de couche souterraine ainsi que le cas où cette couche existe, problème qui manque dans la littérature de spécialité, en trouvant les relations pratiques de calcul pour le flux thermique. La méthode des images est aussi appliquée dans les canaux de thermofication, en comparant les résultats obtenus avec les conclusions résultantes de la transformation conforme Schwarz-Christoffel.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.K. 544.62:545.822:535.33

C. Bereny, G. Teodorescu, M. Chimirel

Methode zur Sammlung und spektralchemischen Bestimmung der Zusammensetzung der soliden Suspensionen aus der Atmosphäre

In der Arbeit, nachdem kurz auf die Elemente hingewiesen wird, die an der Zusammensetzung der Atmosphäre teilnehmen, wie auch auf die Faktoren, welche die Anwesenheit oder Abwesenheit einiger dieser Komponenten beeinflussen können, wird eine Methode zur Sammlung der Pulver aus der Atmosphäre beschrieben. Weiterhin wird die spektralchemische Methode zur Bestimmung der Zusammensetzung der soliden Suspensionen aus der Atmosphäre beschrieben und es werden die erzielten Ergebnisse angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

D.K. 621.822.5:678

Gh. Manea, M. R. Mustafa, M. Pascovici

Über die Temperatur der Querlager im thermischen Gleichgewichtszustand und die Wärmeisolierwirkung der Plastmasse-Büchsen.

Die Verfolgung der Wärmeprozesse im Lager auf analytischem Wege bereitet, wie bekannt, erhebliche Schwierigkiten sodass, im allgemeinen, für die rechnerische Bestimmung der Lagertemperatur in einer oder anderer Form, die Gleichung des thermischen Gleichgewichts verwendet wird.

Im Anschluss an vergleichende Untersuchung einiger vorhandener Berechnungsmethoden und einiger Grundaparametern, wird ein neues Verfahren für die Bestimmung der Lagertemperatur gegeben.

Gleichzeiting werden für Plastmasse-Büchsen geltende, Schlüsse, betreffend die isolierende Wirkung, den Wärmedurchfluss sowie die Temperaturverteilung in Oelfilm, gezogen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

V. Drobotă D.K. 624023.9:075.2/3

Die seitliche symmetrische und antisymmetrische Knickung der Pendelträger unter schrägen (transversalen) Lasten.

Im Rahmen dieses Artikels werden die Formeln festgesetzt, welche den Wert der kritischen Knickungslast für die durchlaufenden Träger mit kleiner transversalen Starrheit die auf Stützen aufgelegt sind, welche die Drehung des Trägers nach jeder Richtung gestatten und in gleichen Abständen voneinander aufgestellt sind, bestimmen.

Es werden die mit einer gleichmässig verteilten oder mit je einer im Mittelpunkt jedes Intervalls konzentrierten Last belasteten durchlaufenden Träger, behandelt. Es werden die wichtigsten Fälle der symmetrischen und antisymmetrischen Knickung behandelt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Leonăchescu D.K. 621.643.1:697.3

Die Anwendung der Bildermethode zur Berechnung des Wärmestromes bei in den Boden eingegrabenen Leitungen und Thermofizierungskanälen.

Die Arbeit behandelt das Problem der Wärmeausbreitung durch die Erde, im Falle der direkt isoliert oder unisoliert, montierten Leitungen, durch die Kelvin'sche Bildermethode. Es wird sowohl der Fall bei Abhandensein wie auch bei Vorhandensein einer unterirdischen Wasserschicht studiert, was in der Fachliteratur fehlt und es werden die prakitschen Beziehungen zur Berechnung des thermischen Stromes (Nährmestromes) gefunden.

Die Bildermethode wird auch bei Thermofizierungskanälen angewendet und es werden die erhaltenen Ergebnisse mit den sich aus der Transformierung nach Schwarz Christoffel ergebenden Resultaten verglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Apostolescu C.D. 621.431

Une méthode de calcul de la combustion de la goutte de combustible pendant la période de la combustion diffusive dans le moteur à allumage par compression.

Dans l'ouvrage on présent une méthode de calcul de la loi de la combustion de la goutte de combustible sur la base d'un modèle sphérique de la combustion diffusive dans le moteur à allumage par compression. La méthode présentée peut être intégrée dans une méthode générale de calcul de la combustion dans le moteur, basée sur les mécanismes réels de déroulement.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Galan C.D. 621.313.333

Fonctionnement du moteur asynchronique à roteur massif sous fréquence et tension variable.

Dans cet article on étudie le comportement du moteur asynchrone à la frequence variable, à la tension variable et quand le rapport $\frac{U}{f} = ct.$ On obtient premièrement les relations dans le cas général, en faisant des particularisation pour chaque cas pris à part.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Dănilă, C. Haiduc C.D. 621.311.25:621.039

Détermination de la meilleure température de l'eau d'alimentation dans les centrales électronucléaires aux réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire.

On établit la méthode technique-économique pour déterminer la meilleure température de l'eau d'alimentation dans les centrales électronucléaires aux réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

M. Drăgănescu, D. Dascălu C.D. 621.385.2

Un schéma équivalent de détail pour la diode diélectrique aux petits signaux.

On établit un schéma équivalent pour la diode électrique comprenant deux admittances parallèles l'une correspondant au courant de champ et l'autre au courant de déplacement. Par l'examen de ce schéma on explique une série d'effets physiques dans la diode diélectrique. C'est ainsi qu'on met en évidence dans le domaine des basses fréquences un effet inductif qui explique pourquoi la capacité de la diode électrique est moindre que la capacité électrostatique quoique entre les électrons de la dyode une charge électrique supplimentaire s'accumule.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Apostolescu D.K. 621.431

Eine Berechnungsmethode der Verbrennung des Brennstofftropfens während der Streuverbrennung im Dieselmotor.

In der Arbeit wird eine Berechnungsmethode des Gesetzes des Brennstofftropfens auf Grund eines Kugelmodells der Streuverbrennung, entwickelt.

Das angenommene physische Modell entspricht der Streuverbrennungsperiode im Dieselmotor.

Die dargelegte Methode kann in eine allgemeine Berechnungsmethode eingeordnet werden, die sich auf die realen Entfaltungsmechanismen stützt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Galan D.K. 621.313.333

Das Funktionieren des asynkronen Motors mit massivem Rotor bei veränderlicher Frequenz und Spannung.

In diesem Beitrag wird das Verhalten des Asynkronmotors, bei veränderlicher Frequenz, bei veränderlicher Spannung und bei $\frac{U}{f} = ct$ erläutert. Es wurden zunächst die Gleichungen im allgemeinen Fall, und nachher die Gleichungen für einzelne Sonderfälle gefunden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

N. Dănilă, C. Haiduc D.K. 621.311.25:621.039

Die Bestimmung der günstigsten Temperatur des Speisewassers bei Kernkraftwerken mit Siedewasserreaktor und Kernüberhitzung.

Es wird die Methode der Bestimmung der günstigsten Temperatur des Speisewassers für Kernkraftwerke mit Siedewasserreaktor und Kernüberhitzung, festgesetzt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

M. Drăgănescu, D. Dascălu D.K. 621.385.2

Ein Ersatzschema der für die dielektrische Diode bei Kleinsignalen.

Es wird ein Ersatzschema für die dielektrische Diode, die zwei Parallel-Admitanzen enthält, festgesetzt: eines das dem Feldstrom und das andere das dem Wanderungsstrom entspricht. Die Untersuchung dieses Schemas erläutert eine Reihe von physischen Wirkungen an der elektrischen Diode. So wird im Bereich der niederen Frequenzen ein induktiver Effet hervorgehoben, welcher erklärt warum die Kapazität der elektrischen Diode kleiner ist als die elektrostatische Kapazität, obgleich sich zwischen den Elektroden der Diode eine zusätzliche elektrische Ladung anhäuft.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 5/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

MATEMATICĂ

C.Z. : 517

ÜBER DIE NEWTON'SCHE PERSPEKTIVE *

MIHAIL ȘT. BOTEZ, AURELIAN TĂNĂSESCU

In der Mitteilung bei der wissenschaftlichen Tagung des Polytechnischen Instituts Cluj haben die Professoren Mihail Botez und Th. Albu [1], ausgehend von der geometrischen Auslegung B. Niewenglowschis [2] einer von Newton benutzten Umwandlung zum Studium der Asymptoten einer algebraischen Kurve, eine ebene Darstellung des schraffierten Raumes gefunden, welche sie Newton'sche Perspektive benannten, da das benutzte System dieselbe Variante hat wie die gewöhnliche Perspektive.

Einige Benennungen, wie zum Beispiel Punkt und Fluchtlinie haben nicht denselben Sinn, wie der in der klassischen Perspektive verwendete.

Die Grundebenen π und π^* sind parallel — verbinden sich auf diese Weise mit dem Projektionssystem [3] mit dem Dieder Null — das Projektionszentrum Ω nimmt eine beliebige Lage im Raum ein unter Anschluss der Fälle von Einbeziehung in eine der beiden Ebenen.

Im Folgenden beabsichtigen wir, die Newton'sche Perspektive einigermassen zu vertiefen, indem wir einige Eigenschaften der erhaltenen Skizze hervorheben und einige Grundprobleme behandeln.

1. Skizze der Newton'schen Perspektive.

Die Skizze der Newton'schen Perspektive ist durch zwei Angaben bestimmt: μ (Modul) und R Halbmesser des Distanzkreises. Zwecks Vereinfachung kann die Gleichung $R = k\mu$ des Verhältnisses benützt werden.

Eine Gerade D ist durch ihre Spur $u = D \cap \pi$ und ihre zentrale Projektion φ des Punktes $\varphi^* = D \cap \pi^*$ gegeben, welcher Fluchtpunkt genannt wurde, wobei für die zentrale Projektion des Punktes von ∞ der Geraden die Benennung Endpunkt beibehalten wurde, welche in der homographischen Umwandlung benützt wird.

Ein Punkt ist durch das Bild einer mit dem Punkt zusammenfallenden Garaden gegeben. Wenn (φu) die Perspektive der Geraden D ist, dann ist die Perspektive eines Punktes $M \in D$ ein Punkt $m \in (\varphi u)$.

* Mitteilung, vorgetragen bei der wissenschaftlichen Tagung der Lehrkader des Instituts für Architektur „Ion Mincu" Bukarest, 17—18 April 1964.

a) *Bestimmung des Endpunktes.* Es sei $(\varphi\, u)$ die Perspektive der Geraden D (*Abb. 1*). Um den Endpunkt zu finden, bemerken wir, dass $\varphi\omega$ die orthogonale Projektion der Projezierenden des Punktes $\varphi^* = D \bigcap \pi^*$ ist. Durch Umlegen der Projektierungsebene dieser Geraden erhalten wir $\varphi\omega_0$, auf welcher wir mit Hilfe des Moduls μ (Entfernung zwischen π und

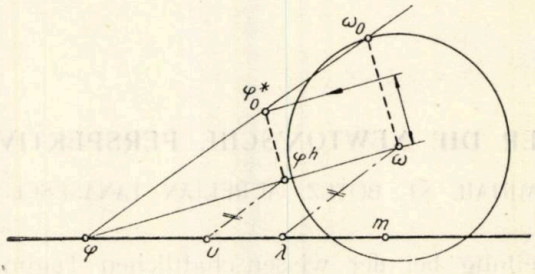


Abb. 1.

π^*), $\varphi_0^* \in \varphi\,\omega_0$ und nachher φ^h errichten, welche die orthogonale Projektion des Punktes φ^* ist. Der Endpunkt λ ist selbstverständlich der Schnitt zwischen $\omega\lambda \parallel u\,\varphi^h$ mit $(\varphi\, u)$.

b) *Koordonaten.* Da $(\varphi\ u)$ die homographische Umwandlung der gegebenen Geraden D ist, aber das unharmonische Verhältnis absolut unveränderlich der Umwandlung ist, bestimmen wir einen beliebigen Punkt M der Geraden durch die projektiven Koordonaten seiner Perspektive, indem wir das Verhältnis $K = (\varphi\, u\, \lambda\, m)$ betrachten, wobei φ, u und λ die Grundpunkte sind. Für φ, u und λ entsprechen dem K die Werte: ∞, 0 und 1.

c) Zwei einfallende Gerade haben im Allgemeinen ihre zusammenlaufenden Perspektiven. Wenn aber ihre Schnittpunkte mit der Ebene π^* kolinear mit $\omega^* = \pi^* \bigcap \Omega\omega$ sind, dann sind auch ihre Fluchtpunkte φ_1 und φ_2 kolinear mit ω, wobei ihre Perspektiven parallel sind.

Zwei parallele Gerade haben verschiedene Fluchtpunkte und denselben Endpunkt.

Zwei parallele Ebene haben verschiedene und parallele Fluchtlinien.

d) *Teilung eines Segments in gleiche Teile* (Abb. 2).

Es sei $\overline{ab}$ die Perspektive eines Segments $\overline{AB}$, welches der Geraden D $(\varphi\ u)$ gehört. Um die Perspektive seiner Mitte zu erhalten, errichten wir die harmonische Konjugierte im Verhältnis a und b des Endpunktes λ, welcher die zentrale Projektion des uneigentlichen Punktes der Geraden D ist.

Aus diesem Grunde bestimmen wir λ, wobei wir von b aus zwei beliebige Gerade führen, die wir in α und β mit einer ebenfalls beliebigen Geraden, von λ aus geführt, schneiden. Durch Vereinigung von a mit α und a mit β erhalten wir das vollständige Viereck $\alpha\beta\gamma\delta ab$ dessen *Diagonale* $\delta\gamma \bigcap ab = q$ ist, welcher der gesuchte Punkt ist.

2. Eigenschaften der Senkrechten.

a) Damit eine Gerade senkrecht auf der Ebene π der Tafel sein soll, ist erforderlich und ausreichend, dass der Fluchtpunkt φ und die Spur u kolinear mit dem Pol ω der Skizze sein sollen.

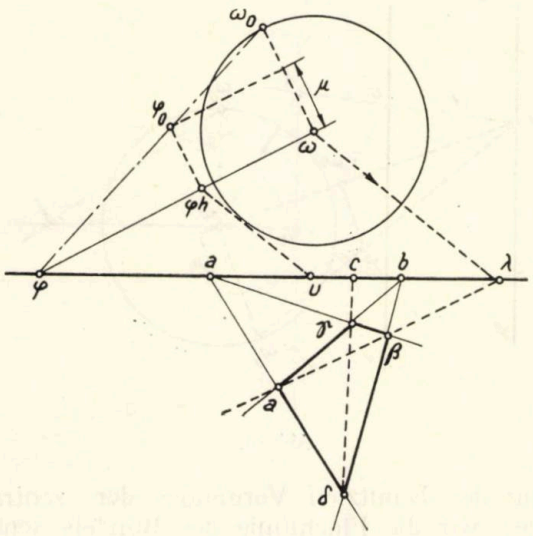


Abb. 2.

b) Damit eine Ebene $[P]$ senkrecht auf der Ebene π sein soll ist erforderlich und ausreichend, dass sie eine Anzahl Gerade enthalten soll, deren Perspektiven ein Bündel mit der Unterlage ω bilden.

c) *Auf die Ebene senkrechte Gerade* (Abb. 3).

Es sei $P\ [\Phi\ U]$ eine gegebene Ebene durch die Spur U und durch die Perspektive Φ des Schnittes mit π^*. Wenn durch das Zentrum eine Ebene $P_1 \parallel P$ und eine senkrechte Gerade auf diese geführt werden, dann ist der Endpunkt dieser Geraden allen auf die Ebene P senkrechten Geraden gemeinsam. Auf diese Weise erhalten wir durch Beifügung eines senkrechten Halbmessers jeder Ebene, welche durch Ω geht, eine Polarität in Stern ohne vereinigte Elemente, deren Schnitt mit π ebenfalls eine Polarität ohne vereinigte Elemente ist. Daraus folgt die Konstruktion:

Es sei d die Perspektive einer Geraden $D \in P$ mit $\varphi \in \Phi$ und $u \in U$. Wir bestimmen deren Endpunkt λ mit Hilfe der Umlegung des Halbmessers welcher den Punkt $\varphi^* = D \cap \pi^*$ projiziert, der uns die orthogonale Projektion φ^h dieses Punktes gibt, indem $\omega\lambda \parallel \varphi^h u$ geführt und $\lambda = \omega\lambda \cap d$ erhalten wird. Die Endgerade der Ebene P, die die Spur der durch Ω geführten Ebene P_1 ist, ist auf diese Weise $\lambda\lambda' \parallel \Phi$.

Von ω aus wird der Durchmesser $\omega\alpha \perp \lambda\lambda'$ und der Halbmesser des Distanzkreises $\omega\omega_0 \perp \omega\alpha$ geführt.

Die Senkrechte in ω_0 auf $\alpha\omega_0$ schneidet $\alpha\omega$ in I, welcher der gesuchte Endpunkt ist. Die Perspektiven der auf die gegebene Ebene senkrechten Geraden bilden ein Bündel von Geraden, deren Stützpunkt I ist.

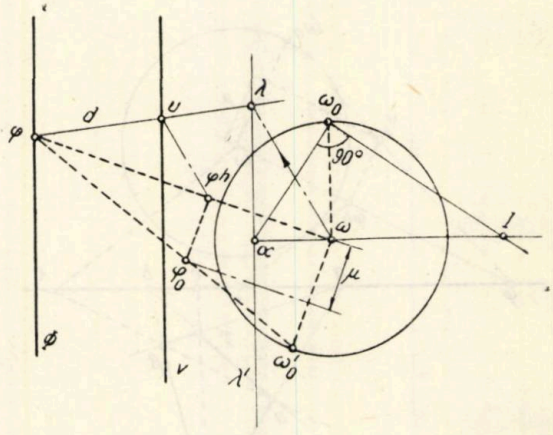


Abb. 3.

In Verfolgung des benützten Vorganges der zentralen Projektion, bemerken wir, dass wir die Fluchtlinie des Bündels senkrechter Ebenen auf diejenigen Geraden, deren Perspektive I als Endpunkt haben, finden können. Wir errichten die Gegenpolare im Verhältnis zum Distanzkreis dieses Punktes.

d) *Gemeinsame Perspektiven von zwei windschiefen Geraden* (Abb. 4)

Es seien d und d_1 die Perspektiven zweir nicht zusammenfallender Geraden, deren Endpunkte λ und λ_1 bekannt sind. Das Problem ist auf diese Weise auf eine Skizze in zentraler Projektion reduziert. Durch Verbindung von λ mit λ_1 erhält man die Endgerade der mit der gegebenen Geraden parallelen Ebenen. Der Punkt I der gesuchten Geraden ist der Schnitt der Gegenpolaren der Punkte λ und λ_1, und in Folge dessen der Gegenpol der Geraden $\lambda\lambda_1$. Die Spur u' der gesuchten Geraden ist der Schnitt durch u und u_1 zu $\lambda I'$ und $\lambda_1 I'$ geführten Parallelen.

3. **Änderung des Bezugspunktes.**

a) Es seien $\mu = \pi^* \vdash \pi$ der Modul und ω die orthogonale Projektion auf die Bildebene (Abb. 5) des Projektionszentrums Ω.

Wenn π^* zu sich selbst parallel ist, dann durchläuft φ die Perspektive der Geraden, weil die Projektanten der Schnittpunkte zwischen der Geraden D und den Ebenen $\pi_i^* \parallel \pi^*$ gemeinsam eben sind.

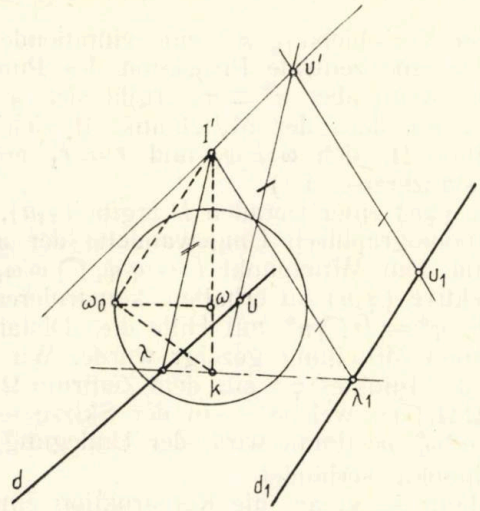


Abb. 4.

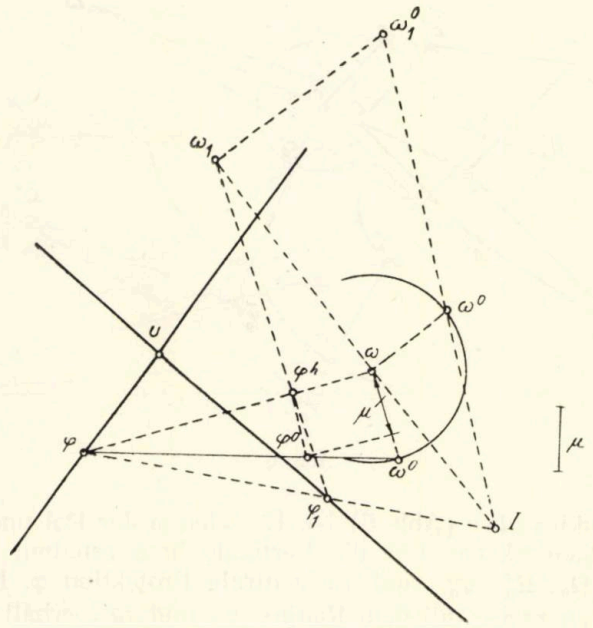


Abb. 5.

Wenn bei dieser Verschiebung π^* eine einfallende Lage auf Ω hat, dann wird φ, welche eine zentrale Projektion des Punktes $\varphi^* = \pi^* \cap D$ auf ∞ geschleudert; wenn aber $\pi^* \equiv \pi$, ergibt sich $\varphi \equiv u$.

b) Nehmen wir an, dass der Mittelpunkt Ω sich derart verschiebt, dass für eine Position Ω_1 sich $\omega \neq \omega_1$ und $r \neq r_1$ ergibt (wobei r der Halbmesser des Distanzkreises ist).

Die Perspektive (φu) einer Geraden D ergibt $(\varphi_1 u)$, wobei jene beiden Perspektiven eine homographisch Umgewandelte der anderen mit vereinigtem Punkt u und dem Mittelpunkt $I = \varphi\,\varphi_1 \cap \omega\,\omega_1$ sind.

Um die Perspektive $(\varphi_1 u)$ zu erhalten, konstruieren wir die orthogonale φ^h des Punktes $\varphi^* = D \cap \pi^*$ mit Hilfe des Distanzkreises (ω), wie dies in der erwähnten Mitteilung gezeigt wurde. Wir nehmen $r_1 > r$ an. Um die Projektion des Punktes φ^* aus dem Zentrum Ω_1 zu erhalten, konstruieren wir $I = \Omega\,\Omega_1 \cap \pi$, welche — in der Skizze — mittels Schnittes zwischen $\omega\omega_1$ mit $\omega^0\,\omega_1^0$ bestimmt wird, der Umlegung der Linie, welche diese beiden Mittelpunkte verbindet.

Das Problem läuft somit auf die Konstruktion einer der Projetionen hinaus, sobald die andere und die orthogonale Projektion eines Punktes bekannt sind, in einem bizentralen bekannten Projektionssystem [4].

Wir bemerken, dass, im Falle einer Veränderung des Mittelpunktes Ω, die Perspektiven derselben Geraden ein Bündel von Geraden in der Ebene π, deren Stützpunkt u ist, erzeugen.

c) *Die Newton'sche Perspektive auf einer horizontalen Tafel.* Betrachten wir das Parallelepiped, dessen orthogonale Projektion auf die Ebene

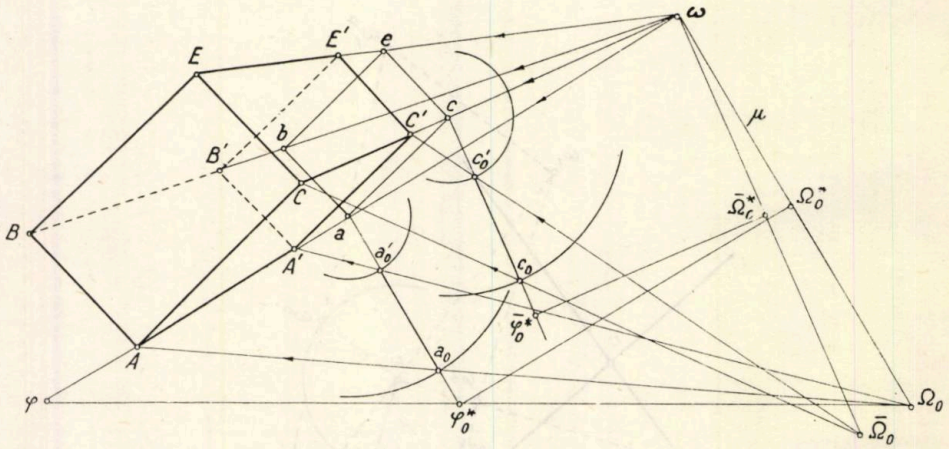


Abb. 6.

des Bezugspunktes *abce* (Abb. 6) ist. Es seien ω der Pol und μ der Modul der Newton'schen Skizze. Für die Vertikale in a erhalten wir sofort die Umlegungen Ω_0, Ω_0^*, φ_0^* und die zentrale Projektion φ. Durch Verwendung der Distanzkreise mit dem Radius aa_0 und aa'_0, erhält man die Newton'schen Perspektiven A und A'.

Zwecks Bestimmung der Newton'schen Perspektiven des Punktes C könnten wir Ω_0 und die Distanzkreise cc_0 und cc_0' verwenden.

Diese Konstruktion ist jedoch nicht notwendig, da wir C dadurch bestimmen können, dass $AC \parallel ac$ und daher $C = AC \cap \omega c$ ist.

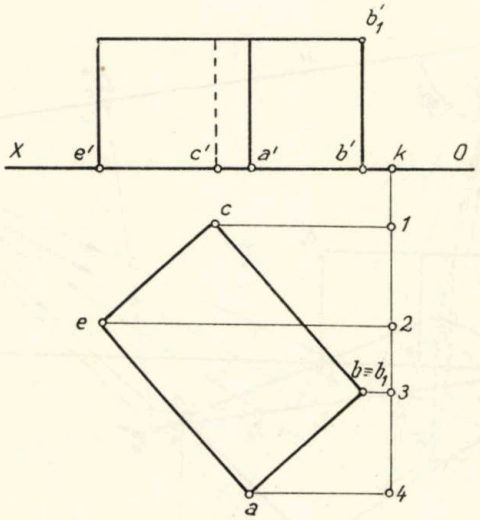


Abb. 7.

Es ist die Feststellung der Ähnlichkeit, die zwischen dem Aspekt dieser Perspektive und der ab- oder aufwärtsführenden Perspektive auf einer schiefen Tafel besteht, besonders, da in diesem Beispiel die Umgewandelte durch Gleichstellung (Homothetic) der Figur (der Konstruktionsebene) *abce* benützt wurde.

d) *Die Newton'sche Perspektive auf einer vertikalen Tafel,* Betrachten wir das Parallelepiped der Abb. 7, dargestellt in doppelter Projektion Monge. Wir haben auf einer Hauptgeraden k vom Ausmass Null, willkürlich gelegt, die Entfernungen 1, 2, 3 und 4 der verschiedenen Punkte hervor.

Es seien ω der Pol und μ der Modul der Newton'schen Skizze (Abb. 8). Wie im vorangegangenen Beispiel folgt unter diesen Bedingungen sofort Ω, Ω_0^*, φ_0^* und φ, wenn wir $\omega e'$ benützen, wobei $e' \equiv u$. Die Teilungen, welche die Entfernungen der Ebenenpunkte gegenüber Ox bezeichnen, können wir willkürlich auf das Segment $u\varphi_0^*$ in Abhängigkeit von den Auswirkungen der gesuchten Perspektive verlegen.

Diese Punkte 1_0, 2_0, 3_0 und 4_0, vom Mittelpunkt Ω_0 aus projiziert, ergeben die Tiefen $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ und $\overline{4}$ der Ebenenpunkte. Durch die Perspektiven der horizontalen Frontlinien durch diese Punkte erhalten wir vorerst die Perspective *abce* der Ebene und nachfolgend des Volumens. Beispielsweise $\overline{b}_1 = \overline{bb}_1 \cap \overline{b}_1' \omega$.

e) *Umwandlung einer Perspektive Monge in eine Newton'sche Perspektive.* Das in Punkt *c* behandelte Beispiel führte uns gerade zur Beziehung, die zwischen der Skizze Monge und einer Newton'schen Perspektive besteht. Es ist von Nutzen hervorzuheben, dass wir in Abb. 8 wohl die

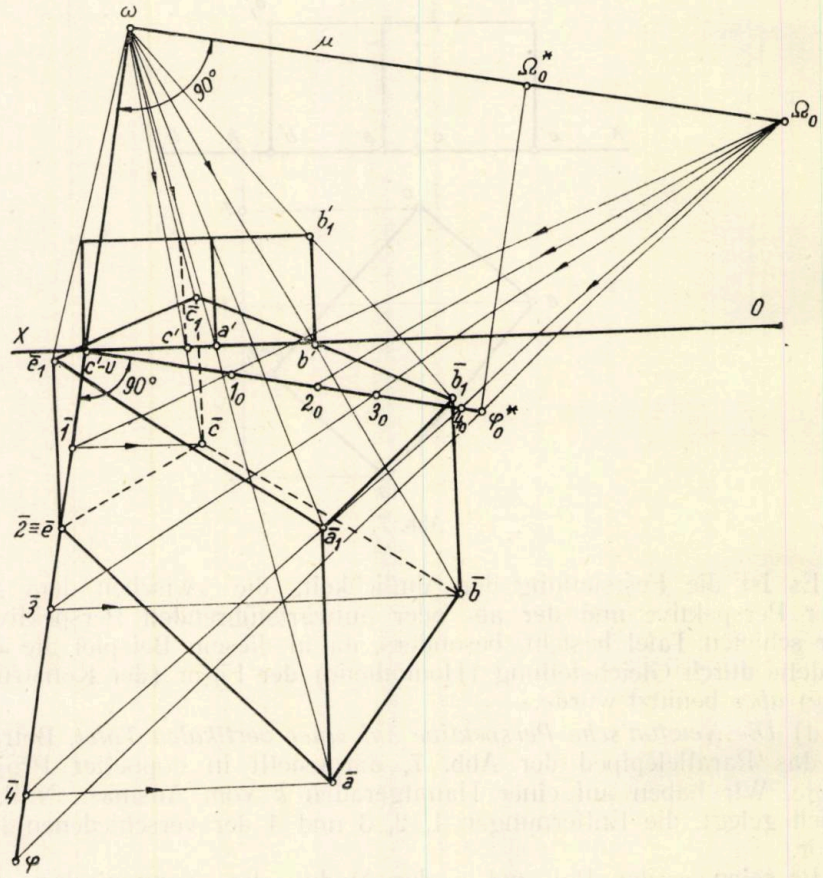


Abb. 8.

Tiefen der Punkte der Ebene benützt haben und dadurch die Darstellung der Ebene auf der Tafel unterlassen konnten, jedoch durch Verwendung der vertikalen Projektion des gegebenen Volumes.

In der Skizze Abb. 9 haben wir die Newton'sche Skizze desselben Volumens wie in Abb. 7 dargestellt, indem wir genau dieselben Bedingungen der Skizze des Planes wählten, d.h. $k \equiv u \equiv e'$.

Unter diesen Bedingungen erscheint das Segment $u1_0$ kleiner und die Perspektive selbst erscheint nicht verstärkt.

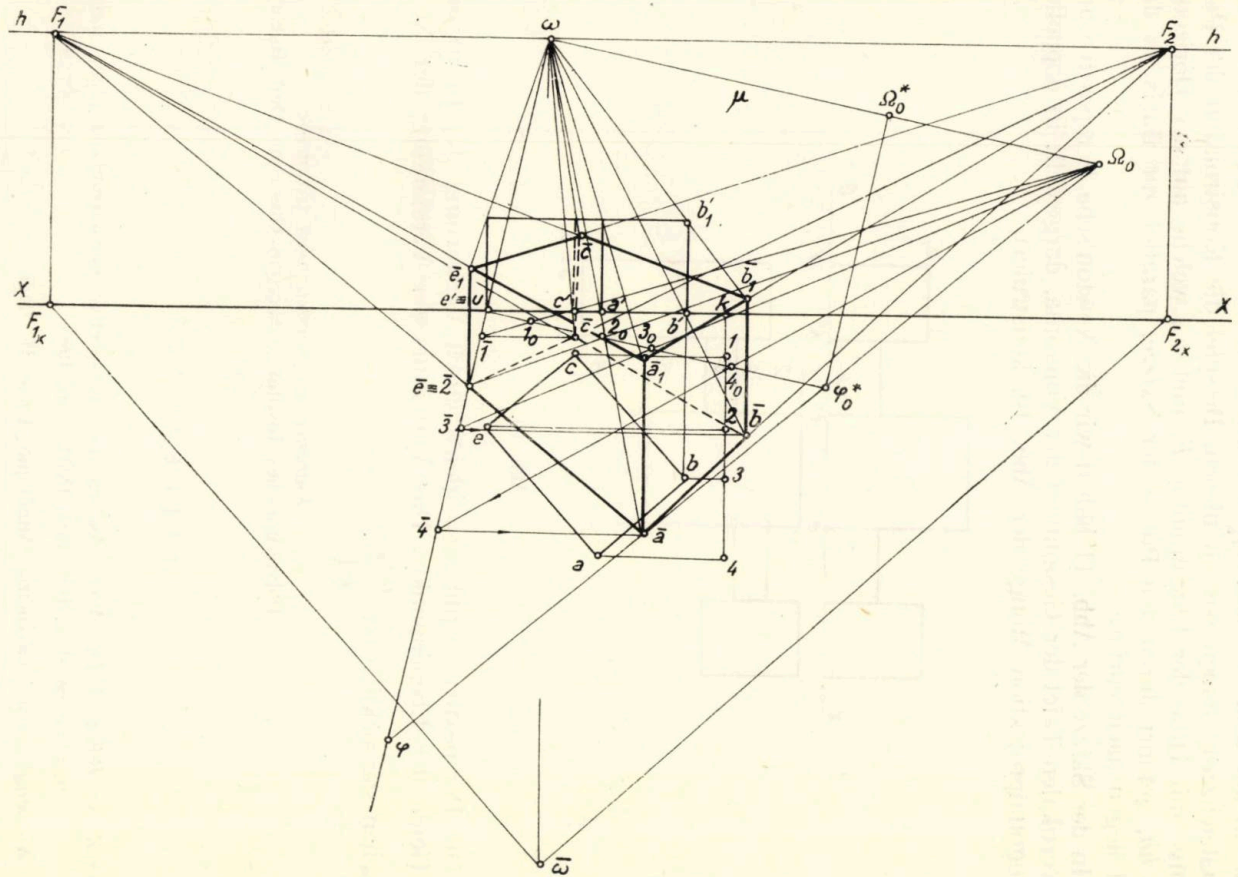

h
F_1
ω
F_2
h
μ
Ω_0^*
Ω_0
b_1'
$\bar{e}_1$
$\bar{c}$
$\bar{b}_1$
X
$e' \equiv u$
c'
a'
$\bar{c}$
2_0
3_0
b'
k
X
F_{1x}
1_0
$\bar{1}$
1
F_{2x}
$\bar{e} \equiv \bar{2}$
c
$\bar{a}_1$
4_0
φ_0^*
$\bar{3}$
e
2
$\bar{b}$
b
3
$\bar{4}$
$\bar{a}$
a
4
φ
$\bar{\omega}$

Abb. 9.

Somit wird die Verstärkungskonstante der Newton'schen Perspektive durch ein auf dem Segment $u\varphi_0^*$ definierten Verhältnis ausgedrückt.

Gleichzeitig haben wir an diesem Beispiel die Konstruktion der Perspektive mit Hilfe der Fluchtpunkte F_1 und F_2, welche auf der Horizontlinie hh, geführt durch den Pol ω der Skizze, parallel zur Basis xx der Tafel liegen nachgeprüft.

In der Skizze der Abb. 11 haben wir die Newton'sche Perspektive auf der vertikalen Tafel der Gesamtheit der Volumina, dargestellt in doppelter Orthogonalprojektion Monge der Abb. 10, konstruiert.

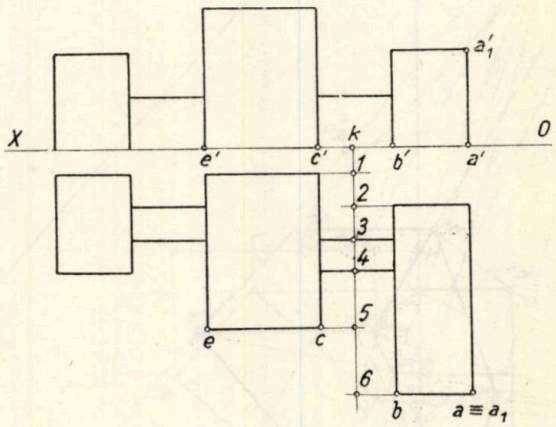


Abb. 10.

Die Perspektive ergibt sich gleich durch Verwertung der Front und der Tiefen der Ebenenpunkte. Das Verhältnis der Verstärkung der Newton'schen Perspektive ist $\frac{u1_0}{k1}$.

Katheder der darstellenden Geometrie
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest

LITERATUR

1. *Mihail Şt. Botez* şi *Th. Albu:* Asupra unei perspective newtoniene cu plane fundamentale paralele, Bul. Inst. Polit. Cluj, 1963.

2. *B. Niewenglowschi:* Géométrie Analitique Tome II 1895.

3. *Mihail Şt. Botez:* Sur une nouvelle manière de réprésenter l'espace liniaire, Bul. Inst. Polit. Buc. XXIII, Fasc. 3. 1961.

4. *Mihail Şt. Botez:* Sur la projection bicentrale. Bul. Ec. polit. Timişoara 1934.

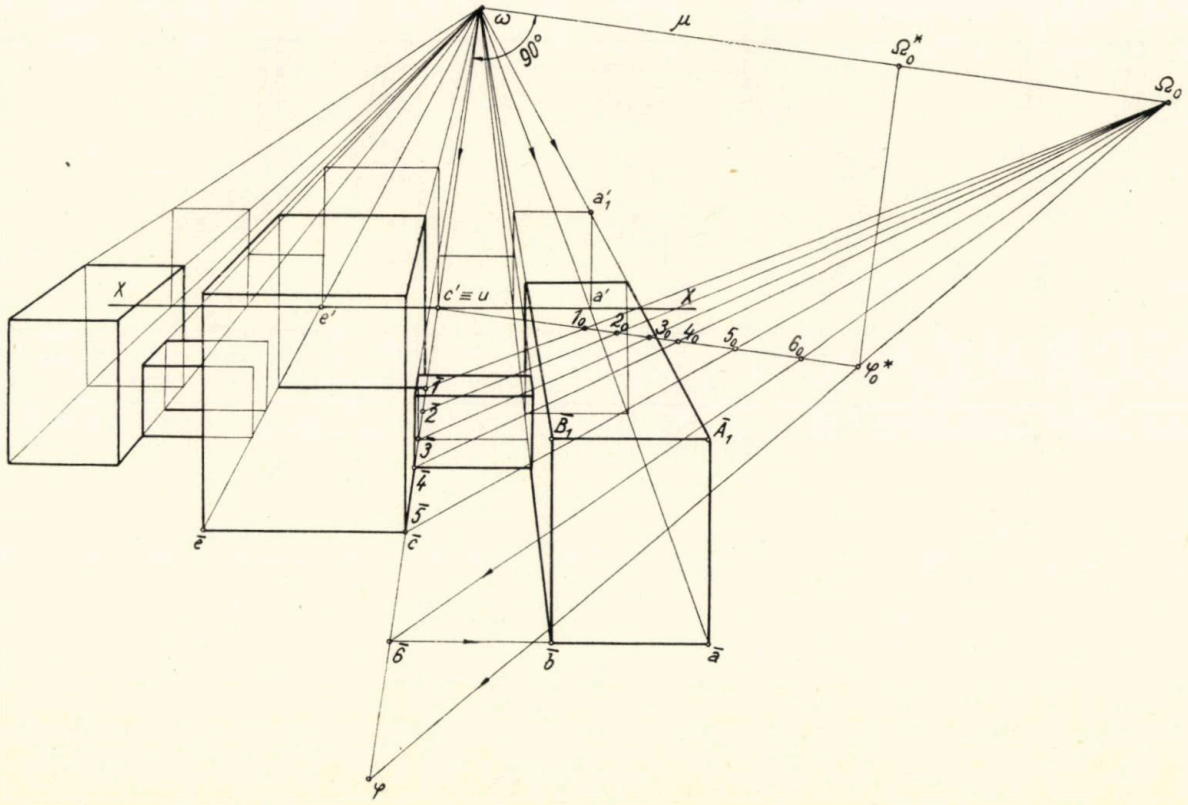
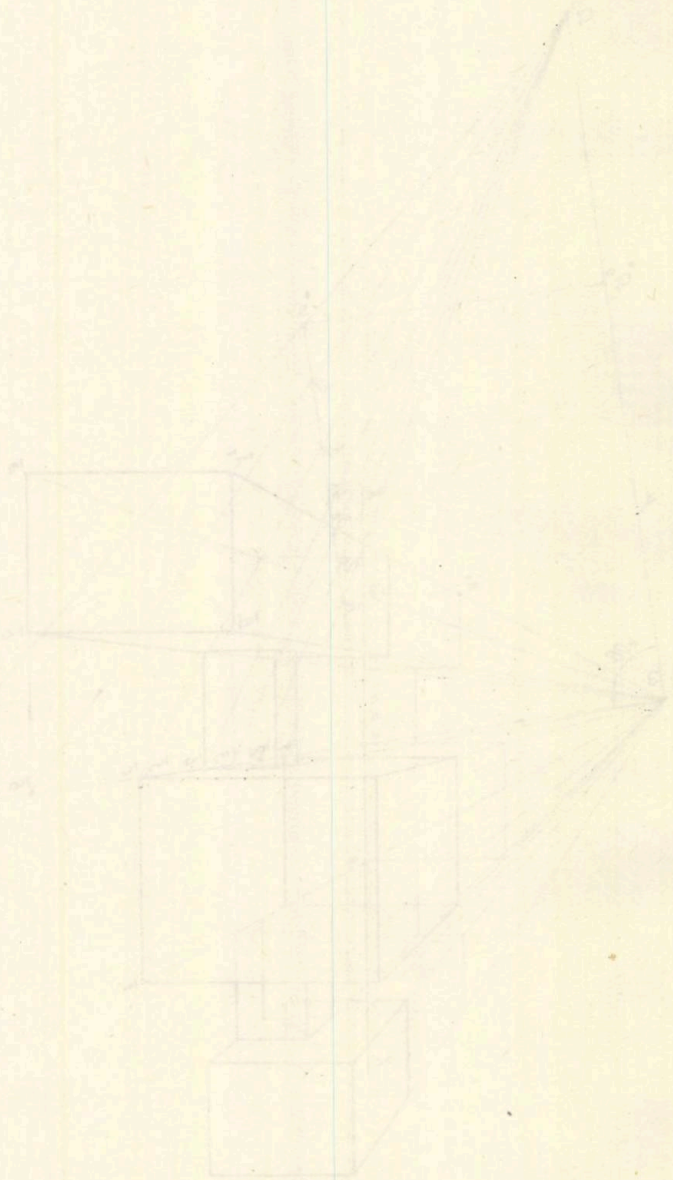

ω
90°
μ
Ω_0^*
Ω_0
a_1'
X
$c' \equiv u$
a'
X
1_0
2_0
3_0
4_0
5_0
6_0
φ_0^*
c'
1
2
3
4
5
$\bar{B}_1$
$\bar{A}_1$
$\bar{c}$
$\bar{c}$
$\bar{6}$
$\bar{b}$
$\bar{a}$
φ

Abb. 11.



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

C.Z. : 517

ASUPRA DESCOMPUNERII ÎN FACTORI A POLINOAMELOR DIFERENȚIALE *

I. M. MIU

În [1], prof. acad. Miron Nicolescu se ocupă de polinoamele diferențiale, introducînd derivata acestora și integrează ecuațiile diferențiale, în cazul cînd ele admit factori diferențiali de ordinul întîi cu ordinul de multiplicitate al tuturor acestor factori > 1.

În cele ce urmează vom arăta cîteva reguli de derivare ale polinoamelor diferențiale, vom extinde integrarea ecuațiilor diferențiale lineare în cazul cînd ele admit factori diferențiali de ordinul întîi cu ordinul de multiplicitate al tuturor acestor factori > 1.

Vom da apoi o teoremă în care vom arăta că o ecuație diferențială liniară se poate integra prin cuadraturi în cazul cînd polinomul său diferențial are toți factorii diferențiali de ordinul întîi cu ordine de multiplicitate > 1 cu excepția cel mult a unui factor, care poate avea ordinul de multiplicitate egal cu 1.

§ 1. Derivarea unui produs de factori diferențiali

Fie ecuația diferențială

$$P(D)\,y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

cu coeficienții a_k funcții continue pe un interval I și fie polinomul său diferențial :

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D^1 + a_n D^0 \qquad (2)$$

unde $D^k = \dfrac{d^k}{dx^k}$.

În [1] s-a introdus sub formă simbolică noțiunea de derivată a polinomului diferențial $P(D)$ astfel :

$$P'(D) = n D^{n-1} + (n-1)\, a_1 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D^0.$$

*) Manuscris predat la redacție la 29 martie 1965.

Putem stabili următoarea

Teoremă: Un produs de polinoame diferențiale în număr finit, se derivează după aceeași regulă ca și un produs de funcții derivabile, cu condiția de a nu schimba ordinea factorilor în produse:

$$[P_1(D)\,P_2(D)\ldots P_j(D)]' = P_1'(D)\,P_2(D)\ldots P_j(D) +$$
$$+ P_1(D)\,P_2'(D)\,P_3(D)\ldots P_j(D) + \ldots P_1(D)\,P_2(D)\ldots P_{j-1}(D)\,P_j'(D).$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm teorema pentru un produs de două polinoame diferențiale:

$$[P(D)\,Q(D)]' = P'(D)\,Q(D) + P(D)\,Q'(D).$$

Însă pentru a demonstra aceasta este deajuns să demonstrăm:

$$[D^p(b\,D^q)]' = p\,D^{p-1}(b\,D^q) + q\,D^p(b\,D^{q-1})$$

Avem:

$$D^p(b\,D^q) = b^{(p)}D^q + C_p^1\,b^{(p-1)}D^{q+1} + \ldots + C_p^s\,b^{(p-s)}D^{q+s} + \ldots + C_p^p\,bD^{q+p}.$$

Trebuie să dovedim identitatea:

$$pD^{p-1}(bD^q) + qD^p(bD^{q-1}) \equiv qb^{(p)}D^{q-1} + (q+1)\,C_p^1\,b^{(p-1)}D^q + \ldots$$
$$\ldots + (q+s)\,C_p^s\,b^{(p-s)}D^{q+s-1} + \ldots + (q+p)\,C_p^p\,bD^{2+p-1}.$$

Desvoltînd membrul I, trebuie să avem:

$$p[b^{(p-1)}D^q + C_{p-1}^1\,b^{(p-2)}D^{q+1} + \ldots + C_{p-1}^{s-1}\,b^{(p-s)}D^{q+s-1} + \ldots + C_{p-1}^{p-1}\,bD^{q+p-1}] +$$
$$+ q[b^{(p)}D^{q-1} + C_p^1\,b^{(p-1)}D^q + \ldots + C_p^s\,b^{(p-s)}D^{q+s-1} + \ldots + C_p^p\,bD^{q+p-1}] \equiv$$
$$\equiv qb^{(p)}D^{q-1} + (q+1)\,C_p^1\,b^{(p-1)}D^q + \ldots + (q+s)\,C_p^s\,b^{(p-s)}D^{q+s-1} + \ldots$$
$$\ldots + (q+p)\,C_p^p\,bD^{q+p-1}.$$

Identitatea rezultă observînd că coeficienții acelorași operatori D^j din membru I și II sînt egali. Avem:

$$qb^{(p)} = qb^{(p)}$$
$$(p + qC_p^1)\,b^{(p-1)} = (q+1)\,C_p^1\,b^{(p-1)}$$
$$(pC_{p-1}^1 + qC_p^2)\,b^{(p-2)} = (q+2)\,C_p^2\,b^{(p-2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(pC_{p-1}^{s-1} + qC_p^s)\,b^{(p-s)} = (q+s)\,C_p^s\,b^{(p-s)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(pC_{p-1}^{p-1} + qC_p^p)\,b = (q+p)\,C_p^p\,b.$$

Cum aceste egalități sînt evidente, teorema este demonstrată.

§ 2. Formula lui Taylor pentru polinoame diferențiale

1° *Polinoame diferențiale ordinare*

Pentru membrul I al unei ecuații diferențiale lineare, utilizînd polinomul diferențial, se poate scrie o formulă analoagă formulei lui Taylor de la polinoame astfel:

$$P(D)\,zy = \left[z\,P(D) + \frac{z'}{1!}P'(D) + \frac{z''}{2!}P''(D) + \ldots + \frac{z^{(n)}}{n!}P^{(n)}(D)\right] y \qquad (3)$$

sau:

$$P(D)\,zy = \left[y\,P(D) + \frac{y'}{1!}P'(D) + \frac{y''}{2!}P''(D) + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!}P^{(n)}(D)\right] z \qquad (4)$$

Dacă facem în (4), $z = 1$ obținem:

$$P(D)\,y = \left[y\,P(D) + \frac{y'}{1!}P'(D) + \frac{y''}{2!}P''(D) + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!}P^{(n)}(D)\right] 1. \qquad (5)$$

Polinoamele diferențiale $P(D)$, $P^1(D)$,.. $P^{(n)}(D)$ din paranteze se aplică în (3) lui y, în (4) lui z și în (5) lui 1.

Formula (5) este analoagă cu formula lui Mac-Laurin pentru polinoame.

2° *Polinoame cu derivate parțiale*

Fie polinomul cu derivate parțiale:

$$P(D_x, D_y) = \Sigma a_{ij(x,y)} D_x^i D_y^j,$$

unde s-a notat simbolic

$$D_x^i D_y^j = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j},$$

astfel încît $D_x^i D_y^j u = \dfrac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}$, $D_x^0 D_y^j = D_y^j$,

$$D_x^i D_j^0 = D_x^i, \quad D_x^0 D_y^0 u = u.$$

introducem derivarea simbolică astfel:

$$\frac{\partial^r}{\partial D_x^r}(D_x^i D_y^j) = i(i-1)\ldots(i-r+1) D_x^{i-r} D_y^j, \quad r \leqslant i$$

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial D_x^r \partial D_y^s}(D_x^i D_y^j) = i(i-1)\ldots(i-r+1)\,j\,(j+1)\ldots$$

$$\ldots(j-s+1) D_x^{i-r} D^{j-s} \quad r \leqslant i,\ s \leqslant j.$$

iar

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial D_x^i \partial D_y^j}(D_x^i D_y^j) = i!\ j!\ D_x^0 D_y^0.$$

Să considerăm ecuația liniară cu derivate parțiale

$$P(D_x, D_y)\, w = 0. \tag{6}$$

Formula lui Taylor referitoare la polinomul cu derivate parțiale din membrul I al ecuației (6) este:

$$P(D_x, D_y)(uv) = \Big\{ uP(D_x, D_y) + \frac{1}{1!}[u'_x P'_{D_x}(D_x, D_y) + u'_y P'_{D_y}(D_x, D_y)] +$$

$$+ \frac{1}{2!}[u''_{x^2} P''_{D_x^2}(D_x, D_y) + 2u''_{xy} P''_{D_x D_y}(D_x, D_y) + u''_{y^2} P''_{D_y^2}(D_x, D_y)] +$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}[u'_x P'_{D_x}(D_x, D_y) + u'_y P'_{D_y}(D_x, D_y)]^{(n)} \Big\} v. \tag{7}$$

Formula se poate scrie sub forma:

$$P(D_x, D_y)(uv) = \Big\{ uP(D_x, D_y) + \frac{1}{1!}\left(u'_x \frac{\partial}{\partial D_x} + u'_y \frac{\partial}{\partial D_y}\right) P(D_x, D_y) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(u'_x \frac{\partial}{\partial D_x} + u'_y \frac{\partial}{\partial D_y}\right)^{(2)} P(D_x, D_y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(u'_x \frac{\partial}{\partial D_x} + u'_y \frac{\partial}{\partial D_y}\right)^{(n)} P(D_x, D_y) \Big\} v. \tag{8}$$

§ 3. Fracții de operatori diferențiali

In [2] am introdus formal noțiunea de fracție de polinoame de operatori diferențiali. Vom face împărțirea fracției în ordinea crescătoare a ordinilor operatorilor și obținem în general o serie de operatori diferențiali. Astfel se poate obține în general operatorul diferențial ce dă o ecuație diferențială de ordin infinit, care în cazul problemei lui Cauchy este echivalentă cu rezolvarea unei ecuații integrale Voltera.

Vom indica în cele ce urmează cu indicii (s), (d) respectiv împărțiri la stînga și dreapta, sau factori la stînga și dreapta. Obținem noțiunea de fracție rațională de operatori diferențiali în două moduri astfel:

$$F_{(s)}(D) = \frac{P(D)}{Q_{(d)}(D)} \tag{9}$$

$$\Phi_{(d)}(D) = \frac{P(D)}{Q_{(s)}(D)}. \tag{10}$$

In (9) împărțirea se face la dreapta și avem :

$$F_{(s)}(D)\, Q_{(d)}(D) = P(D) \tag{9'}$$

iar în (10) împărțirea se face la stînga și avem

$$Q_{(s)}(D)\, \Phi_{(d)}(D) = P(D). \tag{10'}$$

Să găsim regulile de derivare a unei fracții raționale de operatori diferențiali.

Derivăm în (9') după regula dată în § 1 și obținem :

$$F'_{(s)}(D)\, Q_{(d)}(D) + F_{(s)}(D)\, Q'_{(d)}(D) = P'(D).$$

Inlocuind pe $F_{(s)}(D)$ din (9) obținem :

$$F'_{(s)}(D) = \left(\frac{P(D)}{Q_{(d)}(D)}\right)' = \frac{P'(D) - \dfrac{P(D)}{Q_{(d)}(D)}\, Q'_{(d)}(D)}{Q_{(d)}(D)}. \tag{11}$$

Analog pornind de la (10') obținem :

$$\Phi'_{(d)}(D) = \left(\frac{P(D)}{Q_{(s)}(D)}\right)' = \frac{P'(D) - Q'_{(s)}(D)\, \dfrac{P(D)}{Q_{(s)}(D)}}{Q_{(s)}(D)}. \tag{12}$$

Formulele (11) și (12) dau regulile de derivare ale fracțiilor raționale de operatori diferențiali.

§ 4. Determinarea soluțiilor cînd ecuația este pusă sub formă de produs de factori diferențiali de ordinul I

Vom studia această analogie din punct de vedere al factorilor multipli.

Să arătăm cum se determină soluțiile unei ecuații diferențiale corespunzătoare tuturor factorilor diferențiali de ordinul I de la dreapta care au ordinul de multiplicitate $\geqslant 2$. Pentru demonstrație considerăm ecuația sub formă de produs de factori (în § 5 arătăm determinarea factorilor de la dreapta sau stînga cînd ordinul lor de multiplicitate este $\geqslant 2$).

$$P(D)\, y = (D^1 - \alpha_p D^0)^{k_p} (D^1 - \alpha_{p-1} D^0)^{k_{p-1}} \ldots (D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2} (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = 0 \tag{13}$$

și primii j factori diferențiali au ordinul de multiplicitate $\geqslant 2$, deci

$$k_1 \geqslant 2,\ k_2 \geqslant 2,\ \ldots\ k_j \geqslant 2.$$

Notăm cu y_1 soluția ecuației $P(D) = 0$ dată de $(D^1 - \alpha_1 D^0)\, y = 0$.

Avem :

$$y_1 = e^{\int \alpha_1 dx} \tag{14}$$

Din (13) avem mai departe:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^2 y = 0. \tag{15}$$

Punem:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0) y = w_1 \tag{15'}$$

și din (15) se obține:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0) w_1 = 0 \quad \text{de unde} \quad w_1 = y_1 = e^{\int \alpha_1 dx}$$

care introdusă în (15') dă:

$$y_{12} = x y_1 \tag{16}$$

Din (13) considerăm:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^3 y = 0 \tag{17}$$

și punem:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0) y = w_2 \tag{18}$$

care introdusă în ecuația (17) dă $(D^1 - \alpha_1 D^0)^2 w_2 = 0$, de unde se obține $w_2 = xy_1$. Aceasta introdusă în (18) dă:

$$y_{13} = x^2 y_1.$$

Se continuă apoi prin inducție completă și obținem rezultatul găsit de acad. Miron Nicolescu în [1]. Soluțiile ecuației [13] corespunzătoare ultimului factor sînt:

$$y_1 = y_{11} = e^{\int \alpha_1 dx}, \quad y_{12} = x y_{11}, \quad y_{13} = x^2 y_{11}, \ldots y_{1k_1} = x^{k_1 - 1} y_{11}. \tag{19}$$

Să calculăm soluțiile $y_{21}, y_{22}, y_{23}, \ldots y_{2k_2}$ ale ecuației (13) corespunzătoare factorului $(D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2}$.

Notăm cu $\bar{y}_2$ soluția ecuației:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0) y = 0. \tag{20}$$

Deci

$$\bar{y}_2 = e^{\int \alpha_2 dx} \tag{20'}$$

Să găsim soluția y_2, care satisface ecuația

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)(D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1} y = 0. \tag{21}$$

Cum $\bar{y}_2$ este soluția ecuației (20) din (21) rezultă:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1} y_{21} = \bar{y}_2. \tag{21'}$$

Punem:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0) u_1 = \bar{y}_2, \quad \text{unde} \quad u_1 = (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1 - 1} y_{21}.$$

Din prima găsim

$$u_1 = y_{11} \int \bar{y}_2 y_1^{-1} dx.$$

Aceasta introdusă în a doua devine:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)\, u_2 = y_1 \int \bar{y}_2 y_1^{-1}\, dx \quad \text{unde} \quad u_2 = (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1 - 2}\, y_{21}.$$

Se continuă în același mod și se obține:

$$y_{21} = y_1(x) \int_{x_0}^{x} (x-t)^{k_1-1} \bar{y}_2(t)\, y_1^{-1}(t)\, dt. \tag{22}$$

Să calculăm acum o soluție y_{2i} a ecuației $P(D)y = 0$. Această soluție o găsim din ecuația:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)^i\, (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = 0. \tag{23}$$

Avem:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)\, v_1 = 0 \quad \text{de unde} \quad v_1 = \bar{y}_2$$

Din ultimele două ecuații rezultă:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)^{i-1}\, (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = v_1 = \bar{y}_2. \tag{24}$$

Punem

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)\, v_2 = \bar{y}_2, \text{ de unde } \quad v_2 = x\bar{y}_2.$$

Rezultă din (24):

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)^{i-2}\, (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = v_2 = x\bar{y}_2.$$

Se continuă în același mod și se ajunge la ecuația:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y_{2i} = x^{i-1}\, \bar{y}_2. \tag{25}$$

Această ecuație diferențială este analoagă cu (21') și o integrăm în același mod. Obținem:

$$y_{2i} = y_1(x) \int_{x_0}^{x} (x-t)^{k_1-1}\, t^{i-1}\, \bar{y}_2(t)\, y_1^{-1}(t)\, dt. \tag{26}$$

Din (26) se obțin toate soluțiile ecuației $P(D)y=0$, corespunzătoare factorului $(D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2}$, dînd lui i valorile 1, 2, 3 ... k_2.

Să calculăm deasemenea soluțiile $y_{31}, y_{32}, y_{33} \ldots y_{3k_3}$ ale ecuației (13) corespunzătoare factorului $(D^1 - \alpha_3 D^0)^{k_3}$.

Notăm cu

$$\bar{y}_3 = e^{\int \alpha_3 dx} \tag{27}$$

soluția ecuației diferențiale

$$(D^1 - \alpha_3 D^0)\, y = 0.$$

Ne propunem să calculăm soluția y_{3i} a ecuației $P(D)y = 0$, din:

$$(D^1 - \alpha_3 D^0)^i\, (D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2}\, (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = 0. \tag{28}$$

Procedăm analog ca în cazul precedent și obținem:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2}\, (D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1}\, y = x^{i-1}\, \bar{y}_3. \tag{29}$$

În această ecuație notăm:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^{k_1} y = w, \tag{30}$$

și obținem:

$$(D^1 - \alpha_2 D^0)^{k_2} w = x^{i-1} \bar{y}_3. \tag{31}$$

Integrînd analog ca în (21') obținem:

$$w = \bar{y}_2(x) \int_{x_0}^{x} (x - t_1)^{k_2 - 1} t_1^{i-1} \bar{y}_3(t_1) \bar{y}_2^{-1} dt_1. \tag{32}$$

Înlocuind în (30) și integrînd ca în (21') se obține:

$$y_{3i} = y_1(x) \int_a^x (x - t_1)^{k_1 - 1} y_1^{-1}(t_1) \bar{y}_2(t_1) \int_a^{t_1} (t_1 - t_2)^{k_2 - 1} t_2^{i-1} \bar{y}_3(t_2) \bar{y}_2^{-1}(t_2) dt_2 dt_1. \tag{33}$$

Pentru a obține toate soluțiile corespunzătoare factorului $(D^1 - \alpha_3 D^0)^{k_3}$ se face în (33) $i = 1, 2, 3 \ldots k_3$.

În modul acesta se poate continua succesiv făcînd integrarea factorilor diferențiali și pentru $(D^1 - \alpha_j)^{k_j}$ obținem:

$$y_{ji} = y_1(x) \int_a^x (x - t_1)^{k_1 - 1} y_1^{-1}(t_1) \bar{y}_2(t_1) \int_a^{t_1} (t_1 - t_2)^{k_2 - 1} \bar{y}_2^{-1}(t_2) \bar{y}_3(t_2) \ldots$$

$$\ldots \int_a^{t_{j-3}} (t_{j-3} - t_{j-2})^{k_{j-2} - 1} \bar{y}_{j-2}^{-1}(t_{j-2}) y_{j-1}(t_{j-2}) \cdot$$

$$\cdot \int_a^{t_{j-2}} (t_{j-2} - t_{j-1})^{k_{j-1} - 1} t_{j-1}^{i-1} \bar{y}_j(t_{j-1}) \bar{y}_{j-1}^{-1}(t_{j-1}) dt_1 \ldots dt_{j-1}. \tag{34}$$

Pentru a obține toate soluțiile corespunzătoare factorului $(D^1 - \alpha_j D^0)^{k_j}$ facem în (34), $i = 1, 2, 3 \ldots k_j$.

§ 5. O analogie a ecuațiilor diferențiale lineare cu ecuațiile algebrice

Teoremă. Fiind dată o ecuație diferențială liniară (1) cu coeficienții funcții continue pe I:

a) *Dacă admite la dreapta factori diferențiali de ordinul I, care au ordinul de multiplicitate* $\geqslant 2$, *se pot determina soluțiile particulare ale ecuației diferențiale corespunzătoare acestor factori.*

b) *Dacă admite la stînga factori diferențiali de ordinul I, care au ordinul de multiplicitate* $\geqslant 2$, *se pot determina soluțiile particulare ale ecuației diferențiale adjuncte corespunzătoare acestor factori.*

c) *Dacă ecuația admite un factor diferențial de ordinul I cu ordinul de multiplicitate unu, iar toți ceilalți factori diferențiali de ordinul I au ordinul de multiplicitate* $\geqslant 2$, *ecuația este integrabilă prin cuadraturi.*

Demonstrație. a) Să considerăm cazul *a*) și polinomul diferențial $P(D)$ dat sub forma (2) și presupunem că are factori de ordinul I la dreapta cu ordinul de multiplicitate $\geqslant 2$:

$$P(D) = Q(D)\ (D^1 - \alpha_3 D^0)^p\ (D^1 - \alpha_2 D^0)^q\ (D^1 - \alpha_1 D^0)^r,$$

unde $Q(D)$ este un polinom oarecare, $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$, $r \geqslant 2$.

— Admitem ipoteza că α_1, α_2, α_3 nu sînt constante și în acest caz nu se poate interverti ordinea factorilor respectivi.

Calculăm derivata $P'(D)$ a lui $P(D)$ din (2) și avem

$$P'(D) = Q_1(D)\ (D^1 - \alpha_3 D^0)^{p-1}\ (D^1 - \alpha_2 D^0)^{q-1}\ (D^1 - \alpha_1 D^0)^{r-1}.$$

Se află cel mai mare divizor comun la dreapta al polinoamelor $P(D)$, $P'(D)$ (așa cum s-a indicat în [2]). Acesta este:

$$M_1(D) = (D^1 - \alpha_1 D^0)^{r-1}.$$

căci ultimul factor al lui $P(D)$ este:

$$(D^1 - \alpha_1 D^0)^r = (D^1 - \alpha_1 D^0)\ (D^1 - \alpha_1 D^0)^{r-1}$$

În modul acesta am determinat pe r (ordinul lui $M_1(D)$ adaogat cu unu).

Pentru determinarea lui α_1 se derivă $M_1(D)$ de $r-2$ ori. Mai departe se împarte la dreapta $P(D)$ din (2) cu $(D^1 - \alpha_1 D^0)^r$ și se obține:

$$P_1(D) = Q(D)\ (D^1 - \alpha_3 D^0)^p\ (D^1 - \alpha_2 D^0)^q$$

sub formă de polinom dezvoltat astfel:

$$P_1(D) = D^{n-r} + b_1 D^{n-r-1} + \ldots + b_{n-r-1} D^1 + b_{n-r} D^0. \qquad (35)$$

Se calculează derivata $P_1'(D)$ a lui $P_1(D)$ din (35) și se află cel mai mare divizor comun la dreapta $M_2(D)$ al polinoamelor $P_1(D)$, $P_1'(D)$, care este:

$$M_2(D) = (D^1 - \alpha_2 D^0)^{q-1},$$

apoi se procedează analog ca în cazul precedent.

Mai departe se continuă în mod analog și se află q și α_2, apoi se împarte la dreapta $P_1(D)$ cu $(D^1 - \alpha_2 D^0)^q$ și se obține polinomul:

$$P_2(D) = D^{n-r-q} + c_1 D^{n-r-q-1} + \ldots + c_{n-r-q} D^0. \qquad (38)$$

Cu acesta se procedează în același fel și se determină p și α_3. Polinomul $P_2(D)$ se împarte la dreapta cu $(D^1 - \alpha_3 D^0)^q$ și se obține:

$$P_3(D) = Q(D).$$

Se constată însă că $P_3(D) = Q(D)$ și derivata sa $P_3'(D) = Q'(D)$, nu mai au divizor comun la dreapta, adică $P_3(D)$ și $P_3'(D)$ sînt polinoame prime la dreapta.

Rezultă că polinomul $P_3(D) = Q(D)$ are un factor diferențial la dreapta de ordinul I cu ordinul de multiplicitate unu și mai departe nu se mai continuă.

În ipoteza că ultimii doi coeficienți α_1 și α_2 (eventual ultimii trei: α_3, α_2, α_1, etc...) sînt constante, atunci cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(D)$ și $P'(D)$ va fi un polinom diferențial cu coeficienți constanți și soluțiile particulare corespunzătoare ecuației diferențiale a lui se pot găsi prin metoda cunoscută.

Odată determinate funcțiile α_1, α_2, α_3... pentru aflarea soluțiilor corespunzătoare factorilor diferențiali respectivi, se aplică procedeul stabilit în § 4. Soluțiile sînt date de formulele: (19), (26), (33) și in cazul general de (34).

b) Cazul b) se tratează în același mod, însă se caută mereu cel mai mare divizor la stînga între polinom și derivata sa.

Se poate reduce, însă, cazul b) la cazul a) scriind polinomul adjunct al lui P(D). Factorii diferențiali de la stînga lui $P(D)$ de ordinul I cu ordinul de multiplicitate $\geqslant 2$ conform teoremei lui Frobenius [2], devin factori la dreapta ai polinomului adjunct, cu aceleași ordine de multiplicitate $\geqslant 2$ și deci ne aflăm în cazul a).

c) In cazul c) se rezolvă problema în cazul a) și b) și se ajunge la un factor diferențial de ordinul unu, care se rezolvă ușor.

Observație. Pentru aplicarea teoremei nu este necesar ca ec. dif. să fie dată sub forma de produs de factori diferențiali.

§ 6. Aplicație la ecuații diferențiale lineare cu coeficienți constanți

In cazul unui polinom diferențial cu coeficienți constanți, factorii sînt comutativi.

a) Ecuația caracteristică are rădăcini reale multiple.

— Fie r o rădăcină multiplă de ordinul p de multiplicitate.

Avem:

$$P(D)\,y = Q(D)\,(D^1 - rD^0)^p\,y = 0.$$

Aplicînd formulele (19) se obține:

$$y_1 = e^{rx},\quad y_2 = xe^{rx},\quad \ldots\ y_p = x^{p-1}e^{rx}. \tag{39}$$

b) Ecuația caracteristică are rădăcini complexe multiple.

Fie $r = \alpha + \beta i$, $r' = \alpha - \beta i$, rădăcini multiple de ordinul p de multiplicitate.

Formulele 39 sînt valabile pentru valorile $r = \alpha + \beta i$ și $r' = \alpha - \beta i$.

Se grupează două soluții astfel:

$$y = k x^j e^{(\alpha+\beta i)x} + k' x^j e^{(\alpha-\beta i)x} =$$

$$y = x^j e^{\alpha x}\,[(k_1 + k_2)\cos\beta x + i(k_1 - k_2)\sin\beta x]$$

$$y = x^j e^{\alpha x}\,(C_j \cos\beta x + C_j' \sin\beta x).$$

Soluția corespunzătoare rădăcinilor multiple conjugate se scrie astfel:

$$y = e^{\alpha x}[C_1 + C_2 x + \ldots + C_p x^{p-1})\cos\beta x + (C_{p+1} + C_{p+2} x + \ldots C_{2p} x^{p-1})\sin\beta x].$$

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe-Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Nicolescu:* Sur le décomposition des polynomes différentiels en facteurs du premier ordre. Mathematische Zeitschrift, 35 Band, 1932.
2. *I. M. Miu:* Asupra ecuațiilor diferențiale adjuncte. Buletinul Institutului politehnic București, tom. XXV, fasc. 1/963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

C.Z.: 517

GENERALIZĂRI ALE FORMULEI MEDIEI A LUI CAUCHY *

GH. D. SIMIONESCU

1. Formula lui Cauchy se poate pune sub forma

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a) \\ 1 & \varphi(b) \end{vmatrix}} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad c \in (a, b). \tag{1}$$

2. Considerăm funcțiile $f(x)$, $\varphi(x)$ definite și continue pe intervalul $[a, c]$ și derivabile pe același interval, eventual deschis. Cu ajutorul lor alcătuim funcța

$$F(x) = f(x) - m\varphi(x) - nx - p \tag{2}$$

care îndeplinește aceleași condiții. Mai presupunem că derivatele $f'(x)$, $\varphi'(x)$ îndeplinesc aceleași condiții pe $[a, c]$ și că $f''(x)$, $\varphi''(x)$ există în fiecare punct al intervalului. Fie $x = b$ un punct pe intervalul (a, c); impunem în plus condițiile $F(a) = F(b) = F(c) = 0$, care duc la sistemul:

$$\begin{aligned} p + na + m\varphi(a) &= f(a) \\ p + nb + m\varphi(b) &= f(b) \\ p + nc + m\varphi(c) &= f(c) \end{aligned} \tag{3}$$

din care rezultă

$$m = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & \varphi(a) \\ 1 & b & \varphi(b) \\ 1 & c & \varphi(c) \end{vmatrix}}. \quad \text{(numitorul} \neq 0). \tag{4}$$

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

De altă parte $F'(x) = f'(x) - m\,\varphi'(x) - n$, potrivit teoremei lui Rolle, se anulează în $\xi_1 \in (a, b)$ și $\xi_2 \in (b, c)$, de unde rezultă, în baza aceleași teoreme că există un punct $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ și deci $\xi \in (a, c)$ pentru care

$$F''(\xi) = f''(\xi) - m\varphi''(\xi) = 0,$$

de unde

$$m = \frac{f''(\xi)}{\varphi''(\xi)} \qquad [\varphi''(\xi) \neq 0]. \tag{5}$$

Din (4) și (5) se deduce imediat

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & \varphi(a) \\ 1 & b & \varphi(b) \\ 1 & c & \varphi(c) \end{vmatrix}} = \frac{f''(\xi)}{\varphi''(\xi)} \quad \xi \in (a, c). \tag{6}$$

3. *Interpretarea geometrică.* Se observă imediat că determinantul de la numărătorul relației (6) este dublul ariei $\mathcal{A}_{ABC}$ a triunghiului format de punctele $A\,[a, f(a)]$, $B\,[b, f(b)]$, $C\,[c, f(c)]$ situate pe curba $y = f(x)$, iar numitorul dublul ariei triunghiului format de punctele $A'\,[a, \varphi(a)]$, $B'\,[b, \varphi(b)]$, $C'\,[c, \varphi(c)]$ situate pe curba $y = \varphi(x)$. Relația (6) devine

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \frac{f''(\xi)}{\varphi''(\xi)} \tag{7}$$

cu condițiile: a) A', B', C' să nu fie în linie dreaptă; b) $\varphi''(\xi) \neq 0$, sau mai bine $\varphi''(x) \neq 0$, $x \in (a, c)$. Altfel spus, *există pe intervalul (a, c) un punct ξ astfel că raportul derivatelor secunde în ξ este egal cu raportul ariilor triunghiurilor cu vîrfurile așezate respectiv pe curbele $y = f(x)$ și $y = \varphi(x)$, ale căror abscise sînt a, b, c.*

Este de subliniat această interpretare geometrică, pentru ord. II, a formulei lui Cauchy.

4. *Cazul general.* Să formăm acum funcția următoare cu ajutorul funcțiilor $f(x)$, $\varphi(x)$ și a unui polinom de gradul $n - 1$,

$$F(x) = f(x) - \alpha_0\,\varphi(x) - \alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-2} - \ldots - \alpha_n \tag{8}$$

iar pe intervalul (a, b) să considerăm punctele $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ $(a_0 = a, a_n = b)$. Este evident că dacă $f(x)$, $\varphi(x)$ satisfac condițiile teoremei lui Rolle, atunci și $F(x)$ le satisface. Mai presupunem că derivatele pînă la ordinul $(n - 1)$ satisfac aceleași condiții și că derivatele de ord. n există în orice punct al intervalului. Dacă mai impunem ca

$$F(a_0) = F(a_1) = \ldots = F(a_n) = 0$$

atunci se obține sistemul

$$\alpha_n + \alpha_{n-1}\, a_i + \ldots + \alpha_1\, a_i^{n-1} + \alpha_0\, \varphi(a_i) = f(a_i)$$

$(i = 0,1,\ldots n)$, de unde rezultă:

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^{n-1} & f(a_0) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & f(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & f(a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^{n-1} & \varphi(a_0) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & \varphi(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & \varphi(a_n) \end{vmatrix}} \quad \text{(numitorul} \neq 0) \tag{9}$$

De altă parte, deoarece $F(a_i) = 0$ $(i = 0,\ 1,\ldots n)$, există cîte un punct $\xi_i \in (a_i\ ,\ a_{i+1})$ $(i = 0,1,\ldots n-1)$ pentru care $F'(\xi_i) = 0$, apoi cîte un punct $\xi_i' \in (\xi_i\ ,\ \xi_{i+1})$ $(i = 0,\ 1,\ldots,\ n-2)$ pentru care $F''(\xi_i') = 0$, pînă se ajunge la un $\xi \in (a_0\ ,\ a_n)$ pentru care $F^{(n)}(\xi) = 0$, adică

$$f^{(n)}(\xi) - \alpha_0\, \varphi^{(n)}(\xi) = 0 \quad \text{sau} \quad \alpha_0 = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)} \quad [\varphi^{(n)}(\xi) \neq 0]. \tag{10}$$

Din (9) și (10) se deduce:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^{n-1} & f(a_0) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & f(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & f(a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^{n-1} & \varphi(a_0) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & \varphi(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & \varphi(a_n) \end{vmatrix}} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)} \quad [\xi \in (a_0\ ,\ a_n)] \tag{11}$$

formula care generalizează formula lui Cauchy și pe care am putea-o numi formula lui Cauchy de ordinul n.

Observare. Pentru $\varphi(x) = x^n$ se regăsește generalizarea formulei lui Lagrange pe care am dat-o în altă parte*.

* Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, nr. 4/965.

5. *Consecințe.* Presupunînd funcțiile $f(x)$ și $\varphi(x)$ derivabile de n ori în a, atunci se poate face $a_i (i = 1, 2, \ldots n)$ să tindă către a, ceea ce atrage după sine $\xi \to a$ și rezultă

$$\lim_{a_i \to a} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & \ldots & a^{n-1} & f(a) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & f(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & f(a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & \ldots & a^{n-1} & \varphi(a) \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} & \varphi(a_1) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} & \varphi(a_n) \end{vmatrix}} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)} \tag{12}$$

limită care, pe cale directă, nu e tocmai ușor de găsit. De exemplu pentru $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = l_n x$ și $n = 2$, găsim presupunînd a, b, $c > 0$:

$$\lim_{\substack{b \to a \\ c \to a}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & e^a \\ 1 & b & e^b \\ 1 & c & e^c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & l_n a \\ 1 & b & l_n b \\ 1 & c & l_n c \end{vmatrix}} = -a^2 e^a$$

Pe cale directă se ajunge mai greu la rezultat, scăzînd liniile I-a din a II-a și a III-a și simplificînd cu $(b-a)(c-a)$:

$$\lim_{\substack{b \to a \\ c \to a}} \frac{\dfrac{e^c - e^a}{c-a} - \dfrac{e^b - e^a}{b-a}}{\dfrac{l_n \dfrac{c}{a}}{c-a} - \dfrac{l_n \dfrac{b}{a}}{b-a}} = e^a \lim_{\substack{b \to a \\ c \to a}} \frac{\dfrac{e^{c-a} - 1}{c-a} - \dfrac{e^{b-a} - 1}{b-a}}{\dfrac{l_n\left(1 + \dfrac{c-a}{a}\right)}{c-a} - \dfrac{l_n\left(1 + \dfrac{b-a}{a}\right)}{b-a}} =$$

$$= e^a \lim_{\substack{b \to a \\ c \to a}} \frac{\dfrac{1}{2!}(c-b) + \dfrac{1}{3!}(c-b)(c+b-2a) + \ldots}{-\dfrac{c-b}{2a^2} + \dfrac{(c-b)(c+b-2a)}{3a^3} - \ldots} = -a^2 e^a .$$

În cele de mai înainte am presupus pe a fix și pe b, c tinzînd către a. E ușor de văzut că se poate lua x_0 fix pe interval, apoi se face a, b, c să tindă către x_0.

6. Considerăm mai general funcțiile $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, definite și continue pe $[a, b]$ și presupunem că sînt derivabile pe același interval (eventual deschis). Funcția

$$F(x) = f(x) - \alpha_1 f_1(x) - \alpha_2 f_2(x) - \ldots - \alpha_n f_n(x) - \alpha_{n+1}$$

îndeplinește aceleași condiții. Fie punctele $a_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, \ldots (n-1)$ și $a_0 = a$, $a_n = b$. Dacă impunem ca $F(a_i) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$ obținem sistemul

$$\alpha_1 f_1(a_i) + \alpha_2 f_2(a_i) + \ldots + \alpha_n f_n(a_i) + \alpha_{n+1} = f(a_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots n). \tag{13}$$

Presupunînd determinantul Δ al sistemului diferit de zero și notînd cu Δ_k numărătorul lui α_k, necunoscutele au valori unic determinate $\alpha_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$.

De altă parte pe fiecare din cele n intervale se află cîte un punct ξ_i pentru care $F'(x)$ se anulează, pe fiecare din cele $(n-1)$ intervale formate de ξ_i există cîte un punct ξ_i' pentru care $F''(x)$ se anulează etc., pînă se ajunge la un punct $\xi \in (a_0, a_n)$ pentru care $F^{(n)}(x)$ se anulează, adică :

$$\alpha_1 f_1^{(n)}(\xi) + \alpha_2 f_2^{(n)}(\xi) + \ldots + \alpha_n f_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) \tag{14}$$

în care înlocuind coeficienții se obține :

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \frac{f_1^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\xi)} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot \frac{f_2^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\xi)} + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta} \cdot \frac{f_n^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\xi)} = 1. \tag{15}$$

Pentru $n = 2$ relația se poate scrie sau sub această formă sau punînd $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$:

$$\begin{vmatrix} f(a) & f_2(a) & 1 \\ f(b) & f_2(b) & 1 \\ f(c) & f_2(c) & 1 \end{vmatrix} f_1''(\xi) + \begin{vmatrix} f_1(a) & f(a) & 1 \\ f_1(b) & f(b) & 1 \\ f_1(c) & f(c) & 1 \end{vmatrix} f_2''(\xi) = \begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & 1 \\ f_1(b) & f_2(b) & 1 \\ f_1(c) & f_2(c) & 1 \end{vmatrix} f''(\xi) \tag{16}$$

Exemplu. Dacă $f(x) = x^2$, $f_1(x) = \sin x$: $f_2(x) = \cos x$, atunci (16) devine $(a < b < c)$

$$\begin{vmatrix} a^2 & \sin(a-\xi) & 1 \\ b^2 & \sin(b-\xi) & 1 \\ c^2 & \sin(c-\xi) & 1 \end{vmatrix} = 2! \begin{vmatrix} \sin a & \cos a & 1 \\ \sin b & \cos b & 1 \\ \sin c & \cos c & 1 \end{vmatrix}$$

care transformată arată că există un punct $\xi \in (a, c)$ pentru care este satisfăcută relația :

$$\frac{a^2 \cos\left(\frac{b+c}{2} - \xi\right)}{\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}} + \frac{b^2 \cos\left(\frac{c+a}{2} - \xi\right)}{\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{b-a}{2}} + \frac{c^2 \cos\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right)}{\sin\frac{c-a}{2}\sin\frac{c-b}{2}} = 4.$$

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

FIZICĂ

C.Z. : 544.62:545.822:535.33

METODĂ PENTRU COLECTAREA ȘI DETERMINAREA SPECTROCHIMICĂ A COMPOZIȚIEI SUSPENSIILOR SOLIDE DIN ATMOSFERĂ *

C. BERENY, G. TEODORESCU, M. CHIMIREL

Se știe de mult că troposfera este un amestec gazos în care se găsesc în suspensie diferite particule solide sau lichide. În compoziția sa intră : azot, oxigen, metan, gaze rare, bioxid de carbon, ozon, produși radioactivi naturali, vapori de apă, prafuri meteorice (a căror existență nu este neglijabilă, întrucît se evaluează la mai multe mii de tone pe zi pe întreg globul [1]) și pulberi-minerale (cristale fine rezultate prin sublimarea stropilor de apă transportați de vînt de pe mări și oceane, nisip fin, loess, funingine etc.), organice (polen, spori, virusuri etc.) și vulcanice ** care se pot ridica foarte sus, la mari altitudini [1].

Într-o masă de aer curat și uscat proporția acestor constituenți, la latitudini mijlocii este următoarea : azot 78,09%, oxigen 20,95%, argon 0,93%, bioxid de carbon 0,03%, neon $1{,}2 \cdot 10^{-3}$%, heliu $5{,}24 \cdot 10^{-4}$% krypton $1 \cdot 10^{-4}$%, hidrogen $5 \cdot 15^{-5}$%, xenon $8 \cdot 10^{-6}$%, ozon $1 \cdot 10^{-6}$%, metan $2 \cdot 10^{-4}$%, radon $6 \cdot 10^{-20}$% și pulberi 10—100 particule pe cm^3 (deasupra satelor și a mării) ***.

Contribuția civilizației de astăzi la „îmbogățirea" aerului din pătura inferioară cu diferiți produși este remarcabilă, mai ales în regiunile industriale : coșurile uzinelor și centralelor termice, coșurile caselor, eșapamentul motoarelor de automobil etc., alimentează încontinuu atmosfera cu mari cantități de pulberi și gaze amenințînd în unele regiuni sănătatea publică.

Compoziția aerului troposferic, în proporțiile citate, este numai relativ constantă, în realitate ea este variabilă ; intervalele de variație ale componenților sînt însă mici.

Constituenții atmosferici care suferă variații foarte mari sînt particulele solide sau lichide aflate în suspensie în aer. În lucrarea de față

* Manuscris predat la redacție la 26 februarie 1965.

** Particulele de origine vulcanică se pot găsi uneori în cantități atît de mari, încît influențează chiar energia solară incidentă într-un anumit sezon cînd temperatura este sub medie.

*** În aerul orașelor și al centrelor industriale numărul particulelor atinge zeci și sute de mii pe cm^3.

ne-am ocupat de identificarea, pe cale spectrochimică, a componenței suspensiilor solide sub formă de pulberi din atmosfera orașului București.

In general, pulberile reprezintă o importantă categorie de impurități, atît din punct de vedere cantitativ, cît și din punct de vedere al efectelor lor asupra sănătății. Impuritățile pot provoca omului, în anumite condiții, accidente multiple ca : intoxicații, stări alergice, astmă etc.

Din punct de vedere economic, pagubele materiale pe care le suferă construcțiile din cauza impurificării aerului sînt considerabile, iar pagubele biologice cauzate culturilor și animalelor sînt, de asemenea, importante [1] [2].

Distribuția pulberilor, atît pe orizontală cît și pe verticală, este variabilă, deși extrema mobilitate a aerului asigură permanent relativa omogenizare a atmosferei în păturile sale inferioare. Pe timp de secetă și deasupra unui teren dezgolit, condițiile de formare a prafului sînt extrem de favorabile în comparație cu acelea pe o vreme relativ umedă și deasupra unui teren cu vegetație. Dar dacă se întîmplă ca peste un teren dezgolit și uscat să treacă periferia unui anticiclon puternic sau zona centrală a unui ciclon, praful de pe teren este transportat la distanțe imense și în cantități mari, cum s-a întîmplat în aprilie 1960 cînd praful ridicat în regiuni situate dincolo de Caspica a ajuns pînă în Europa centrală ; sau în aprilie 1964 cînd praful ridicat din Bărăgan a cuprins tot sudul țării noastre și parte din Bulgaria. Observațiile meteorologice din țara noastră au consemnat, de asemenea, și cazuri de transport masiv de praf din regiunile subtropicale ale Africii de nord.

Mișcările verticale ale aerului asigură pentru un anumit loc ridicarea pulberilor de la sol la înălțime (dacă curenții ascendenți sînt foarte puternici, acestea pot ajunge departe în stratosferă) sau dimpotrivă grăbește depunerea lor la sol, dacă se află la înălțime. S-a dedus că timpul de cădere al unei particule de rază medie de 1 μ aflată la 35 km deasupra solului într-o atmosferă liniștită, este de circa un an de zile.

In căderea liberă, pulberile aderă pe suprafețele pe care le întîlnesc în cale, ceea ce dă posibilitatea să le colectăm ușor. Noi n-am folosit numai procedeul acesta de colectare, ci am profitat de faptul că pulberile sînt antrenate la sol de diferite precipitații și am procedat și la colectarea acestora. Pentru colectare am folosit o pîlnie metalică căptușită cu material plastic pe care aderă pulberile în căderea lor. Suprafața de colectare este de o jumătate m^2. La partea de jos pîlnia colectoare comunică cu o găleată de polietilen pentru strîngerea precipitațiilor.

Colectarea pulberilor și a precipitațiilor s-a făcut în anul 1962, în fiecare zi, uneori la două zile, la aceeași oră, spălîndu-se cu apă distilată suprafața interioară a colectorului și a găleții de polietilen. Cantitatea de apă cu pulberile colectoare s-a evaporat folosind becuri de radiații infraroșii. După evaporare, rezidul obținut s-a calcinat timp de o jumătate de oră la temperatura de 600°C, în scopul eliminării compusilor organici. După calcinare și după răcirea creuzetului, s-a desprins rezidul de pe creuzet cu ajutorul unei spatule de plexiglas și tot cu această spatulă s-a mărunțit și s-a amestecat bine pentru a fi cît mai omogen (s-a folosit spatula de plexiglas curată și apă distilată pentru a evita orice contami-

nare cu substanțe străine probei). Astfel obținut, rezidul s-a trecut în tăviță de aluminiu care sînt păstrate în cutii de lemn. Din aceste tăviță s-au luat probe pentru a fi studiate la spectrograf.

Menționăm că n-am făcut analize spectrale cantitative, ci calitative și de comparare a abundenței relative a diverselor elemente chimice identificate în probe ; prin metoda de lucru adoptată, am asigurat posibilitatea de a face această comparare pe cele 300 de probe pregătite.

Este cunoscut faptul că la evaporarea probelor în arcul de cărbune, procesul este însoțit de distilarea fracționată a topiturii ; în arcul electric pătrund în primul rînd cele mai volatile combinații ale elementelor.

În problema noastră, însă, nu interesa în mod deosebit un anumit element, ci compoziția globală.

Neputînd, deci, să alegem timpi de preardere pentru asigurarea stabilității pătrunderii în zona de descărcare a diferitelor elemente, am ales un procedeu de ardere completă în arc. Reproductibilitatea spectrogramelor, în acest caz, era însă puternic influențată de cantitatea și de structura probei. Din acest motiv, înainte de încărcarea electrozilor reziduul de care s-a vorbit mai sus era omogenizat.

Încărcarea craterului electrozilor s-a făcut cu mare atenție pentru a folosi mereu aceeași cantitate de probă. Cupa electrodului era umplută cu reziduI omogenizat, care era apoi presat cu un bastonaș de grafit, pentru a împiedica împrăștierea probei astfel obținute, la declansarea arcului. În felul acesta, conținutul de probă presat a reprezentat $^3/_4$ din capacitatea cupei electrodului.

Reproductibilitatea mai era condiționată de temperatura și stabilitatea arcului. S-a păstrat aceleași tip de electrod — din cărbune tip S.U. Cehoslovac — pentru toate analizele efectuate. S-a folosit generatorul de arc alternativ cu comandă de înaltă frecvență D.G. 2, la un curent de 20 amperi ; intervalul dintre electrozi a fost de 3 mm. Curentul mare a fost necesar pentru a asigura o ardere completă în timp de 20 secunde cît dura expunerea. În plus, se îmbunătățea stabilitatea arcului datorită evaporării mai abundente a substanței din craterul incandescent.

Expunerea a durat timp de 20 secunde pentru fiecare probă. În acest interval de timp se consuma și o bună parte din cupa electrodului de cărbune. Pentru a favoriza un proces echilibrat între evaporarea probei și consumul cupei de cărbune, a trebuit subțiată cupa. În acest scop, s-au făcut încercări de preardere a electrozilor la diferite intensități a curentului electric, sub curent de aer comprimat și cu durate diferite. Au fost găsiți satisfăcători electrozii prelucrați la un curent de 20 amperi timp de 30 secunde.

S-a lucrat cu un spectrograf de ultraviolet Q 24.

Spectrele obținute, fiind foarte bogate în linii și benzi de emisie, a fost necesară o diafragmare a condensorului intermediar cu o deschidere dreptunghiulară de 5 mm înălțime, obturîndu-se, astfel, spectrul continuu emis de electrozii incandescenți, care ar fi împiedicat citirea corectă a spectrogramelor.

Spectrele s-au înregistrat pe plăci Agfa ultraviolet (t-Platten 9×24). Pe o placă fotografică s-au înregistrat probele zilnice pe interval de 30 de zile, iar aranjarea lor s-a făcut în zona centrală a plăcii. Spectrul de referință al fierului s-a repetat din 9 în 9 probe, spre a ușura explorarea spectrogramelor la spectroproiectorul Zeiss.

Plăcile impresionate s-au prelucrat în condiții identice. Păstrarea condițiilor identice a permis compararea tuturor spectrelor de pe o placă, respectiv a spectrogramelor de pe an. Compararea la spectroproiector a liniilor diferitelor elemente s-a făcut cu anumite linii vecine ale fierului, element care era prezent din abundență și permanent.

S-a analizat spectral peste 300 de probe colectate din atmosfera orașului București [3]. Nu s-a urmărit decît obținerea unor informații asupra abundenței și a frecvenței elementelor prezente în suspensiile solide din atmosferă. Analizele au arătat că elementele chimice identificate în explorarea semicantitativă rapidă a plăcilor fotografice se pot clasifica după mediera pe o lună de zile în următoarele grupuri :

I. Abundență mare și prezență permanentă, Si, Al, Ca, Mg.

II. Abundență mijlocie și prezență permanentă B, Ba, Fe, Mn, Ti.

III. Abundență mică și prezență permanentă Cu, Na, Ni.

IV. Abundență mică și prezență nepermanentă Cr, Cd, Pb, Sb, Sn, Zn.

Aprecierea s-a făcut după intensitatea liniilor spectrale respective. Astfel liniile elementelor cu abundență mare au dat înegriri pe placa fotografică de 3—4 ori mai mare decît liniile elementelor menționate cu „abundență mică".

Prin „prezență permanentă" se înțeleg elementele identificate în toate probele.

Elementele Cr, Cd, Pb, Sb, Sn și Zn (grupa IV) au apărut foarte neregulat.

O corelație cu direcția curenților de aer și cu regimul precipitațiilor nu s-a urmărit în această lucrare.

Litosfera are, în principal, următoarea constituție procentuală [4] :

O	46,6%
Si	27,7%
Al	8,1%
Fe	5 %
Ca	3,6%
Na	2,8%
K	2,7%
Mg	2,1%

Tot după [4] alături de cele 8 elemente de mai sus, litosfera conține H, Cl, P și Ti între 1% și 0,1% ; C, N, F, S, V, Cr, Mn, Ni, Cu, Ba, Zn, Zr între 0,1% și 0,01%.

In general probele analizate în cursul anului 1962 reflectă un fond permanent determinat de suspensii de mare înălțime peste care se suprapune un fond determinat de solurile și condițiile locale. Observăm de ase-

menea că procesul de calcinare duce la pierderi în elemente ușor volatile (K, Na etc.) ; aceasta contribuie la unele inversări în șirul abundenței reale.

În figură se pot observa 8 spectre care corespund la opt probe colectate în 8 zile consecutive ; aceste 8 spectre sînt încadrate între două

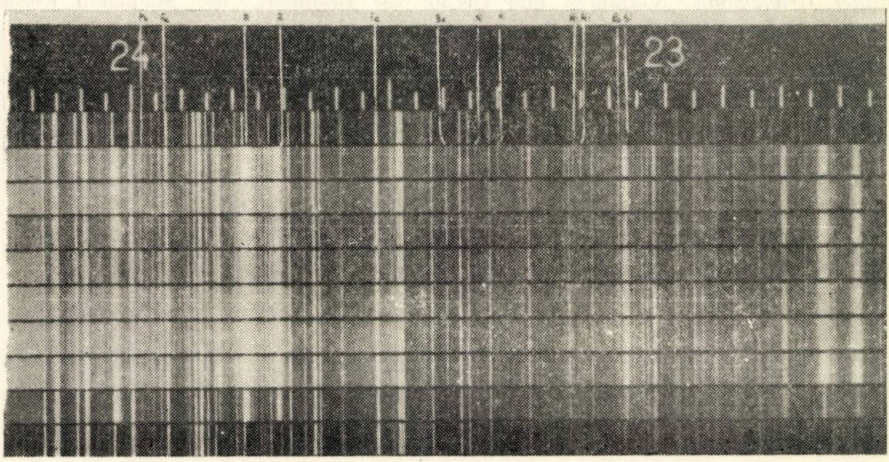


Fig. 1.

spectre de referință ale fierului. Spectrele numerotate de la 1 la 8 corespund probelor după cum urmează :

1. proba nr. 547 din ziua de 1.XI.1962
2. proba nr. 548 din ziua de 2.XI.1962
3. proba nr. 549 din ziua de 3.XI.1962
4. proba nr. 550+551 din ziua de 4+5.XI.1962
5. proba nr. 552 din ziua de 6.XI.1962
6. proba nr. 553 din ziua de 7.XI.1962
7. proba nr. 554 din ziua de 8.XI.1962
8. proba nr. 555+556 din ziua de 9.XI.1962

Spectrograma din figură reprezintă domeniul spectral între 2300 A și 2400 A. După modul cum variază intensitatea liniilor spectrale ne putem face o imagine calitativă asupra celor exprimate în prezenta lucrare privitor la elemente indicate: Pb, Fe, Al, Ba, Ni, și Si. Spațiul nu permite ca acest exemplu să cuprindă extrase din spectogramă pe luna întreagă sau pentru alte domenii spectrale caracteristice celorlaltor elemente despre care am vorbit.

Catedra de fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE.

1. *J. Grandjean:* Chimie et Radioactivité Atmosphériques. Uccle-Belgique, 1959, 1,2.

2. *Walter Grundmann:* Verfahren und Geräte zur Bestimung der Staub.und Kernbeimengungen der Luft Berlin, 1942, 2,3.

3. *I. Agarbiceanu, C. Bereny, G. Teodorescu și M. Chimirel:* Comunicările Acad. R.P.R., T.XIII, Nr. 12 p. 1051, 1963.

4. *J. Gognel:* La Terre, Paris, 1959, p. 646.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

ORGANE DE MAȘINI

C.Z. : 621.822.5:678

ASUPRA TEMPERATURII LAGĂRELOR RADIALE CU ALUNECARE ȘI EFECTUL IZOLANT AL CUZINEȚILOR DIN MASE PLASTICE *

GH. MANEA, M. R. MUSTAFA, M. PASCOVICI

1. *Conturarea problemei.*

Cercetările asupra ungerii fluide a fusurilor au aruncat lumină aproape deplină în problemele legate de portanță, de frecare, de poziția fusului în cuzinet, nu numai în regim laminar ci, parțial, și în regim turbulent.

Temperatura filmului de lubrifiant, în interdependență cu portanța prin intermediul vîscozității și grosimii stratului de fluid, reprezintă un parametru tot atît de important, hotărîtor pentru buna comportare a lagărului în funcționare.

Complexitatea problemei determinării temperaturii lagărului își are origina în necesitatea împletirii legilor din hidromecanică, cu cele cu caracter energetic, în paralel cu considerarea transferului de căldură atît în masa de lubrifiant, cît și de la acesta, prin fus și corpul cu formă complicată al lagărului, spre exterior. Înseși relațiile analitice în care transferul de căldură este introdus prin prezența unor coeficienți globali prezintă dificultăți nesoluționate pînă în prezent decît pentru unele cazuri particulare, obținerea unor rezultate valabile pentru forma reală a lagărului fiind, în orice caz, condiționată de folosirea unor valori obținute prin cercetări experimentale laborioase.

Scopul prezentei lucrări este :

— de a pune comparativ în lumină unele rezultate în această problemă ;

— de a contribui la ameliorarea calculului lagărelor radiale cu alunecare printr-o nouă metodă care, rămînînd strîns legată de procesele fizice, să permită totuși aplicarea ei fără dificultăți ;

— de a scoate în evidență efectul de izolare al prezenței unei bucșe din material plastic, sub dublul aspect : a) al transferului de căldură spre exterior ; b) al cîmpului de temperatură în film.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

2. *Aspectul general al problemei.*

Studiul mișcării unui lichid vîscos, compresibil și conducător de căldură, în forma cea mai generală, implică rezolvarea unui sistem de ecuații [2] — raportate la o particolă elementară din masa filmului — rezultate din aplicarea legilor generale ale mișcării și constanței energiei, pe de o parte, din funcțiile de variație ale parametrilor determinanți, pe de alta. Notînd prin :

$v_{x,y,z}$ — componentele vitezei pe direcțiile corespunzătoare x, y, z ale sistemului de coordonate ;
p — presiunea pe unitatea de suprafață ;
η — vîscozitatea lubrifiantului ;
F_i — proiecția forțelor masice pe direcțiile x, y, z ;
E — energia interioară a unității de masă ;
λ — coeficientul de conductivitate termică ;
A — echivalentul caloric $A = \frac{1}{427}\left[\frac{\text{Kcal}}{\text{Kgfm}}\right]$;
Q^* — transferul de căldură pentru unitatea de volum în unitatea de timp, din cauze diferite de conductivitatea termică, de exemplu prin radiație ;
T — temperatura ;
ϱ — densitatea fluidului ;
t — timpul,

variația cantității de mișcare se exprimă prin trei ecuații de forma :

$$\varrho\left(v_x\frac{\partial v_i}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_i}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)=\varrho F_i+2\frac{\partial}{\partial i}\left(\eta\frac{\partial v_i}{\partial i}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial j}\left[\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial i}+\frac{\partial v_i}{\partial j}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_k}{\partial i}+\frac{\partial v_i}{\partial k}\right)\right]-\left[\frac{\partial p}{\partial i}+\right. \tag{1}$$
$$\left.+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial i}\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{dy}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]$$

înlocuindu-se succesiv $i, j, k = x, y, z$;
iar condiția conservării energiei pentru particola cu masă constantă și temperatura T, prin :

$$\varrho\left(v_x\frac{\partial E}{\partial x}+v_y\frac{\partial E}{\partial y}+v_z\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial E}{\partial t}\right)-\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{dx}\left(\lambda\frac{\partial T}{Dx}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]=Q^*-p\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\eta\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2+2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\right. \tag{2}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]\right\}-\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2$$

O a cincea ecuație este dată de condiția conservării masei :

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial \varrho}{\partial t}=0 \tag{3}$$

Sistemul este completat cu relațiile care dau
— variația vîscozității cu temperatura și cu presiunea

$$\eta=\eta(T,p) \tag{4}$$

— variația coeficientului de conductivitate termică cu temperatura și cu presiunea

$$\lambda=\lambda(T,p) \tag{5}$$

precum și ecuația de stare a fluidului

$$p=f(\varrho,T) \tag{6}$$

In cazul general deci, aceste 8 ecuații urmează să servească pentru determinarea variabilelor $v_{x,y,z}$, p, T, η, ϱ și λ.

Rezolvarea unui asemenea sistem de ecuații, parte neliniare, fiind legată de dificultăți deosebite de ordin matematic, au fost îmbrățișate pînă în prezent numai unele aspecte mai simple și cu acceptarea de aproximații.

Din considerarea proceselor curgerii într-o peliculă *subțire* de lubrifiant, așa cum este cazul real, derivă simplificări care ușurează calculul și anume :

— influența foarte redusă a curburii filmului, ceea ce permite desfășurarea lui în plan ;

— neglijarea termenilor dependenți de forțele de inerție față de cei dependenți de vîscozitate ;

$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$ respectiv $\frac{\partial h}{\partial z} \ll 1$ deci $v_y \ll v_x$ și $v_y \ll v_z$ ceea ce apropie repartiția vitezei pe direcția y de cea valabilă pentru curgerea între suprafețe paralele ;

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x} ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ respectiv}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x} ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

adică posibilitatea de a neglija variațiile vitezelor pe direcția x și z față de cele pe direcția y perpendiculară pe planul curgerii.

Ipoteza densității constante transpune problema în cazul lichidelor. Korovcinski a cercetat, pe această cale, cazul suprafețelor plane cu lungime infinită. Vogelpohl și Dizioglu au studiat analitic, sub acest aspect, filmul cu grosime constantă. Soluția dată de Thelen cuprinde procesul în cazul poziției excentrice a fusului, dar nu consideră căldura cedată pereților.

Astfel fiind, în stadiul actual, pentru deducerea temperaturii lagărului se apelează la echilibrul termic, prin care în regim staționar de funcționare, căldura produsă este egalată cu cea cedată mediului exterior.

3. *Căldura produsă ca echivalent al puterii corespunzătoare frecării deduse cu legile hidrodinamicii.*

Temperatura variabilă în film duce la valori locale diferite pentru vîscozitate. Se poate totuși demonstra că valorile integrate corespund apropiat cu cele valabile pentru un film de lubrifiant cu temperatură medie constantă, ceea ce justifică acceptarea unei vîscozități medii în cazul echilibrului termic.

Alăturînd această constatare ipotezelor menționate mai sus, se desprinde între altele, concluzia că rezistența fusului la rotire, ca efect al acțiunii eforturilor unitare tangențiale, poate fi caracterizată prin expresia adimensională a lui Lagrange

$$C_f = \frac{N_f \cdot \Delta}{\eta_0 \, l \, d \, v^2} = C_f\left(\varepsilon, \frac{d}{l}, \frac{1}{C_p}, \alpha_1, \alpha_2, \eta\,(p), \varrho\,(p)\right) \tag{7}$$

în care s-a notat prin:

N_f — puterea corespunzătoare frecării;
Δ — jocul radial: $\Delta = R - r$;
η_0 — vîscozitatea într-un punct inițial;
l, d — lungimea, respectiv diametrul fusului;
v — viteza la periferia fusului, $v = r\,\omega$

Rezultă că puterea consumată prin frecare se exprimă prin relația:

$$N_f = \frac{1}{2} C_f \left[\frac{\eta_0 \, l \, d^2 \, \omega^2}{\psi}\right] \tag{8}$$

în care $\psi = \frac{\Delta}{r}$ reprezintă jocul relativ, iar C_f este o funcție adimensională multidependentă, de excentricitatea relativă $\varepsilon = \frac{e}{\Delta}$, raportul dimensiunilor $\frac{d}{l}$, expresia inversă coeficientului de portanță $\frac{1}{C_p} = \frac{\eta\,\omega}{p_m \psi^2}$, lungimea unghiulară a zonei portante delimitată prin unghiurile α_1 și α_2, variația vîscozității și densității cu presiunea $\eta(p)$, respectiv $\varrho(p)$.

Considerînd că această putere se transformă în căldură, expresia (8) permite conturarea noțiunii de *încărcare termică specifică a lagărului*, ca putere corespunzătoare frecării, raportată la unitatea de suprafață din proiecția fusului d.l:

$$\frac{N_f}{d\,l} = \frac{1}{2} C_f \left[\frac{\eta_0 \, d \, \omega^2}{\psi}\right] \quad \frac{\text{Kgfm}}{s\,m^2} \tag{9}$$

importantă pentru stabilirea legăturii cu căldura evacuată, în relația echilibrului termic.

Tabela 1

Expresia funcției C_f pentru calculul puterii consumate prin frecare

Vogelpohl	Meiners	Korovcinski	Tipei
$C_f = \frac{N_f}{dl}\left(\frac{\psi}{\eta d \omega^2}\right) = \frac{3}{2}$ pentru $C_p = \frac{p_m \psi^2}{\eta \omega} < 1$ $C_f = \frac{3}{2}\sqrt{C_p}$ pentru $C_p > 1$ Expresiile își au origina în valorile stabilite pe baza unui studiu detailat, ca fiind corespunzătoare pentru $C_p < 1$ $\frac{\mu}{\psi} = \frac{3{,}0}{C_p}$ pentru $C_p > 1$ $\frac{\mu}{\psi} = \frac{3{,}0}{\sqrt{C_p}}$	$C_f = \left(0{,}86 + 0{,}1\frac{d}{l}\right)(a c_p + b) \times$ $\times \sqrt{1 - e^{-2{,}9\frac{b}{ac_p}}}$ pentru cuzinetul circular (întreg) $a = 0{,}35$ $b = 0{,}45$ pentru semicuzinet $a = 0{,}44$ $b = 0{,}80$ a și b sînt dependente deci de lungimea înfășurării valabil pentru $0{,}2 < C_p < 20$	$C_f = \frac{\pi}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} \pm$ $\pm \frac{(1-\varepsilon)}{2} C_p \sin\beta$ valabil pentru frecarea pe întreaga periferie a fusului β — unghiul dintre linia centrelor și direcția de acționare a sarcinii. Semnul +, pentru suprafața fusului Semnul —, pentru suprafața cuzinetului	$C_f = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-1}{(1+\varepsilon)^q}\left\{\pm\left\{2-\varepsilon+\right.\right.$ $+\sum_{n=1}^{\infty}[q-1+(1-\varepsilon)(q-1-2n)]\times$ $\times\frac{(q-2)(q-3)\cdots(q-2n)}{2n!}\times$ $\times\left(\frac{2n}{n}\right)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n2}\left.\right\}+\frac{3\varepsilon}{\pi}C_p\left.\right\} =$ $= \Phi\left(\varepsilon, \frac{d}{l}, C_p, q, l_\theta\right)$ $q = \frac{\ln\frac{\eta_2}{\eta_1}}{\ln\frac{h_{max}}{h_{min}}}$ $\eta_{1,2}$ — vîscozitatea lubrifiantului în locul cu grosimea filmului h_{max}, respectiv h_{min} l_θ — lungimea de umplere a zonei divergente $l_\theta = \frac{h_{max}}{h} l$

Încărcarea termică specifică conține sensul fizic al perimatului produs $p_m v$ kgf m/m²s, dar de data aceasta corect, analitic legat de rezultatele aplicării teoriei hidrodinamice, în care este prezent efectul vîscozității.

În tabela 1 sînt redate expresiile C_f găsite de unii cercetători, considerate în formă comparabilă prin structura relației (8), folosite pentru calculul puterii corespunzătoare frecării.

Reprezentarea grafică a dependenței expresiei adimensionale $\frac{N_f}{d\,l}\left(\frac{\psi}{\eta\, d\,\omega^2}\right)$ de expresia caracteristică a portanței $C_p = \frac{p_m\,\psi^2}{\eta\,\omega}$ — deasemenea adimensională — se pretează în mod deosebit la determinarea temperaturii lagărului în stare de echilibru termic, după metoda elaborată în cadrul prezentei lucrări.

A apărut astfel util a construi curbele din fig. 1—3, pentru diferite rapoarte $\frac{l}{d}$, în urma transformărilor necesare.

Cum era de așteptat, divergența rezultatelor este cu atît mai mare cu cît raportul $\frac{l}{d}$ este mai mic, așa cum există și la raportul $\frac{\mu}{\psi}$ [5], diferențele provenind din măsura în care au fost luați în considerație factorii influenți asupra funcției C_f, precum și din faptul că, la valori mari $\frac{l}{d}$ se micșorează efectul corecțiilor introduse față de lungimea infinită a fusului.

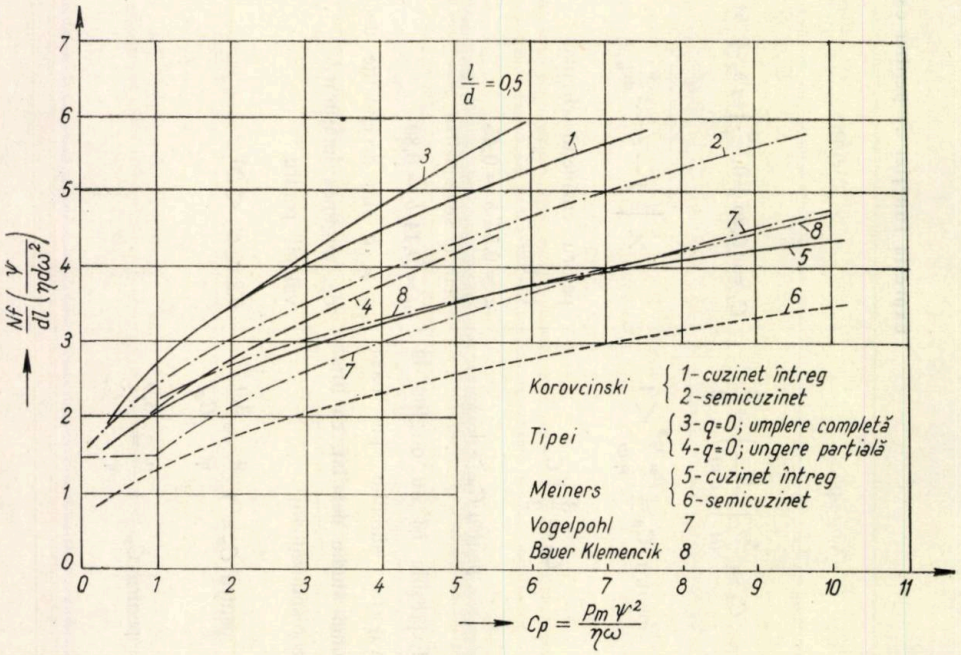


Fig. 1

Se menționează că pentru una și aceeași valoare C_p, încărcarea specifică termică a lagărului poate fi diferită, în expresia $\frac{\psi}{\eta d \omega^2}$ fiind prezent efectul mărimii diametrului, al turației, al jocului relativ și al vîscozității dependente de temperatură.

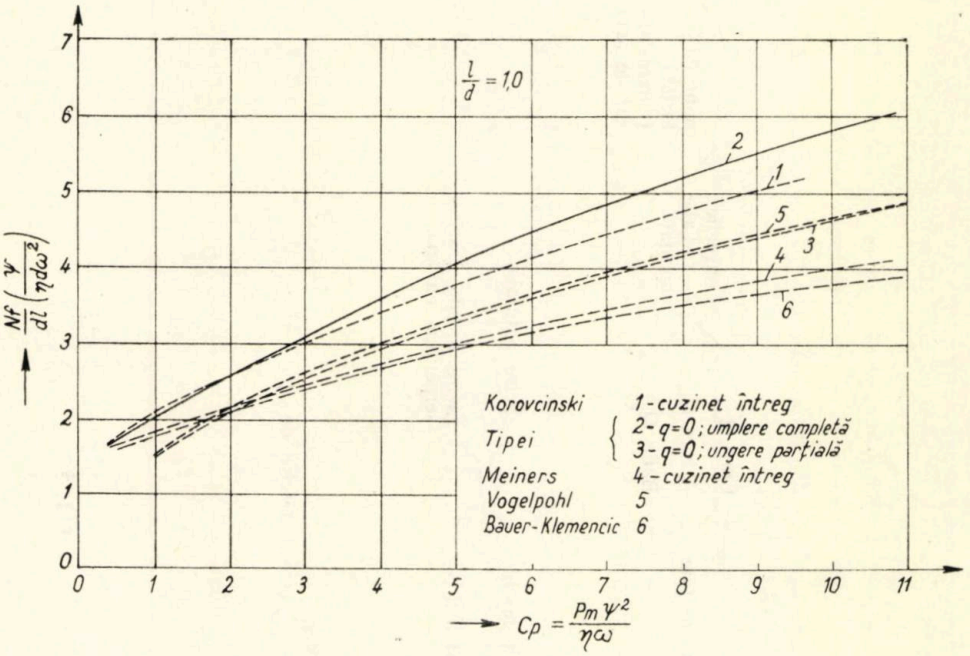


Fig. 2

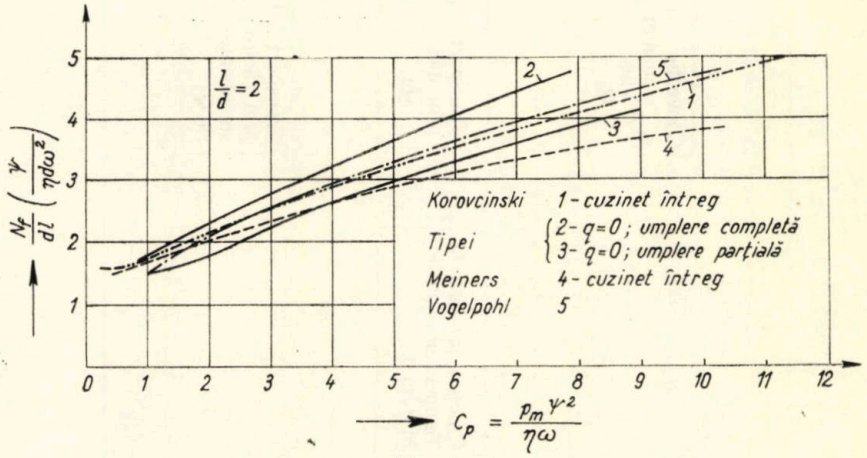


Fig. 3

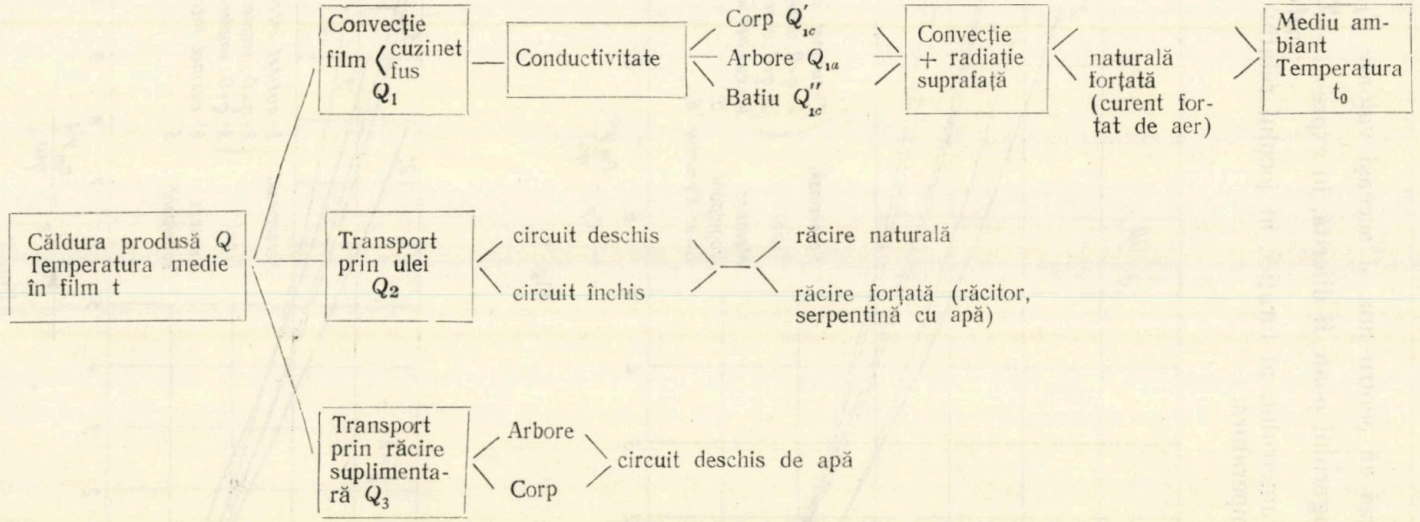

Căldura produsă Q
Temperatura medie în film t
Convecție film (cuzinet, fus) Q_1
Conductivitate
Corp Q'_{1c}
Arbore Q_{1a}
Batiu Q''_{1c}
Convecție + radiație suprafață
naturală
forțată (curent forțat de aer)
Mediu ambiant Temperatura t_0
Transport prin ulei Q_2
circuit deschis
circuit închis
răcire naturală
răcire forțată (răcitor, serpentină cu apă)
Transport prin răcire suplimentară Q_3
Arbore
Corp
circuit deschis de apă

Fig. 4

4. *Evacuarea căldurii.*

Căldura generată la rotirea fusului în cuzinet este cedată, respectiv transportată spre exterior pe căile complexe indicate în schema din fig. 4.

După mărimea încărcării termice a lagărului, buna funcționare poate impune folosirea întregului complex de căi sau poate fi suficientă una singură, de exemplu răcirea naturală.

Transportul de căldură prin conductivitate este dat de legea lui Fourier; transferul prin convecție, de legea lui Newton; iar radiația își găsește expresia cantitativă în legea lui Stefan-Bolzmann. În timp ce coeficientul de conductivitate λ kcal/m°C h este dependent în principal de natura și structura materialului străbătut de căldură și de temperatura locală, coeficientul de transfer prin convecție α_c kcal/m^2 °C h este dependent de anumite condiții ca natura și starea suprafeței care cedează căldura, parametrii fluidului ș.a., o deosebită importanță avînd viteza aerului.

De fapt, procesul de cedare a căldurii prin convecție este însoțit întotdeauna de cel de radiație și de conductivitate termică, acestea din urmă fiind însă cel mai adesea neglijabile.

În mod uzual, fără a rezulta erori apreciabile, în calculul temperaturii lagărului se face abstracție de coeficientul de transfer de căldură prin convecție de la lubrifiant la cuzinet; există însă cazuri în care eroarea poate prezenta importanță, așa cum se arată mai jos.

Deși ca procedee fizice sînt diferite, dar greu de separat, cel mai frecvent considerarea convecției și a radiației la suprafața lagărului se face prin folosirea unui coeficient global de transfer.

Calculele arată că, pentru cedarea uneia și aceleași cantități de căldură, diferența necesară $(t - t_s)$ dintre temperatura t în film și temperatura t_s a suprafeței exterioare a lagărului, în cazul cuzineților metalici, este foarte mică față de diferența $(t_s - t_0)$ dintre temperatura t_s și temperatura t_0 a mediului ambiant. Ca urmare, cînd $(t - t_0) \gg (t - t_s)$ se poate scrie

$$Q = \alpha^* A (t_s - t_0) = \alpha^* A [(t - t_0) - (t - t_s)]$$

$$Q \cong \alpha^* \cdot A (t - t_0)$$

Se ajunge astfel implicit la necesitatea conturării noțiunii de „temperatură a lagărului": se identifică aceasta cu temperatura *medie* în film, în regim staționar ceea ce, de sigur, constituie o convenție cu caracter de ipoteză.

Cedarea de căldură spre exterior influențează în mod determinant fluxul de căldură în interior.

În acest proces intervine forma complicată și cu multe variante a lagărelor reale, determinantă pentru transferul de căldură, în paralel cu variația vîscozității η cu temperatura — cu influență asupra producerii de căldură.

Rezumativ se poate scrie (fig. 8)

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (Q_{1c} + Q_{1a}) + Q_2 + Q_3 \qquad (10)$$

Tabela 2

Expresii pentru calculul căldurii evacuate prin corpul lagărului la răcirea naturală (exclusiv căldura transportată prin ulei)

Vogelpohl	Meiners	Gersdorfer	Korovcinski	Tipei
$Q_1 = \alpha \cdot A_c \cdot \Delta t$ $\alpha = 6 + 10\sqrt{w}$ kcal/m²°Ch $= 0{,}7 + 1{,}2\sqrt{w}$ kgfm²°Cs Aria exterioară a carcasei $A \cong (20 - 25)\, d^2$ d — diametrul arborelui Pentru considerarea contribuției arborelui la evacuarea căldurii, se adaogă la aria carcasei un spor pînă la 50%.	$Q_1 = W_o\, dl\, k_1\, k_2\, k_3\, k_4 \cdot \Delta t$ $W_o = 40$ kgfm/m²s°C — valoare globală de bază specifică de transfer de căldură k_1 — coeficient de formă și masivitate forma: ușoară / mijloc. / grea $k_1 = 0{,}6$ / $1{,}0$ / $1{,}5$ k_2 — coeficient de viteză a aerului w m/s: 0 / 5 / 20 $k_2 = 1{,}0$ / $1{,}8$ / $3{,}3$ k_3 — coeficient de mărime d în mm = 0,03 / 0,1 / 0,3 $k_3 =$ / $1{,}6$ / $1{,}0$ / $0{,}7$ k_4 — coef. de raport de lungime $\frac{l}{d} = 0{,}5$ / $1{,}0$ / $1{,}5$ $k_4 = 1{,}7$ / $1{,}0$ / $0{,}7$ Include cantitatea de căldură evacuată prin arbore	$Q_{1c} = \dfrac{A_{red} \cdot \Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} A \Sigma \frac{\Delta s}{f}}$ α — coeficient de transfer prin suprafața lagărului, dependent de viteza aerului λ — coeficient de conductivitate $A_{red} = \Sigma A_i \frac{\alpha_i}{\alpha}$ consideră aria suprafețelor sub acțiunea aerului cu viteza w_i $A = \Sigma A_i$ $\Sigma \frac{\Delta s}{f}$ se determină grafic, considerînd forma reală a secțiunilor lagărului, străbătute de fluxul de căldură [6]	$Q_{1c} = \alpha \pi \cdot d \cdot l \cdot \Delta t$ $= 0{,}00472\, a \dfrac{(t_c - t_o)^{1,3}}{(t - t_o)}$ t — temperatura medie a stratului de lubrifiant t_c — temperatura cuzinetului $t_c \cong t$ t_0 — temperatura mediului ambiant a — coeficient dependent de ventilație Lagăre de transmisie sau pentru motoare stabile $a=1$ Idem, lîngă șaibe rotitoare $a=2-3$ Idem, cu ventilație pe ambele părți $a=3-4$ Lagăre principale ale mașinilor cu abur și compresoare cu piston $a=4-5$ Valori speciale pentru motoare, în tab. 81 pag. 373 lucrarea originală [2]	$Q_c = \alpha \cdot A \cdot \Delta t$ conform relației stabilite de Leloup $\alpha = 1{,}8 \left[1 + \dfrac{K_1}{\left(\frac{l}{d}\right)^2} \times \right.$ $\left. \times \left(\frac{d}{0{,}027}\right)^2 + K_2\sqrt{w} \right] K_3 +$ $+ 24{,}1 \cdot 10^{-6}\, K_3^4\, (\Delta t)^3$ m kgf/m²s °C Lagăre frontale $K_1 = 0{,}5$ Lagăre intermed. 1,0 Aer staționar $K_2 = 0$ Lagăr ventilat pe o parte 0,5 Lagăr ventilat pe ambele părți 1,0 Lagăr cu corp masiv $K_3 = 1$ Lagăr cu ungere inelară 0,8—0,9 Formulă valabilă pînă la $\Delta t = 40°$ C

Raportînd cantitatea de căldură evacuată, la proiecția fusului $d.l$, introducem aci noțiunea de *capacitate specifică de evacuare a căldurii* $\frac{Q}{d \cdot l}$ caracteristică lagărului, în kcal/cm² h sau kgfm/m² s, dependentă de natura materialului, de elementele constructive și de condițiile exterioare (viteza aerului, temperatura mediului ambiant). Folosirea acestei noțiuni, conjugată cu cea a încărcării termice specifice, permite determinarea temperaturii de regim cu considerarea rezultatelor teoriei hidrodinamice, în paralel cu cea a condițiilor constructive — legate de parametrii cerți d și l — precum și a celor funcționale.

In tabela 2 sînt conținute cîteva formule mai recente de exprimare a cantității de căldură Q_{1c}.

Curbele din fig. 5 confirmă încă odată cercetările efectuate de Stribeck, Leloup, Gottwein din care rezultă că în domeniile interesante, α poate fi considerat foarte puțin dependent sau aproape independent de temperatură. Ușoara variație marcată de curbe este datorită deplasării mai active a aerului. Ipoteza acestei independențe în calculul temperaturii lagărului poate fi deci apreciată ca reprezentînd o realitate și nu numai o simplificare de calcul.

Fig. 5 evidențiază dependența coeficientului α de viteza aerului care, după cum se constată, este importantă.

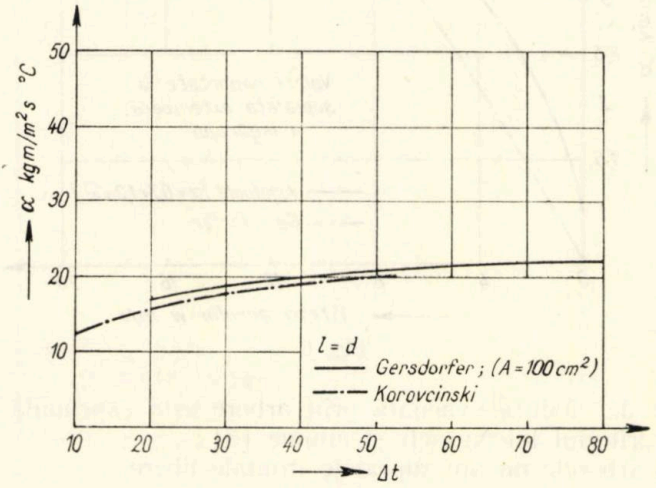


Fig. 5

In orice caz cantitatea de căldură evacuată prin corpul lagărului și cedată mediului ambiant poate fi exprimată în forma

$$Q_{1c} = \alpha^*(w) \cdot k^* \cdot d \cdot l \cdot \Delta t \qquad (11)$$

în care α^* reprezintă un coeficient global de transfer dependent în primul rînd de viteza aerului, iar k^* un coeficient de masivitate a lagărului.

Raportul dintre suprafața exterioară a lagărului și proiecția fusului variază în limite destul de largi, după categoria constructivă în care

poate fi încadrat lagărul. În medie se poate socoti cu $A = (20—25)\ d^2$. [3]. Referind coeficientul de transfer de căldură α^* la proiecția fusului $d \cdot l$, curbele care redau dependențele lui de viteză se plasează diferit după valoarea raportului $\frac{A}{d^2}$ (fig. 7).

În fig. 8 s-a reprezentat cîmpul închis de curbele capacității specifice de transfer de căldură $\frac{Q_{1c}}{d \cdot l}$ în dependență de căderea de temperatură Δt prin aplicarea valorilor extreme ale coeficienților de masivitate din tabela 2.

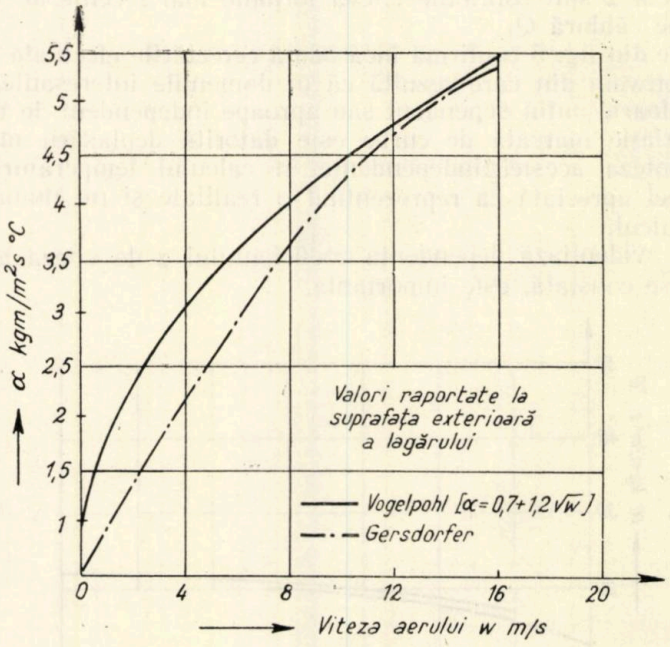


Fig. 6

Cantitatea de căldură evacuată prin arbore este exprimată prin relații care conțin criteriul lui Nusselt și anume [3] :

— cînd arborele nu are suprafețe frontale libere

$$Q_{1a} = \frac{\pi}{2} \lambda_a \cdot d \sqrt{Nu}\, \mathrm{tg}\, h \left(2 \frac{l}{d} \sqrt{Nu} \right) \tag{12}$$

— pentru arborele cu suprafață frontală liberă

$$Q_{1a} = \frac{\pi}{2} \lambda_a\, d \sqrt{Nu}\, \frac{0{,}5 \sqrt{Nu} + \mathrm{tg}\, h \left(2 \frac{l}{d} \sqrt{Nu} \right)}{1 + 0{,}5 \sqrt{Nu}\, \mathrm{tg}\, h \left(2 \frac{l}{d} \sqrt{Nu} \right)} \tag{12 bis}$$

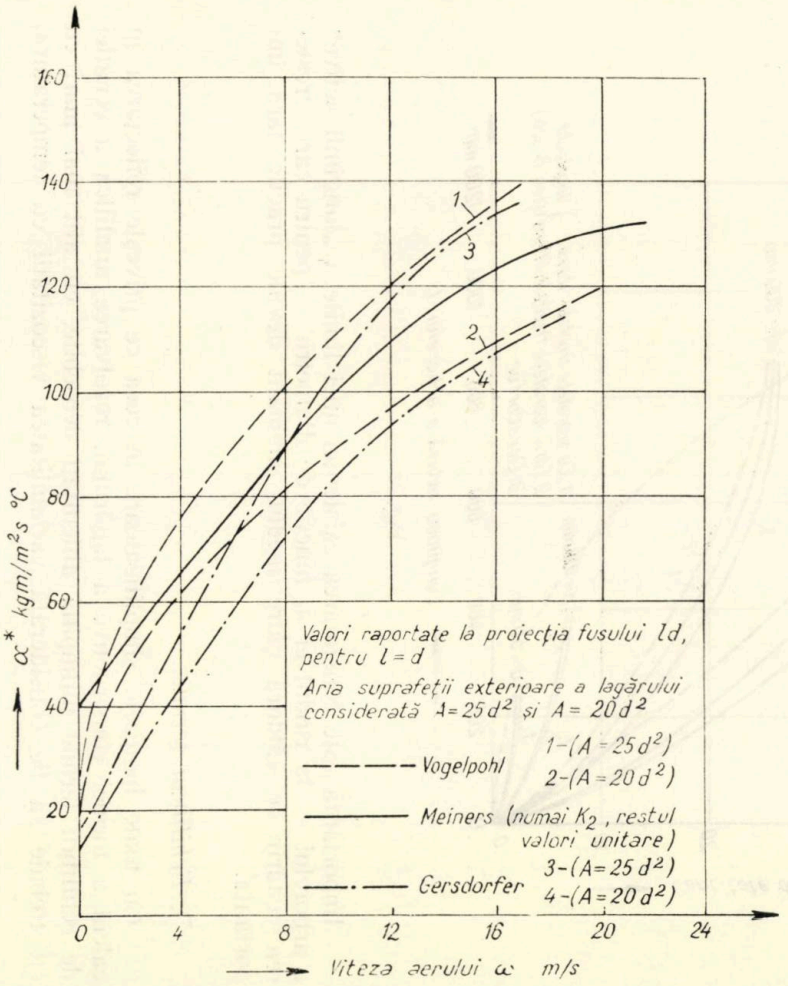

160
140
120
100
80
60
40
20
0
4
8
12
16
20
24
α* kgm/m²s °C
Viteza aerului ω m/s
1
2
3
4
Valori raportate la proiecția fusului ld, pentru l = d
Aria suprafeței exterioare a lagărului considerată A = 25 d² și A = 20 d²
Vogelpohl
1-(A = 25 d²)
2-(A = 20 d²)
Meiners (numai K2, restul valori unitare)
Gersdorfer
3-(A = 25 d²)
4-(A = 20 d²)

Fig. 7

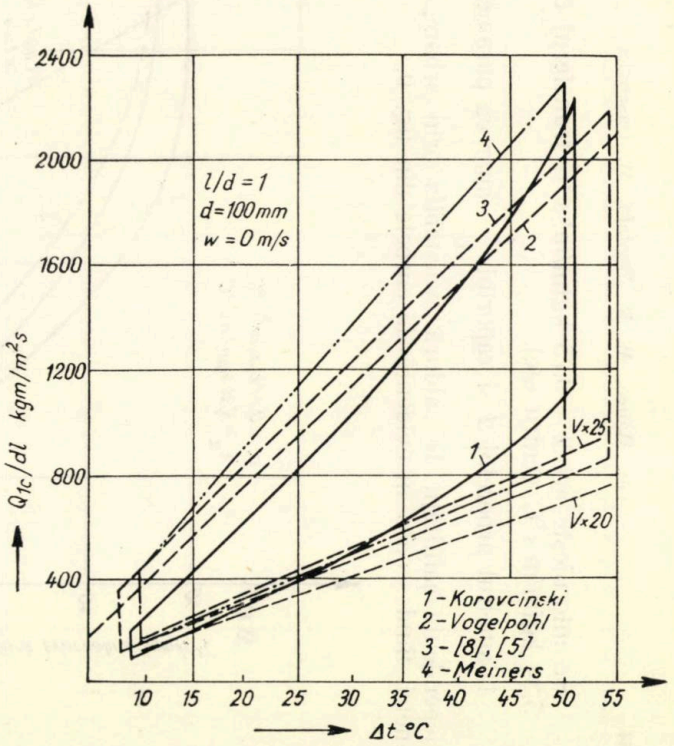

2400
2000
1600
1200
800
400
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
Q1c/dl kgm/m²s
Δt °C
l/d = 1
d = 100 mm
w = 0 m/s
1
2
3
4
V×25
V×20
1 - Korovcinski
2 - Vogelpohl
3 - [8], [5]
4 - Meiners

Fig. 8

Se înlocuiește aci $\alpha = 0{,}75$ kgfm/m² s °C **transferul oțel - aer** și $\lambda_a =$ $= 5{,}34$ kgfm/m s °C pentru oțel.

Diametrul arborelui d și raportul $\frac{l}{d}$ apar ca parametri determinanți, dependența cantității de căldură evacuabilă prin arbore, de acești parametri, fiind scoasă în evidență de curbele din fig. 9.

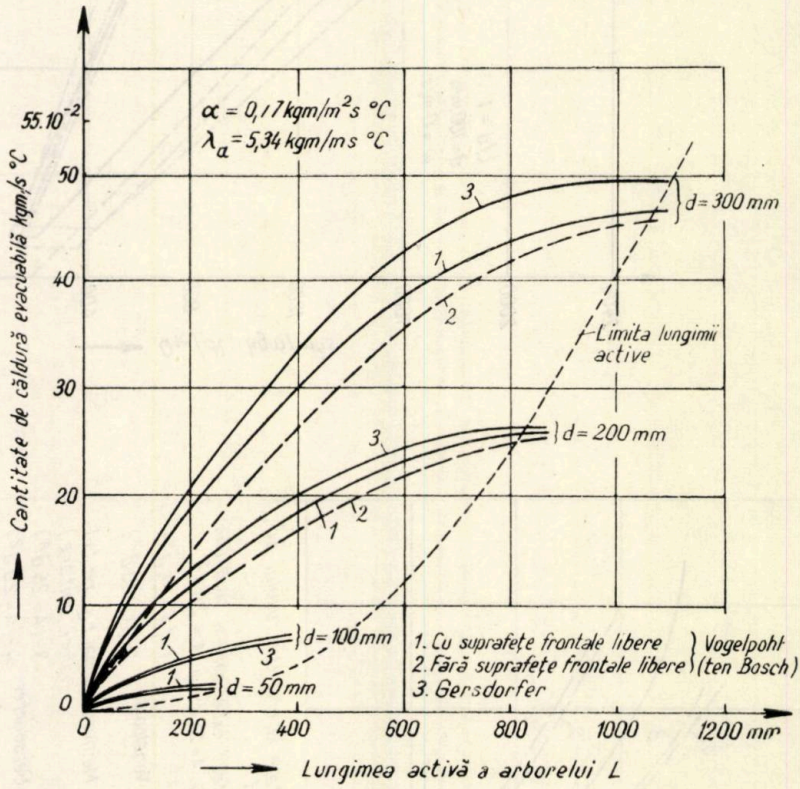


Fig. 9

Importantă este constatarea existenței unei limite a „lungimii active" a arborelui — la rîndul ei în funcție de diametru — pentru care, creșterea cedării de căldură către mediul ambiant devine practic fără importanță.

5. *Echilibrul termic.*

Cu toate ipotezele simplificatoare în ceea ce privește reflectarea în calcul a formei constructive a lagărului, rezolvarea analitică a ecuației de echilibru termic întîmpină dificultăți deosebite, cu atît mai mari cu cît trebuie să fie considerată variabilitatea vîscozității cu temperatura.

Raportarea cantității de căldură (respectiv de energie) la proiecția fusului, introducerea coeficientului global de transfer $\alpha^*(w)$ pentru carcasă, permit exprimarea acestui echilibru în forma

$$\frac{N_f}{dl}=\frac{Q}{dl}=\left[\alpha^*(w)\cdot k^*+Q_{1a}^*+427\,c_0\,q^*\,\gamma\,\frac{t_e-t_i}{\Delta t}\right]\Delta t+\frac{Q_3}{dl}\ \frac{\text{m Kgf}}{\text{s m}^2} \quad (14)$$

în care s-a notat în plus prin :

$$Q_{1a}^*=\frac{Q_{1a}}{d\cdot l}$$

$q^*=\frac{q}{d\cdot l}$ debitul „specific de ulei", raportat la proiecția fusului ;

c_0 — căldura specifică a uleiului ;

γ — greutatea specifică a uleiului ;

t_i, t_e — temperatura uleiului la intrarea, respectiv la ieșirea din lagăr.

In cazul răcirii *naturale,* termenul al treilea din paranteză este neglijabil ; prezența lui duce în orice caz la o micșorare a temperaturii față de cea calculată. Termenul care conține pe Q_3 intervine rar.

6. *Temperatura filmului ca bază primară a metodei de calcul.*

Metodele folosite pînă în prezent presupun în primul rînd determinarea parametrilor posibil de obținut cu relațiile date de teoria hidrodinamică și, ulterior, verificarea temperaturii de funcționare. Aceasta implică deci aproximarea temperaturii de regim, coeficientul de portanță incluzînd vîscozitatea lubrifiantului. Astfel, fiind, nepotrivirile ulterioare impun refacerea calculului.

Considerațiile de mai sus permit desfășurarea unei metode grafo-analitice care elimină incertitudinea semnalată.

Datele inițiale ale problemei — sarcina P kgf, viteza de rotație a fusului n rot/min., scopul lagărului — sînt suficiente pentru alegerea tipului potrivit de lagăr, determinarea parametrilor geometrici d, l și $\frac{l}{d}$ din condițiile de rezistență, alegerea jocului relativ ψ și a uleiului corespunzător.

Folosind curbele $\frac{N_f}{d\cdot l}\left(\frac{\psi}{\eta\, d\,\omega^2}\right)=f\left(\frac{p_m\,\psi^2}{\eta\,\omega}\right)$, se calculează pentru 3—4 temperaturi t_1, t_2, t_3... încărcările specifice $\frac{N_f}{d\cdot l}=f(t)$, introducîndu-se de fiecare dată valoarea vîscozității η la temperatura respectivă (fig. 10).

Cu o valoare α^* luată din curba conținută în fig. 8, corespunzătoare condițiilor de circulație a aerului, și cu un coeficient k^*, ales după masivitatea lagărului, se obține produsul $\alpha^*(w)\cdot k^*$.

Curbele din fig. 9 permit determinarea cantității de căldură evacuate prin arbore Q_{1a}, respectiv $Q_{1a} = \frac{Q_{1a}}{dl}$, în funcție de locul de montaj.

Calculînd acum valorile $[\alpha^*(w) \cdot k^* + Q_{1a}] \Delta t$ pentru temperaturile $t_1, t_2, t_3 \ldots$ de mai sus, se trasează curba de evacuare (fig. 10). Punctul

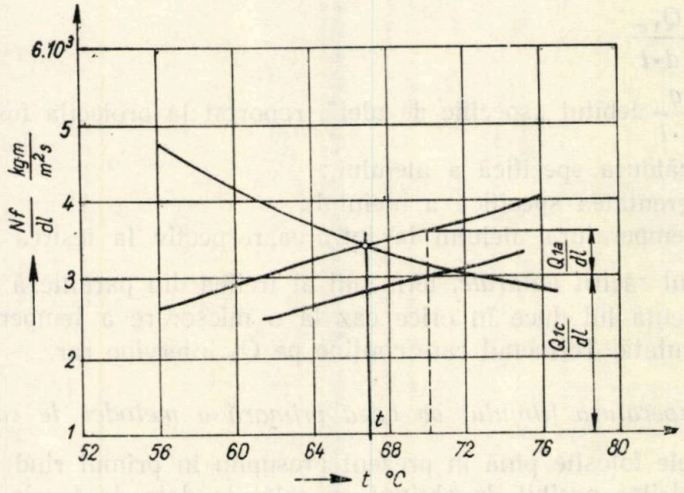


Fig. 10

de intersecție va da temperatura în starea de echilibru termic și cu răcire naturală.

Apare aci aducerea în acord a încărcării termice a lagărului legată de portanță, respectiv de procesul ungerii, cu capacitatea lui de evacuare a căldurii, condiționată de material, masivitate și condiții exterioare, deci un mod de a considera problema similar cu cel din calculele de rezistență, în care solicitarea efectivă a piesei este comparată cu rezistența admisibilă pentru cazul corespunzător.

Cu temperatura astfel obținută, se determină coeficientul de portanță C_p corespunzător stării de echilibru termic.

Din curbele de portanță, rezultă $\delta = \frac{h_{min}}{\Delta}$ (fig. 11)

Cu δ determinat și raportul $\frac{l}{d}$ luat anterior din curbele de debit (fig. 12), se obține debitul specific de ulei q_z^* necesar pentru înlocuirea uleiului pierdut pe la capete.

7. *Influența bucșei din materiale plastice.*

Materialele plastice sînt caracterizate printr-o slabă conductivitate termică în comparație cu metalele, așa cum rezultă din tabela 3.

Pentru a scoate în evidență efectul izolant al unei bucșe din material plastic — poliamidă — vom considera transferul de căldură printr-un cuzinet cilindric.

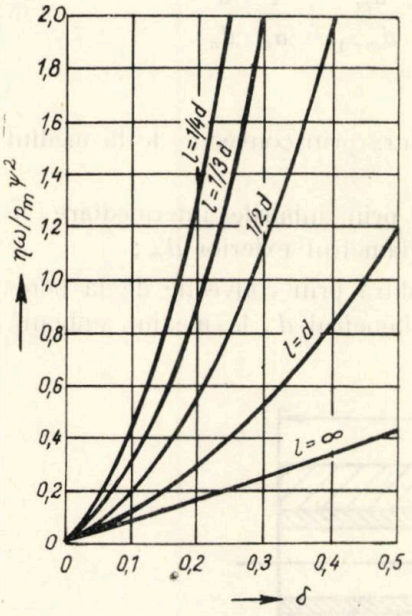


Fig. 11

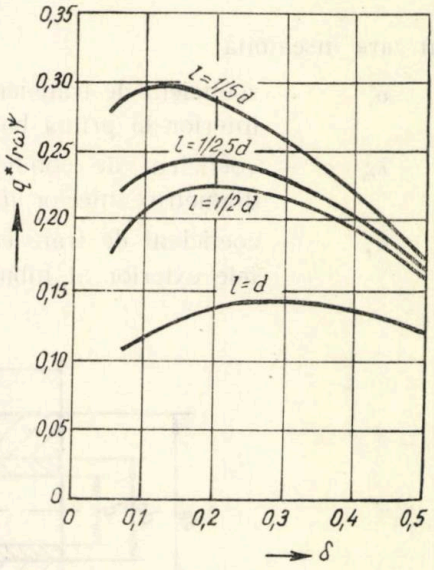


Fig. 12

Tabela 3

Coeficientul de conductivitate termică λ pentru unele materiale

Materialul	la $t = 20°C$		la $t = 100°C$	
	k cal / m h °C	m kgf / m s °C	k cal / m h °C	m kgf / m s °C
Metal de lagăre cu Sn,	50—60	5,9—7,1	40—50	4,7—5,9
Bronz cu Sn	50—70	5,9—8,3	45—65	5,3—7,7
Bronz cu Al	70—80	8,3—9,5	60—70	7,1—8,3
Alamă	93	11,0	103	12,2
Oțel cu conținut mediu de C	45—50	5,3—5,9	40—45	4,7—5,3
Fontă cenușie	88—55	5,7—6,5	43—50	5,1—5,9
Textolit	0,20—0,30	0,024—0,036	0,20—0,30	0,024—0,036
Poliamide	0,25—0,30	0,030—0,036	0,25—0,30	0,030—0,036

Coeficientul global de transmisie a căldurii printr-un tub cu mai multe straturi din material diferit, avînd diametrul interior d, diametrul exterior d_n, diametrele straturilor intermediare d_m, în cazul cînd acesta se raportează la suprafața interioară a tubului, este dat de expresia

$$\alpha^* = \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_1^n \frac{d}{2\lambda_m} \ln \frac{d_m}{d_{m-1}} + \frac{1}{\alpha_e} \cdot \frac{d}{d_n}}$$

în care înseamnă

α_i — coeficient de transfer de căldură prin convecție de la mediul interior la prima bucșă ;

λ_m — coeficient de conductivitate prin tuburile intermediare cu diametrul interior d_{m-1} și diametrul exterior d_m ;

α_e — coeficient de transfer de căldură prin convecție de la peretele exterior al tubului cu diametrul d_n la mediul ambiant.

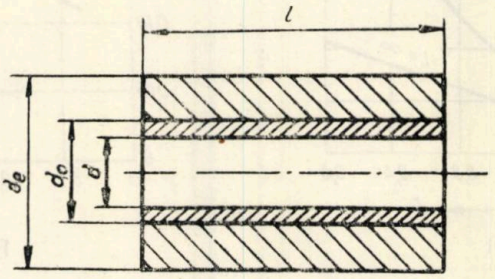


Fig. 13

Localizînd acest coeficient la cuzinetul cilindric cu bucșă interioară (fig. 13) devine :

$$\alpha^* = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{2\lambda_B} \ln \frac{d_0}{d} + \frac{d}{2\lambda_c} \ln \frac{d_e}{d_c} + \frac{1}{\alpha_e} \cdot \frac{d}{d_e}} \qquad (14)$$

S-a notat aci prin λ_c coeficientul de conductivitate prin bucșă ; iar prin λ_B, valoarea acestui coeficient pentru cuzinet.

Deși foarte frecvent se neglijează termenul $\frac{1}{\alpha_i}$ care conține coeficientul de transfer de căldură de la lubrifiant la cuzinet, eroarea care se face

nu este totdeauna de desconsiderat. Intensitatea acestui schimb de căldură este redată prin criteriul lui Nusselt, avînd aci interpretarea

$$Nu = \frac{\alpha_i \cdot \Delta}{\lambda_0} = \frac{\alpha_i (R - r)}{\lambda_0}$$

S-a notat prin Δ — jocul radial și prin λ_0 coeficientul de conductivitate al lubrifiantului.

Pe de altă parte se demonstrează că din combinarea criteriilor de similitudine Nusselt, Prandl și Reynolds, prin intermediul criteriului lui Péclet [11] rezultă în cazul de față

$$Nu = 2{,}25 \sqrt[3]{\psi \cdot Re} \sqrt[8]{Pr}$$

sau

$$\alpha_i = 2{,}25 \sqrt[3]{\psi \cdot Re} \sqrt[8]{Pr} \frac{\lambda_0}{\Delta} \qquad (15)$$

în care înseamnă:

Re — criteriul lui Reynolds $Re = \dfrac{v \cdot \Delta}{\nu}$

Pr — criteriul lui Prandl $Pr = \dfrac{g \eta_0 c_0}{\lambda_0} = \dfrac{c_0 \lambda \nu}{\lambda_0}$

c_0 — căldura specifică
λ_0 — coeficientul de conductivitate } a uleiului
λ — greutatea specifică

Pentru a se constata ordinul de mărime, în tabela 4 sînt redate valorile coeficientului de transfer α în cazul unui diametru al fusului $d = 100$ mm și a unei viteze periferice $v = 1$ m/s.

Tabela 4

Valori ale coeficientului α_i
($d = 100$ mm ; $v = 1$ m/s).

Vîscozitatea cinematică		pentru jocul relativ					
		$\Psi = 2$ 0/00		$\Psi = 4$ 0/00		$\Psi = 8$ 0/00	
cst	m²/s	k cal / m² h °C	kgf·m / m² s °C	k cal / m² h °C	kgf·m / m² s °C	k cal / m² h °C	kgf·m / m² s °C
10	1.10^{-5}	480	57,9	370	44,0	300	35,6
20	2.10^{-5}	420	49,0	340	40,4	265	31,5
30	3.10^{-5}	380	45,1	300	35,6	240	28,5
40	4.10^{-5}	360	42,7	285	33,8	225	26,8
50	5.10^{-5}	340	40,4	270	32,0	215	25,6

Înlocuind bucșa interioară din bronz prin bucșă din material plastic, raportul celor doi coeficienți globali de transfer de căldură α^*_{mp} (pentru material plastic) și α^*_{Bz} (pentru bronz) va fi

$$\frac{\alpha^*_{Bz}}{\alpha^*_{mp}} = \frac{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{2\lambda_{mp}} \ln\frac{d_0}{d} + \frac{d}{2\lambda_c} \ln\frac{d_e}{d_0} + \frac{1}{\alpha_e}\cdot\frac{d}{d_e}}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{2\lambda_{Bz}} \ln\frac{d_0}{d} + \frac{d}{2\lambda_c} \ln\frac{d_e}{d_0} + \frac{1}{\alpha_e}\cdot\frac{d}{d_e}} \tag{16}$$

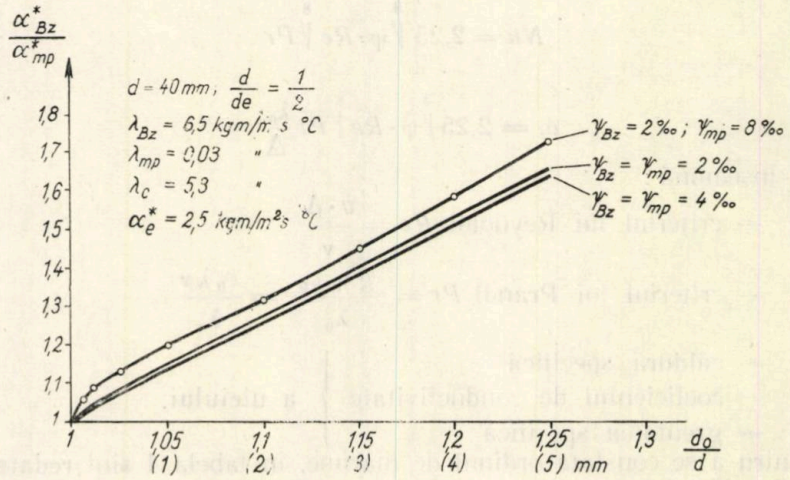


Fig. 14

Exemplul numeric din tabela 5 scoate în evidență efectul izolator al bucșei din material plastic.

În fig. 15 este reprezentată dependența raportului $\frac{\alpha^*_{Bz}}{\alpha^*_{mp}}$ de grosimea bucșei din masă plastică pentru diametrul arborelui $d = 40$ mm; iar fig. 16 scoate în evidență poziția acestor curbe pentru diametre diferite d.

Tabela 5

d mm	d_o mm	d_e mm	a_i kgfm/m² s °C, $\Psi = 2‰$	a_i kgfm/m² s °C, $\Psi = 8‰$	α_e kgfm/m² s °C	λ kgfm/ms °C, Bz	λ kgfm/ms °C, masă plast.	λ kgfm/ms °C, OL	$\frac{\alpha^*_{Bz}}{\alpha^*_{mp}}$
40	50	80	45	30	2,5	6,5	0,03	5,3	1,8

Se remarcă :

a) După cum este cunoscut, buna funcționare a bucșelor din material plastic poate fi asigurată numai cu jocuri relative mari, ceea ce a determinat introducerea în calcul a unor asemenea jocuri. Chiar dacă

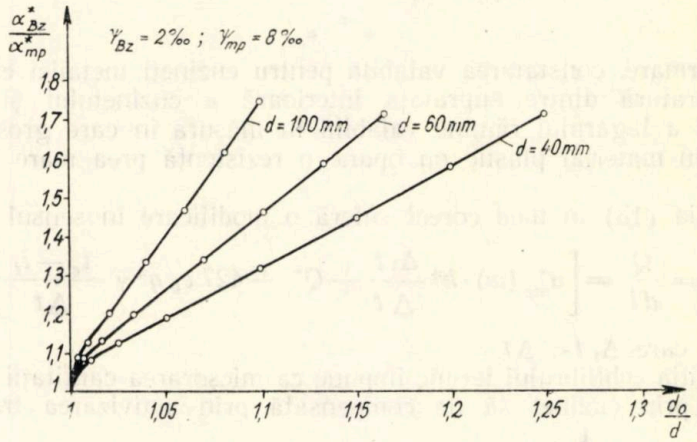


Fig. 15

s-ar presupune jocuri relative apropiate de cele valabile pentru metale, ordinul de mărime al raportului se menține.

b) În cazul bucșelor din material plastic, termenul al treilea din numărătorul fracției relației (16) privind coeficientul de transfer prin corpul cuzinetului propriu zis este, ca ordin de mărime, lipsit de impor-

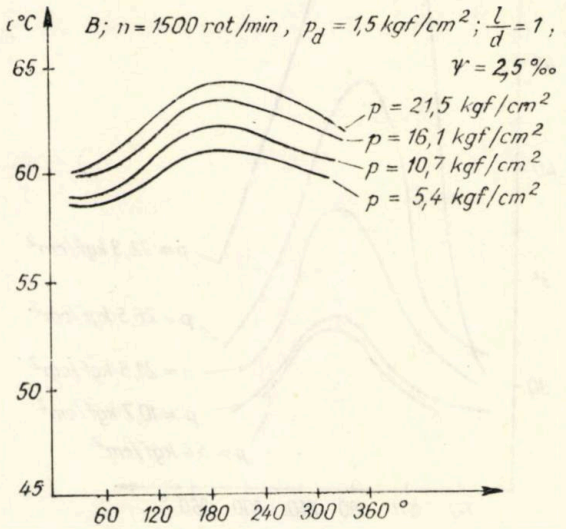


Fig. 16

tanță. La bucșa metalică, devin neglijabili ambii termeni referitori la conductivitatea prin corpurile metalice.

c) Termenul legat de convecție lubrifiant-bucșă este de un multiplu ori mai mic decît cel referitor la convecția cuzinet-mediu ambinat, dar poate prezenta totuși importanță.

* * *

Ca urmare, constatarea valabilă pentru cuzineți metalici că diferența de temperatură dintre suprafața interioară a cuzinetului și suprafața exterioară a lagărului rămîne valabilă în măsura în care grosimea cuzinetului din material plastic nu opune o rezistență prea mare la trecerea căldurii.

Relația (13) în mod corect suferă o modificare în sensul

$$\frac{N_f}{dl} = \frac{Q}{dl} = \left[\alpha^*_{mp}(w) \cdot k^* \frac{\Delta_1 t}{\Delta t} + Q^*_{1a} + 427\, c_0\, q^*\, \gamma\, \frac{t_e - t_l}{\Delta t} \right] \Delta t \qquad (17)$$

relație în care $\Delta_1 t < \Delta t$.

Condiția echilibrului termic impune ca micșorarea cantității de căldură evacuată prin cuzinet să fie compensată prin activizarea transportului

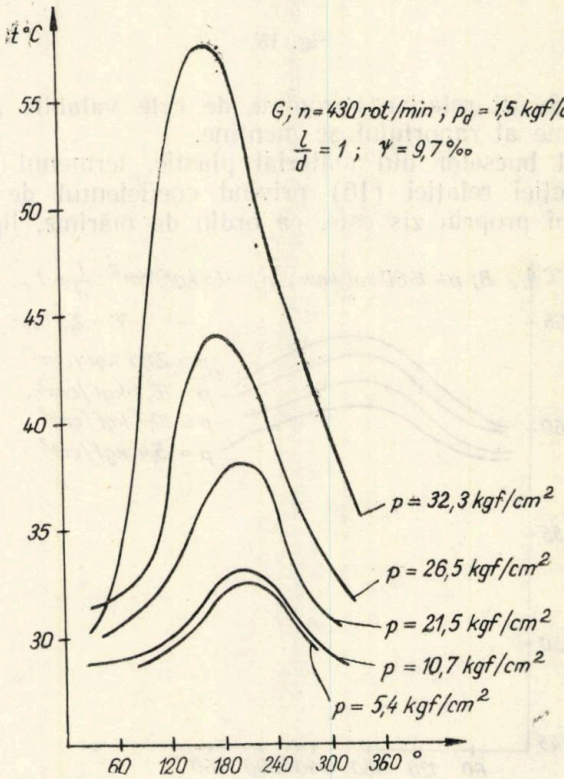


Fig. 17

căldurii prin ulei, ceea ce este de fapt realizabil, jocurile relative în cazul cuzineților din mase plastice fiind mari.

A doua consecință este — așa cum arată curbele determinate experimental — modificarea cîmpului de temperatură în film: (fig. 16), valabilă pentru bucșa metalică și (fig. 17), valabilă pentru bușca din material plastic.

La bucșele din material plastic, în cazul încărcărilor mari, vîrfurile de temperatură pot depăși considerabil temperatura medie din film și deveni chiar periculoase pentru funcționare. Aceasta explică topirea locală și alunecările mici de suprafață constatate experimental.

Variația mare a temperaturilor locale duce totodată la variații locale mari ale vîscozității. Se ridică și sub acest aspect problema adaptărilor necesare în aplicarea teoriei hidrodinamice în cazul bucșelor cu grosime mare din material plastic

Catedra organe de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Meiners K.:* Beiträge zur Gleitlagerberechnung V.D.I. — Forschungsheft 488—1961.
2. *Коровчинский В. М.* Теоретические основы работы родшипников скольжения. Машгиз 1959.
3. *Vogelpohl G:* Betriebssichere Gleitlager Springer — Verlag 1958.
4. *Meiners K:* Die Berechnung der Gleitlager — Temperatur auf allgemeiner Grundlage V.D.I. — Zeitschrift Bd. 104 1962 H. 20 p. 893.
5. *Manea Gh., Mustafa M., Aldea M.:* Asupra calculului lagărelor radiale prin alunecare, unse cu lichide, pe baza teoriei hidrodinamice. Metalurgia și construcția de mașini 1956 Nr. 8 p. 5.
6. *Gersdorfer G.:* Die Berechnung der Betriebstemperatur von Gleitlagern. Maschinenbau und Wärmewirtschaft 10 Jahrg. 1955. H .3, p. 69; H. 6, p. 184; H. 7, p. 219; H. 8, p. 233.
7. *Hamburger L.:* Introducere în teoria propagării căldurii. Ed. Acad. R.P.R. 1955.
8. *Manea Gh. și colaboratorii:* Organe de mașini Vol. I. Ed. Tehnică 1956.
9. *Tipei N., Constantinescu N. V., Nica Al., Biță O.:* Lagăre cu alunecare. Ed. Acad. R.P.R. 1961.
10. *Manea Gh. Mustafa M.:* Contribuții la calculul lagărelor axiale cu alunecare. Buletinul Institutului politehnic București Tom. XXIII. Fasc. 2, 1961 p. 97.
11. *Чернавский С. А.;* Подшипники скольжения. машгиз 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. : 624.023.9:624.075.2/.3

FLAMBAJUL LATERAL SIMETRIC ȘI ANTISIMETRIC AL GRINZILOR PENDULARE SUB SARCINI TRANSVERSALE *

VICTOR DROBOTĂ

A. Flambajul lateral simetric al grinzilor continue pendulare sub sarcini concentrate

Intr-un articol publicat mai înainte (1) s-au stabilit relațiile ce dau sarcina critică de flambaj pentru grinda continuă, asupra căreia acționa o singură forță concentrată situată pe mijlocul uneia din deschiderile grinzii.

In acest articol se vor stabili relațiile care dau sarcina critică de flambaj pentru grinda continuă asupra căreia acționează mai multe sarcini concentrate

Pentru rezolvarea acestei probleme, se păstrează aceleași ipoteze pe baza cărora s-au stabilit relațiile din lucrarea amintită și anume :

— grinda are rigiditate transversală mică ;

— reazimele sînt echidistante și așezate la distanța $\frac{h}{2}$ deasupra axei grinzii și permit rotirea acesteia în orice direcție ;

— locul de aplicare al sarcinii este la distanța $\frac{h}{2}$ sub axa grinzii ;

— punctele de rezemare și cele de aplicarea sarcinilor se găsesc pe axa principală de inerție a secțiunii transversale a grinzii inițial în plan vertical.

La acestea se mai adaugă ipoteza că pe fiecare interval dintre două reazime acționează o sarcină concentrată situată la mijlocul intervalului.

Pentru o anumită valoare a sarcinii grinda părăsește poziția inițială de echilibru și ia o poziție rotită față de verticală și încovoiată lateral.

*) Manuscris predat la redacție la 25 ianuarie 1965.

Datorită modului de încărcare propus, după flambaj, axa deformată a grinzii poate fi situată de aceeaşi parte a liniei care uneşte reazimele (flambaj simetric) sau poate fi situată alternativ de o parte şi de alta a acestei linii (flambaj antisimetric).

În cuprinsul articolului de faţă se vor studia câteva cazuri de flambaj simetric şi antisimetric la asemenea grinzi, stabilindu-se valorile sarcinilor critice pentru fiecare caz în parte şi condiţiile în care o grindă de acest fel flambează simetric sau antisimetric.

1. *Grinda pe trei reazime* (fig. 1)

Rezolvarea acestei probleme se va face folosind metoda energetică. Pentru aceasta este necesară stabilirea momentului din reazimul intermediar pe direcţia axei y.

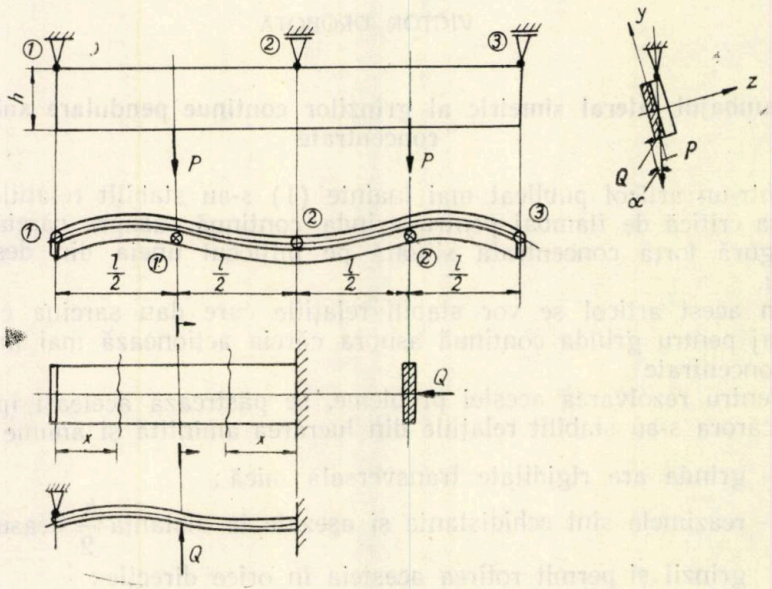


Fig. 1.

Aplicînd relaţia lui Clapeyron se obţine

$$2M_2 l + 6A_2 = 0 \quad ; \quad A_2 = \frac{Pl^2\alpha}{8} \quad \text{rezultă} \quad M_2 = -\frac{3Pl\alpha}{16}$$

unde α este unghiul de rotire al axei y faţă de verticală.

Din considerente de simetrie ecuaţiile de momente încovoietoare, lucrul mecanic de deformaţie al forţelor interioare şi lucrul mecanic exterior se vor scrie numai pentru jumătate din lungimea totală a grinzii.

Ecuațiile de momente încovoietoare pe direcția axei y, pentru diverse porțiuni de grindă vor fi

$$M_{11'} = \left(\frac{P}{2} - \frac{3}{16}P\right) x\alpha = \frac{5}{16} P x \alpha ;$$

$$M_{1'2} = \left[\frac{P}{2}x - \frac{3}{16} Pl\frac{(l-x)}{l}\right]\alpha = \frac{P\alpha}{16}(11x - 3l).$$

Lucrul mecanic de deformație al forțelor interioare este egal cu

$$L_i = \frac{1}{2EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{5}{16}Px\alpha\right)^2 dx + \int_0^{\frac{l}{2}}\left[\frac{P\alpha}{16}(11x - 3l)\right]^2 dx\right].$$

Efectuînd integralele se obține pentru L_i valoarea

$$L_i = \frac{7P^2\alpha^2 l^3}{2^9 \times 3EI_y}.$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare se datorește atît deplasării pe verticală a sarcinii, cît și rotirii acesteia față de verticală cu unghiul α.

Lucrul mecanic datorit deplasării pe verticală a sarcinilor este dat de relația

$$L_{e_1} = \frac{P}{EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{5}{16}\right)^2 Px^2\alpha^2 dx + \int_0^{\frac{l}{2}}\frac{P}{16^2}\alpha^2(11x - 3l)^2 dx\right] = \frac{7P^2\alpha^2 l^3}{2^8 \times 3EI_y}$$

Lucrul mecanic datorit rotirii sarcinilor față de verticală este dat de relația

$$L_{e_2} = -\frac{Ph\alpha^2}{2}.$$

Lucrul mecanic exterior este deci

$$L_e = L_{e_1} + L_{e_2} = \frac{7P^2\alpha^2 l^3}{2^8 \times 3EI_y} - \frac{Ph\alpha^2}{2}.$$

Egalînd expresiile lucrurilor mecanice, interior și exterior, se obține

$$\frac{7P^2\alpha^2 l^3}{2^9 \times 3EI_y} = \frac{7P^2\alpha^2 l^3}{2^8 \times 3EI_y} - \frac{Ph\alpha^2}{2}$$

de unde rezultă valoarea sarcinii critice

$$P_f = \frac{2^8 \times 3}{7}\frac{EI_y h}{l^3} = 109{,}7\frac{EI_y h}{l^3}. \qquad (1)$$

2. *Grinda pe mai mult de trei reazime*

Pentru grinzi sprijinite pe mai multe reazime încărcate cu sarcini concentrate aplicate pe mijlocul deschiderilor grinzii se procedează întocmai ca în cazul studiat.

În tabela 1 sînt trecute valorile sarcinilor critice obținute pentru cîteva cazuri studiate.

B. Flambajul lateral antisimetric al grinzilor continue cu pendulare sub sarcini concentrate

1. *Grinda pe trei reazime* (fig. 2)

In acest caz reazimul din mijloc al grinzii se comportă ca un reazim care permite încovoierea și răsucirea grinzii, dar nu permite rotirea acesteia.

Din considerente de simetrie rezolvarea acestui caz se poate face luînd în considerație numai jumătate din întreaga lungime a grinzii.

Pentru stabilirea expresiei care dă valoarea sarcinii critice de flambaj, se va aplica metoda energetică de calcul. În acest caz, deoarece deformațiile la răsucire ale grinzii nu mai pot fi neglijate, la scrierea ex-

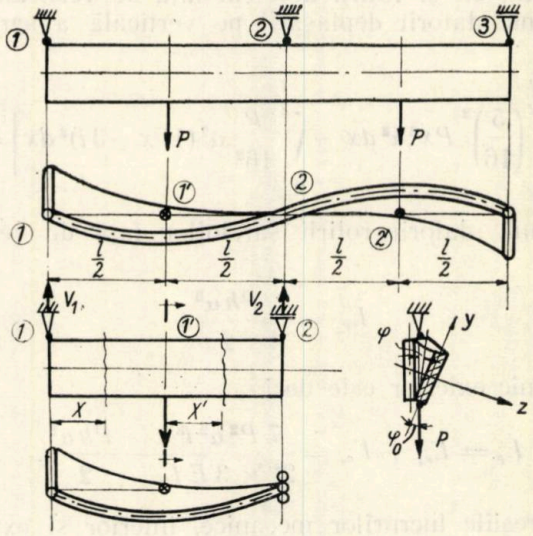


Fig. 2.

presiei lucrului mecanic al forțelor interioare se va lua în considerație și lucrul mecanic de deformație de răsucire.

Reacțiunile în reazimele grinzii sînt egale și au valoarea

$$V_1 = V_2 = \frac{P}{2}.$$

Notînd cu φ_0 unghiul maxim de răsucire al grinzii și făcînd ipoteza că valoarea acestuia se menține constantă pe porțiunea de grindă de la mijloc către capătul liber, ecuațiile de momente pe direcția axei y, pentru diverse porțiuni de grindă sînt următoarele

$$M_{11'} = \frac{P}{2} x \varphi_0 ; \quad M_{1'2} = \left[\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} + x'\right) - Px'\right]\varphi = \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x'\right)\varphi ;$$

Energia de deformație la încovoiere în direcție laterală va fi dată de relația

$$L_i = \frac{1}{2EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P}{2} x\right)^2 \varphi_0^2 \, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P}{2}\right)^2 \left(\frac{l}{2} - x'\right)^2 \varphi^2 \, dx\right].$$

Energia de deformație prin răsucire se obține numai pe porțiunea de grindă pe care unghiul de răsucire variază de la 0 la φ_0 și anume pe intervalul de pe grindă cuprins între reazimul din mijloc al grinzii și mijlocul deschiderii dintre două reazime consecutive. Această energie are expresia

$$L_t = \frac{GI_d}{2} \int_0^{l} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx .$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare are expresia

$$L_e = \frac{P^2}{4EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \varphi_0^2 \, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x'\right)^2 \varphi^2 \, dx - \frac{Ph\varphi_0^2}{2}\right]$$

în care primii doi termeni se datoresc deplasării pe verticală a sarcinilor și ultimul rotirii acestora.

Alegînd ca lege aproximativă de variație pentru unghiul de răsucire φ din lungul grinzii, care să satisfacă condițiile la limită, legea

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{\pi x'}{l} ; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\varphi_0 \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x'}{l}$$

și egalînd expresiile energiilor interioară și exterioară se obține egalitatea

$$\frac{1}{2EI_y}\left[\frac{1}{4} P^2 \varphi_0^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx + \frac{1}{4} P^2 \varphi_0^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x'\right) \cos^2 \frac{\pi x'}{l} \, dx\right] +$$

$$+ \frac{GI_d}{2} \varphi_0^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2 \frac{\pi x'}{l} \, dx = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{1}{4} P^2 \varphi_0^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} P^2 \varphi_0^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} - x'\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x'}{l} \, dx\right] - \frac{Ph\varphi_0^2}{2} .$$

Reducînd termenii asemenea egalitatea de mai sus se mai poate scrie

$$-\frac{P^2}{4EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx+\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{l}{2}-x'\right)^2\cos^2\frac{\pi x'}{l}\,dx\right]+GI_d\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin^2\frac{\pi x'}{l}\,dx=-Ph$$

Desfăcînd paranteza termenului al doilea al relației se obține

$$-\frac{P^2}{EI_y}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx+\frac{l^2}{4}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi x'}{l}\,dx-l\int_0^{\frac{l}{2}} x'\cos^2\frac{\pi x'}{l}\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{l}{2}} x'^2\cos^2\frac{\pi x'}{l}\right]+GI_d\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin^2\frac{\pi x'}{l}\,dx=-Ph.$$

Efectuînd prin părți integralele, se obțin pentru acestea valorile

$$\int_0^{\frac{l}{2}} x'^2\cos\frac{\pi x'}{l}\,dx=\frac{\pi^2-6}{48\pi^2}l^3;\quad \int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi x'}{l}\,dx=\frac{l}{4};$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} x'\cos^2\frac{\pi x'}{l}\,dx=\frac{\pi^2-4}{16\pi^2}l^2;\quad \int_0^{\frac{l}{2}}\sin^2\frac{\pi x'}{l}\,dx=\frac{l}{4}.$$

Introducînd valorile acestor integrale în relația de mai sus se obține

$$\frac{P^2}{4EI_y}\left[\frac{l^3}{24}+\frac{l^2}{4}\cdot\frac{1}{4}-l^3\frac{\pi^2-4}{16\pi^2}+l^3\frac{\pi^2-6}{48\pi^2}\right]-Ph-GI_d\frac{\pi^2 l}{l^2 4}=0$$

în care reducînd termenii asemenea se obține

$$\frac{\pi^2+2}{16\pi^2}\cdot\frac{P^3l^3}{4EI_y}-Ph-GI_d\frac{\pi^2}{4l}=0$$

ecuație care se mai poate scrie

$$P^2-\frac{64\pi^2}{\pi^2+2}\cdot\frac{hEI_y}{l^3}-\frac{16\pi^4}{\pi^2+2}\cdot\frac{GI_dEI_y}{l^4}=0.$$

Rezolvînd această ecuație se obține

$$P=\frac{32\pi^2}{\pi^2+2}\cdot\frac{hEI_y}{l^3}\pm\sqrt{\left(\frac{32\pi^2}{\pi^2+2}\cdot\frac{hEI_y}{l^3}\right)^2+\frac{16\pi^4}{\pi^2+2}\cdot\frac{EI_yGI_d}{l^4}}$$

sau

$$P = \frac{32\pi^2}{\pi^2+2}\,\frac{hEI_y}{l^3}\left[1 \pm \sqrt{1+\frac{\pi^2+2}{64}\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right] =$$

$$= 26{,}603\,\frac{hEI_y}{l^3}\left[1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{5{,}375}\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right].$$

Soluția cu minus este nereală deoarece sarcina critică trebuie să aibă valori pozitive. Rămîne deci că valoarea sarcinii critice în acest caz este dată de relația

$$P_f = 26{,}603\,\frac{hEI_y}{l^3}\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{5{,}375}\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right]. \tag{2}$$

Pentru a stabili dacă o grindă pe trei reazime încărcată cu sarcini concentrate pe mijlocul intervalelor dintre reazime flambează simetric sau antisimetric, trebuie comparată relația (2) cu relația (1).

Flambajul simetric se va produce atunci cînd va exista relația

$$109{,}7\,\frac{EI_y h}{l^3} \leqslant 26{,}603\,\frac{EI_y h}{l^3}\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{5{,}375}\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right]$$

în care făcînd simplificările necesare se obține în cele din urmă, relația

$$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \cdot \geqslant 47{,}068\,. \tag{3}$$

Pentru oțel $\frac{E}{G} = 2{,}6$ și raportul de mai sus devine

$$\frac{I_d}{I_y}\,\frac{l^2}{h^2} \geqslant 122{,}37\,. \tag{4}$$

2. *Grinda continuă pe un număr infinit de reazime*

Acest caz poate fi asimilat cu cel al grinzii rezemate pe două reazime care permit numai răsucirea liberă a grinzii dar nu și rotirea și încovoierea acesteia (fig. 3).

Aplicînd ca și în cazurile studiate metoda energetică, luînd în considerație și în acest caz și lucrul mecanic de deformație la răsucire, se obține pentru sarcina critică expresia

$$P_f = 14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3} + \sqrt{\left(14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3}\right)^2 + 295\,\frac{EI_y GI_d}{l^4}} \tag{5}$$

care se poate scrie

$$P_f = 14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3}\left(1+\sqrt{1+1{,}315\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right). \tag{6}$$

Expresia (5) se mai poate scrie

$$P_f = 14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3} + \frac{17{,}2\sqrt{GI_d EI_y}}{l^2}\sqrt{1+\frac{14{,}95^2\ EI_y\ h^2}{295\ \ GI_d\ \ l^2}}$$

în care dacă raportul $\frac{h}{l}$ este foarte mic atunci al doilea termen din pa-

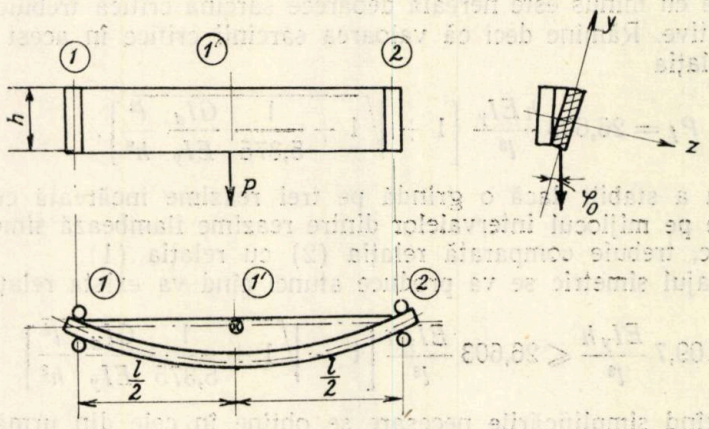


Fig. 3.

ranteză se poate neglija și relația care dă valoarea sarcinii critice devine

$$P_f = \frac{17{,}2}{l^2}\sqrt{GI_d EI_y}\left[1+\frac{1{,}74}{l}\left(\frac{h}{2}\right)\sqrt{\frac{EI_y}{GI_d}}\right] \tag{7}$$

regăsindu-se formula întîlnită în literatură (3) pentru acest caz.

Flambajul simetric se va produce atunci cînd va exista următoarea relație

$$192\,\frac{EI_y h}{l^3} \leqslant 14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3}\left(1+\sqrt{1+1{,}315\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right).$$

Făcînd simplificările necesare se obține în cele din urmă că flambajul simetric are loc atunci cînd

$$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \geqslant 105{,}6 \tag{8}$$

sau pentru oțel — deoarece $\frac{E}{G} = 2{,}6$ — expresia de mai sus devine

$$\frac{I_d}{I_y}\,\frac{l^2}{h^2} \geqslant 274{,}2. \tag{9}$$

Concluzii

Rezultatele calculelor privind valoarea sarcinii critice pentru cazurile de flambaj simetric și antisimetric la grinzile pendulare continue sub sarcini transversale concentrate, sînt cuprinse în tabela 1.

Din datele acestei tabele, se pot trage următoarele concluzii:

1. În cazul flambajului simetric valoarea sarcinii critice de flambaj crește cu numărul sarcinilor și tinde către o valoare limită care este

$$P = 192 \frac{EI_y h}{l^3}.$$

2. Cea mai mică valoare a sarcinii critice se obține pentru grinda pe trei reazime și este

$$P = 109{,}7 \cdot \frac{EI_y h}{l^3}.$$

3. Comparînd aceste două cazuri limită rezultă avantajul net pe care îl prezintă sub aspectul stabilității elastice, în cazul flambajului simetric, grinda pendulară ale cărei reazime sînt încastrări de încovoiere comparativ cu cea liber rezemată. Din tabelă rezultă că sarcina critică este de aproape 2 ori mai mare la grinda pendulară continuă, cu capetele încastrate, decît pentru cazul grinzii pendulare liber rezemată.

4. În cazul flambajului antisimetric (tabela 1 cazurile 4,5) valoarea sarcinii critice este funcție de raportul $\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}$ și poate fi mai mare sau mai mică decît cea corespunzătoare flambajului simetric.

5. Ținînd seama de concluzia precedentă în vederea îmbunătățirii stabilității grinzilor pendulare continue, se va căuta să se aleagă asemenea valori pentru raportul $\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}$ încît să se ajungă la valori ale sarcinii critice mai mari decît cele ale flambajului simetric, acest lucru fiind posibil în cazul flambajului antisimetric.

C. Flambajul lateral simetric al grinzilor continue pendulare sub sarcini uniform repartizate

Într-un articol publicat (2) s-au stabilit relațiile ce dau sarcina critică pentru flambajul simetric al grinzilor continue pendulare încărcate cu sarcini uniform distribuite.

Cîteva din cazurile studiate și valorile sarcinilor critice respective sînt prezentate în tabela 2.

Tabela 1

Sarcina critică de flambaj pentru grinzile pendulare continue pe reazime echidistante sub sarcini transversale concentrate

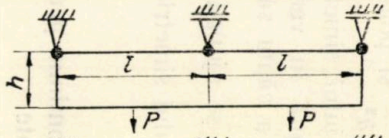
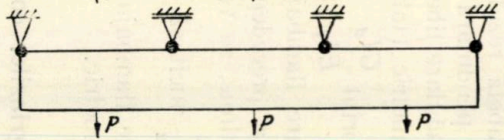
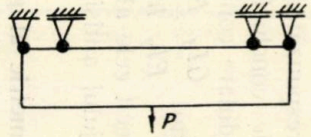
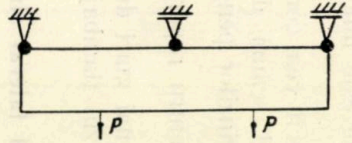
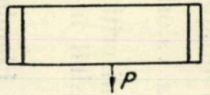
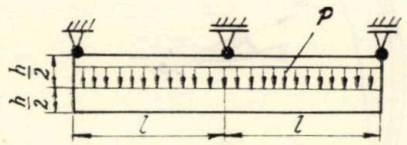
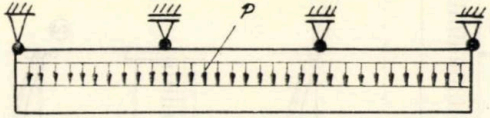
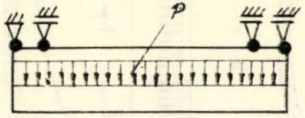
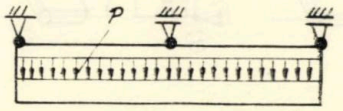
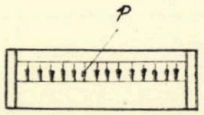
Nr. crt.	Mod de flambaj	Cazul studiat	Sarcina critică (P_f)	Domeniul de valabilitate al formulei
1	simetric		$109{,}7\,\frac{EI_y h}{l^3}$	$\frac{GI_d\,l^2}{EI_y\,h^2} \geqslant 47{,}068$
2			$120\,\frac{EI_y h}{l^3}$	
3			$192\,\frac{EI_y h}{l^3}$	$\frac{GI_d\,l^2}{EI\,h^2} \geqslant 105{,}6$
4	antisimetric		$26{,}603\,\frac{EI_y h}{l^3}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{5{,}375}\,\frac{GI_d\,l^2}{EI_y h^2}}\right)$	$\frac{GI_d\,l^2}{EI_y\,h^2} \leqslant 47{,}068$
5			$14{,}95\,\frac{EI_y h}{l^3}\left(1+\sqrt{1+1{,}315\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right)$	$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \leqslant 105{,}6$

Tabela 2

Sarcina critică de flambaj pentru grinzile pendulare continue pe reazime echidistante sub sarcini transversale uniform distribuite

Nr. crt.	Mod de flambaj	Cazul studiat	Sarcina critică $(pl)_f$	Domeniul de valabilitate al formulei
1	simetric		$160\,\frac{EI_y\,h}{l^3}$	$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h} \geqslant 120{,}5$
2			$180\,\frac{EI_y\,h}{l^3}$	
3			$360\,\frac{EI_y\,h}{l^3}$	$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \geqslant 162$
4	antisimetric		$16{,}94\,\frac{EI_y\,h}{l^3}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{1{,}724}\,\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2}}\right)$	$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \leqslant 120{,}5$
5			$\frac{28{,}3}{l^2}\sqrt{GI_d\,EI_y}$	$\frac{GI_d}{EI_y}\,\frac{l^2}{h^2} \leqslant 162$

D. Flambajul lateral antisimetric al grinzilor continue pendulare sub sarcini uniform distribuite

În rezolvarea acestei probleme se păstrează aceleași ipoteze de calcul ca și în cazurile de flambaj lateral sub sarcini concentrate, cu excepția locului de aplicare a sarcinii, care în acest caz este situat la nivelul fibrei medii deformate a grinzii și al modului de încărcare, care nu mai este realizat de sarcini concentrate ci de o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea grinzii.

Și în acest caz este posibil flambajul antisimetric la care axa deformată a grinzii să fie situată alternativ de o parte și de alta a liniei care unește reazimele.

În cele ce urmează se vor studia cîteva cazuri de flambaj antisimetric, stabilindu-se valorile sarcinii critice pentru fiecare caz în parte și soluțiile în care o grindă de acest fel flambează simetric sau antisimetric.

1. *Grinda pe trei reazime echidistante* (fig. 4)

În rezolvarea acestui caz se va aplica metoda energetică de calcul. La scrierea reacțiunilor, a săgeților, momentelor încovoietoare și energiilor, se va ține seama de simetria geometrică și de încărcare a grinzii.

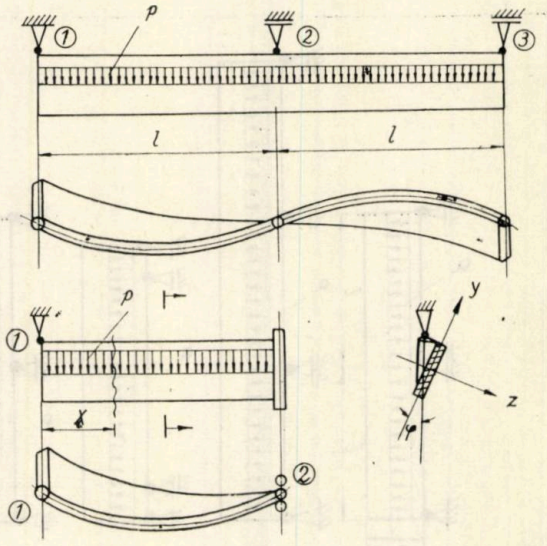


Fig. 4.

În cazul acesta rezolvarea problemei este echivalentă cu rezolvarea cazului reprezentat de jumătate din grindă, adică cazul unei grinzi avînd la un capăt ca reazim o articulație sferică excentric așezată față de axa grinzii, iar celălalt capăt un reazim care permite numai încovoierea și răsucirea liberă nu și rotirea grinzii.

Reacțiunile în reazime sînt

$$V_1 = V_2 = \frac{pl}{2}.$$

Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare a grinzii proiectat pe axa y va fi

$$M_{11'} = \left(\frac{pl}{2}\,x - \frac{px^2}{2}\right)\varphi\ ;$$

φ fiind unghiul de răsucire într-o secțiune oarecare a grinzii.

Săgeata pe verticală într-o secțiune oarecare a grinzii este

$$w_{12} = \frac{p}{24\,EI_y}\,(x^4 - 2\,lx^3 + l^3 x)\,\varphi^2\ ;$$

Lucrul mecanic al forțelor interioare inclusiv cel datorit răsucirii grinzii este

$$L_i = \frac{1}{2\,EI_y}\,\frac{p^2}{4}\int_0^l (lx - x^2)^2\,\varphi^2\,dx + \frac{GI_d}{2}\int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx\,.$$

Lucrul mecanic exterior datorit deplasării pe verticală a sarcinii și rotirii acesteia față de reazime, este

$$L_e = \int_0^l \frac{p^2}{24\,EI_y}\,(x^4 - 2\,lx^3 + l^3 x)\,\varphi^2\,dx - \frac{1}{4}\int_0^l phl\varphi^2\,dx\,.$$

Alegînd ca lege aproximativă de variație pentru unghiul de răsucire φ în lungul grinzii, care să satisfacă condițiile de rezemare, legea

$$\varphi = \varphi_0 \cos\frac{\pi x}{2l}\ ;\quad \frac{d\varphi}{dx} = -\varphi_0\,\frac{\pi}{2l}\,\sin\frac{\pi x}{2l}$$

și egalînd cele două energii, se obține

$$\frac{p^2}{8\,EI_y}\int_0^l (lx - x^2)^2\,\varphi_0^2\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx + \frac{GI_d}{2}\int_0^l \varphi_0^2\,\frac{\pi^2}{4l^2}\sin^2\frac{\pi x}{2l}\,dx =$$

$$= \int_0^l \frac{p^2}{24\,EI_y}\,(x^4 - 2\,lx^3 + l^3 x)\,\varphi_0^2\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx - \frac{\varphi_0^2}{4}\int_0^l phl\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx\,.$$

Desfăcînd parantezele și efectuînd integralele, ținînd seama de faptul că

$$\int_0^l x^4 \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l^5}{10\pi^4}(\pi^4 - 20\pi^2 + 120) = 0{,}0000202\, l^5 ;$$

$$\int_0^l x^3 \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l^4}{8\pi^4}(\pi^4 - 12\pi^2 + 48) = 0{,}03388\, l^4 ;$$

$$\int_0^l x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx = l^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0{,}06518\, l^3 ;$$

$$\int_0^l x \cos^2 \frac{\pi x}{2l} = l^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0{,}148576\, l^2 ;$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l}{2} ; \quad \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} = \frac{l}{2} .$$

Se obțin relațiile

$$0{,}08856 \frac{p^2 l^5}{EI_y} - 3\, plh - \frac{3\pi^2}{2} \frac{GI_d}{l} = 0 .$$

Notînd $pl = Q$ ecuația de mai sus se poate scrie

$$Q^2 - 33{,}875\, Q \frac{hEI_y}{l^3} - 166{,}5 \frac{GI_d\, EI_h}{l^4} = 0$$

de unde

$$Q = 16{,}94 \frac{EI_y h}{l^3}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{166{,}5}{16{,}94^2} \frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}}\right] ;$$

sau

$$Q = 16{,}94 \frac{EI_y h}{l^3}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{1{,}724} \frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}}\right] .$$

Soluția valabilă este cea cu +. Deci valoarea sarcinii critice este

$$Q_f = 16{,}94 \frac{EI_y h}{l^3}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{1{,}724} \frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}}\right] \qquad (10)$$

Pentru a vedea dacă o grindă flambează simetric sau antisimetric, se compară această valoare cu cea obținută pentru cazul simetric. Astfel

o grindă de acest fel va flamba simetric atunci cînd va fi satisfăcută inegalitatea.

$$160 \frac{EI_y h}{l^3} \leqslant 16{,}94 \frac{EI_y h}{l^3} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{1{,}724} \frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}}\right].$$

Simplificînd în această inegalitate și reducînd termenii asemenea, se obține în definitiv, că grinda flambează simetric cînd valoarea raportului

$$\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2} \geqslant 120{,}5 \tag{11}$$

pentru grinzile de oțel deoarece $\frac{E}{G} = 2{,}6$

$$\frac{I_d}{I_y} \frac{l^2}{h^2} \geqslant 312. \tag{12}$$

2. *Grinda pe un număr infinit de reazeme echidistante.*

Acest caz poate fi asimilat cu cel al grinzii rezemate ca în fig. 3 la care sarcina concentrată este înlocuită cu o sarcină uniform distribuită de-a lungul fibrei medii deformate. Este unul din cazurile studiate care se găsesc în literatură (4), pentru care valoarea sarcinii critice este dată de relația

$$(pl)_f = \frac{28{,}3}{l^2} \sqrt{GI_d EI_y}. \tag{13}$$

O grindă continuă cu o astfel de încărcare va flamba simetric atunci cînd va fi satisfăcută inegalitatea

$$360 \frac{EI_y}{l^3} \leqslant \frac{28{,}3}{l^2} \sqrt{GI_d EI_y}.$$

Acest lucru are loc cînd

$$\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2} \geqslant 162. \tag{14}$$

Pentru profile de oțel $\frac{E}{G} = 2{,}6$ și relația de mai sus, devine

$$\frac{I_d}{I_y} \frac{l^2}{h^2} \geqslant 421. \tag{15}$$

Concluzii

Rezultatele calculelor privind flambajul simetric și antisimetric al grinzilor pendulare continue pe reazime echidistante, încărcate cu o sarcină uniform distribuită la nivelul fibrei medii deformate, sînt trecute în tabela 2.

Din datele acestei tabele se pot trage următoarele concluzii:

1. În cazul flambajului simetric valoarea sarcinii critice de flambaj crește cu numărul de reazime.

2. Cea mai mică valoarea se obține pentru grinda pe trei reazime și are valoarea

$$(pl)_f = 160 \frac{EI_y h}{l^3}.$$

3. Cea mai mare valoare se obține pentru un număr infinit de reazime și are valoarea

$$(pl)_f = 360 \frac{EI_y h}{l^3}.$$

4. Comparînd aceste două cazuri limită rezultă avantajul net pe care îl prezintă sub aspectul stabilității elastice, în cazul flambajului simetric, grinda pendulară ale cărei reazime sînt încastrări de încovoiere, comparativ cu cea liber rezemată. Din tabelă rezultă că sarcina critică este de 2,25 ori mai mare la grinda pendulară continuă cu capetele încastrate, decît pentru cazul grinzii pendulare liber rezemată.

5. În cazul flambajului antisimetric, valoarea sarcinii critice este funcție de raportul $\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}$ și poate fi mai mare sau mai mică decît cea corespunzătoare flambajului simetric.

6. Ținînd seama de concluzia precedentă se va căuta să se aleagă asemenea valori pentru raportul $\frac{GI_d}{EI_y} \frac{l^2}{h^2}$ încît să se obțină valori ale sarcinii critice mai mari decît cele ale flambajului simetric, acest lucru fiind posibil în cazul flambajului antisimetric.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Petre și V. Drobotă:* Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue. În Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 4, tom 16, 1964.

2. *V. Drobotă:* Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale uniform repartizate. În Buletinul Institutului politehnic Buc. nr. 6, 1964.

3. *S. Timoshenko:* Strength of materiels, Part. I, II, ed. D. van Nostrand Company, Inc. Princeton New Jersey, 1955—1957.

4. *Gh. Buzdugan:* Rezistența materialelor, vol. II, ed. Tehnică, București, 1960.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

TERMOTEHNICĂ

C.Z. : 621.643.1:697.3

FOLOSIREA METODEI IMAGINILOR ÎN CALCULUL FLUXULUI TERMIC LA CONDUCTE ÎNGROPATE ÎN SOL ȘI LA CANALE DE TERMOFICARE *

NICOLAE LEONACHESCU
Institutul de construcții — București

În practica curentă se ivesc situații cînd conducte, prin care se vehiculează un agent termic, sînt montate direct în sol, reducîndu-se în felul acesta considerabil cheltuielile de investiții.

Pe lîngă alte probleme ce se ridică, spre exemplu agresivitatea chimică a mediului, tasările inegale etc., una din problemele de bază ce trebuie rezolvate este aceea a calculului pierderilor de căldură ale conductei atît spre mediul exterior cît și spre straturile de apă subterană existente.

Importanța acestui calcul termic este cu atît mai mare cu cît diferențele de temperatură sînt mai mari iar dimensiunile conductei depășesc pe cele curente.

În cele ce urmează, se vor deduce relații de calcul bazate pe ideea elaborată de Kelvin în electrostatică, cunoscută sub denumirea de metoda imaginilor. Pînă în prezent această metodă se folosește numai în cazul cînd nu există un strat de apă subterană.

I. Conducte montate în sol fără straturi de apă subterană

Considerînd elementele de calcul din fig. 1, se presupune imaginea conductei reale față de suprafața solului astfel încît în punctul $P\ (x, y)$ efectele se vor însuma. Se cunoaște formula de calcul de la propagarea căldurii în regim staționar și fără izvoare interioare de căldură prin conducta neizolată, în condiții de speța întîia, și anume:

$$Q = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_1}{r_0}} \qquad (1)$$

* Manuscris predat la redacție la 2 aprilie 1965.

în care s-a notat cu :

θ_0 — temperatura pe suprafața interioară a conductei în °C ;

θ_1 — idem pe suprafața exterioară ;

λ — coeficientul de conductivitate termică în $\frac{\text{kcal}}{\text{m h grd}}$;

l — lungimea conductei ;

r_0 — raza interioară a conductei în m ;

r_1 — raza exterioară a conductei în m.

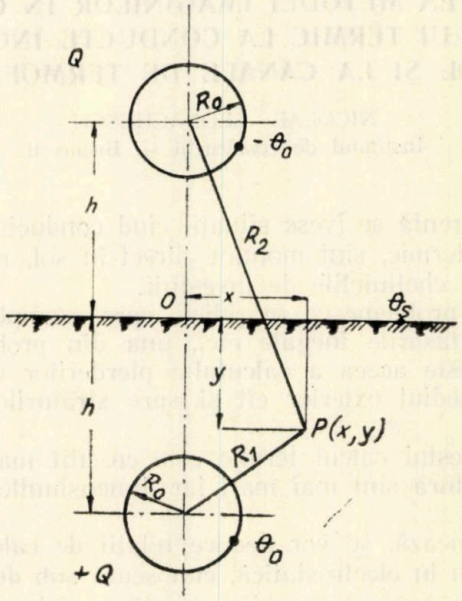


Fig. 1. Montarea conductei direct în pământ (metoda imaginilor)

Folosindu-se diferența de temperatură $\Theta_0 = \theta_0 - \theta_s$ între temperatura suprafeței exterioare a conductei și temperatura suprafeței solului, precum și $\Theta = \theta - \theta_s$, între temperatura din punctul $P(x, y)$ și temperatura suprafeței solului, rezultă pentru conductă :

$$\Theta_1 = \Theta_0 - \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_1}{R_0}, \tag{2}$$

și pentru imaginea ei

$$\Theta_2 = -\Theta_0 + \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_2}{R_0}, \tag{3}$$

l fiind lungimea conductei și

λ coeficientul de conductivitate termică al solului.

In felul acesta, în punctul $P(x, y)$ rezultă

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{4}$$

Observînd că

$$R_1^2 = x^2 + (y + h)^2, \tag{5}$$

$$R_2^2 = x^2 + (y - h)^2, \tag{6}$$

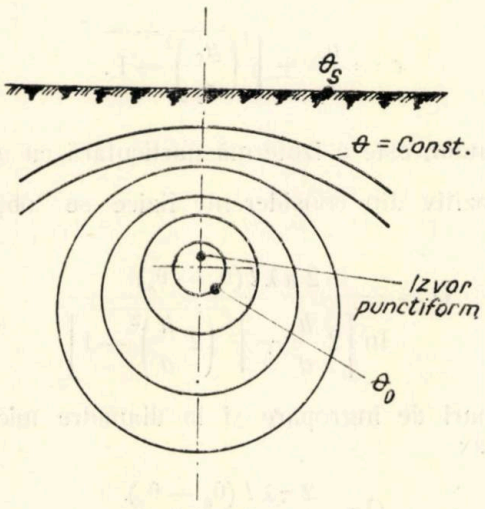


Fig. 2. Distribuția izotermelor (izoterme particulare : θ_0 și θ_s)

suprafețele izoterme vor fi date de

$$\frac{x^2 + (y - h)^2}{x^2 + (y + h)^2} = \exp\left(\frac{4\pi\lambda l\,\Theta}{Q}\right) = \text{constant}, \tag{7}$$

Dacă vom nota constanta cu c^2, rezultă că suprafețele izoterme sînt cercuri care ascultă de ecuația :

$$x^2 + \left(y - \frac{1 + c^2}{1 - c^2}\, h\right)^2 = \frac{4\, c^2\, h^2}{(1 - c^2)^2}, \tag{8}$$

avînd centrele în puncte, pe axa oy, de coordonate,

$$\left(0, \frac{1 + c^2}{1 - c^2}\, h\right), \tag{9}$$

și raza

$$r_c = \frac{2\, c\, h}{1 - c^2} \tag{10}$$

Problema se rezolvă prin aflarea constantei c, în funcție de elementele constructive. Metodele curente folosesc puterea unui punct față de cerc ; aici se va da un mod de calcul mult mai simplificat.

Dacă se calculează raportul dintre y_c — ordonata centrului familiei de izoterme și r_c — raza cercului, rezultă

$$\frac{y_c}{r_c} = \frac{1+c^2}{2c}, \tag{11}$$

de unde

$$c = \frac{y_c}{r_c} \pm \sqrt{\left(\frac{y_c}{r_c}\right)^2 - 1}. \tag{12}$$

Conducta în studiu, este o izotermă particulară cu $y_c = h$ și $r_c = \frac{d}{2}$ și luînd semnul pozitiv din considerente fizice se obține relația finală de calcul,

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(\theta_0 - \theta_s)}{\ln\left[2\frac{h}{d} + \sqrt{\left(2\frac{h}{d}\right)^2 - 1}\right]} \tag{13}$$

La adîncimi mari de îngropare și la diametre mici se poate folosi relația aproximativă :

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(\theta_0 - \theta_s)}{\ln\left(4\frac{h}{d}\right)}. \tag{14}$$

Literatura de specialitate indică relații de calcul și pentru cazul mai multor conducte montate în sol, generalizînd relația (4) sau (3).

Spre exemplu, în cazul unor conducte de diametre diferite montate la adîncimi diferite, prin însumarea efectelor, temperatura într-un punct oarecare $M\ (x, y)$ prin folosirea repetată a relației (4) poate fi calculată cu

$$\Theta = \sum_1^n \Theta_i = \sum_1^n \frac{Q_i}{2\pi\lambda l} \ln \frac{R_i''}{R_i'} \tag{15}$$

unii termeni ai sumei putînd fi neglijabili sau chiar negativi.

În cazul particular cînd conductele de aceeași temperatură și același diametru sînt montate la aceeași adîncime și sînt egal distanțate, rezultă :

$$\Theta = \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{\Pi R_i''}{\Pi R_i'}. \tag{16}$$

Pentru calculul lui Q în situațiile de mai sus se pot folosi și relațiile semiempirice ale lui E. P. Șubin [B. 1].

De cele mai multe ori însă, se cunoaște temperatura medie θ_l a agentului termic din conductă și temperatura aerului exterior θ_e, iar conducta este acoperită cu mai multe straturi de izolație.

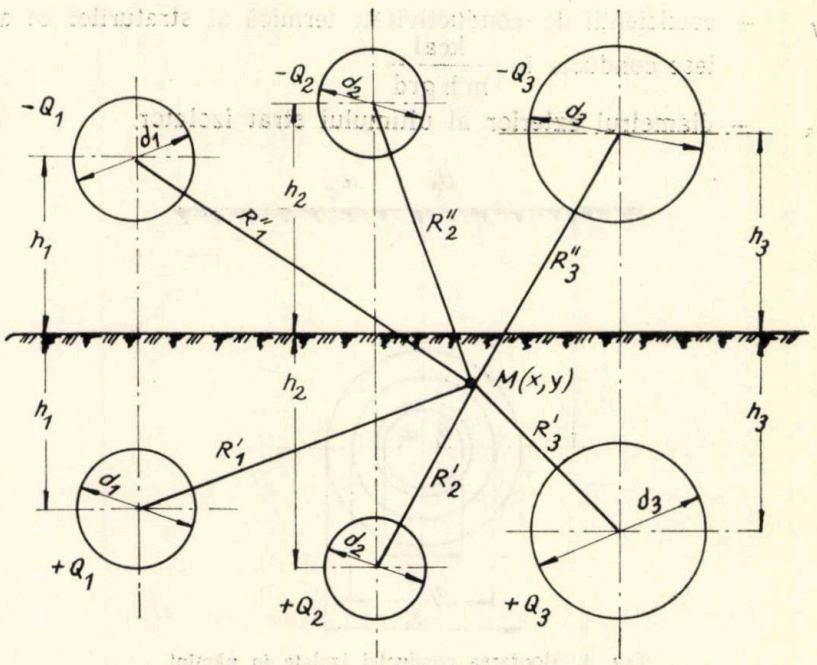


Fig. 3. Montarea conductelor direct în pămînt (metoda imaginilor)

In acest caz, introducînd în locul rezistenței termice convective exterioare, una conductivă echivalentă, se poate folosi cu succes în calculul fluxului termic relația :

$$Q = \frac{\theta_i - \theta_e}{R_l}, \tag{17}$$

cu

$$R_l = \frac{1}{2\pi l}\left\{\frac{1}{\alpha_i r_0} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j}\ln\frac{d_j}{d_{j-1}} + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2}{d_n}\left(h + \frac{\lambda}{\alpha_e}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\frac{4}{d_n^2}\left(h + \frac{\lambda}{\alpha_e}\right)^2 - 1}\right]\right\} \tag{18}$$

în care s-a notat cu

R_t — rezistența termică totală în grd. h/kcal ;

α_i, α_e — coeficienții de schimb superficial la interiorul conductei respectiv la suprafața terenului, în $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$,

λ_j — coeficienții de conductivitate termică ai straturilor ce alcătuiesc conducta în $\frac{\text{kcal}}{\text{m h grd}}$

d_n — diametrul exterior al ultimului strat izolator.

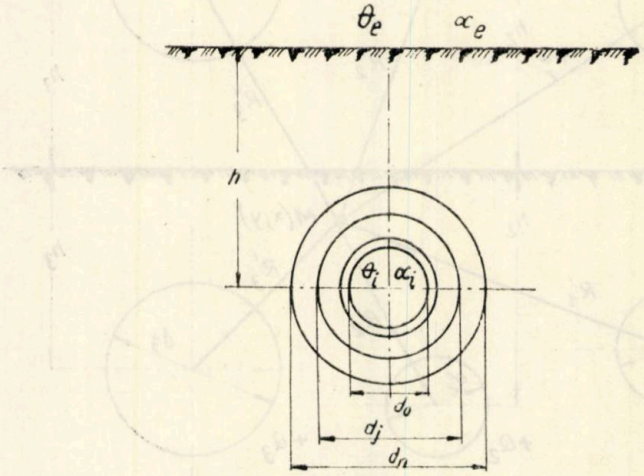


Fig. 4. Montarea conductei izolate în pământ

Relația de calcul de mai sus introduce o aproximație în sensul că în vecinătatea conductei izotermele sînt deformate, inexactitatea este însă cu totul neglijabilă, mai ales dacă ținem seama de faptul că coeficientul de conductivitate termică a solului, λ, are variații în cursul unui an, datorită umidității, de la simplu la triplu.

II. Conducte montate în sol cu straturi de apă subterană

De multe ori însă, conductele străbat regiuni în care straturile de apă subterană sînt relativ la suprafață și cum temperatura lor θ_a, este scăzută există pierderi de căldură și către aceste straturi.

Calculul fluxului termic, conform fig. 5, se face în două etape. Prima etapă va da valoarea fluxului termic Q_1 ce străbate solul spre aerul exterior, flux calculabil cu relațiile (13), (14) sau (17).

În faza a doua trebuie calculate pierderile de căldură către stratul de apă subterană.

Se poate folosi în acest caz metoda imaginilor a lui Kelvin, făcînd oglindirea, ca în fig. 5, către suprafața stratului de apă subterană, suprafață care este izoterma particulară θ_a, similar cu θ_s din cazurile studiate anterior. Această izotermă particulară este un cilindru cu raza infinită, cea de a doua izotermă particulară θ_0 fiind suprafața exterioară a conductei.

Rezultă o relație similară formulei (3) cu ajutorul căreia se poate calcula fluxul termic spre stratul de apă subterană.

$$Q_2 = \frac{2\pi\lambda l(\theta_0 - \theta_a)}{\ln\left[\frac{2}{d}(H-h) + \sqrt{\frac{4}{d^2}(H-h)^2 - 1}\right]}. \qquad (19)$$

Aflarea temperaturii într-un punct oarecare $N(x, y)$ se poate face prin însumarea efectelor, conform relațiilor (2) și (3) și prezintă importanță practică numai dacă în acel punct se află un material (cabluri telefonice, electrice, rădăcinile plantelor în sere, etc.) care se poate deteriora cînd temperatura crește peste o anumită limită.

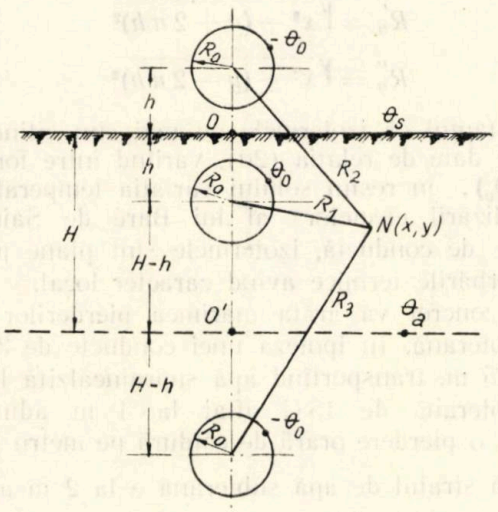


Fig. 5. Conducta montată în pămînt cînd există un strat de apă subterană

Oglindirea în cele două suprafețe izoterme θ_s și θ_a, dă o infinitate de imagini, în ambele sensuri și nici una din ele nu se plasează în spațiul dintre aceste izoterme, fapt care ar influența propagarea căldurii.

La fiecare oglindire, izvorul își schimbă semnul și luarea în considerație a efectelor tuturor imaginilor și al conductei, într-un punct oarecare $N(x, y)$ conduce la relația globală de calcul a fluxului termic $Q = Q_1 + Q_2$, sau la aflarea spectrului de izoterme.

Efectul cel mai important îl au însă, primele două imagini și conducta, așa cum s-a considerat de altfel în figura 5, rapoartele $\frac{R'_i \cdot R''_i}{R'_{i+1} \cdot R''_{i+1}}$ tinzînd rapid spre unitate, pe măsură ce rangul oglindirii crește.

Un caz particular este acela cînd $\theta_s = \theta_a$, $H = 2h$ și $Q_1 = Q_2$, fenomenul de propagare a căldurii fiind simetric și permițînd comparația cu relațiile de calcul folosite la încălzirea prin planșee radiante, în care se montează țevi pentru circulația agentului încălzitor.

Folosind notațiile din fig. 6 rezultă pentru acest caz particular, conform relațiilor (2) și (3) aplicate pentru multitudinea imaginilor:

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \left[\frac{R_0}{R_c} \cdot \frac{R'_1 \cdot R''_1}{R'_2 \cdot R''_2} \cdot \frac{R'_3 \cdot R''_3}{R'_4 \cdot R''_4} \cdot \frac{R'_5 \cdot R''_5}{R'_6 \cdot R''_6} \cdot \ldots \right] \tag{20}$$

în care:

$$R_c = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{21}$$

$$R'_n = \sqrt{x^2 + (y + 2nh)^2} \tag{22}$$

$$R''_n = \sqrt{x^2 + (y - 2nh)^2} \tag{23}$$

De semnalat faptul că izotermele nu mai sînt cilindrice, ci suprafețe de formă oarecare date de relația (20), variind între forma plană (θ_s și θ_a) și cilindru (θ_0), în restul solului variația temperaturii supunîndu-se principiului „localizării efectelor" al lui Baré de Saint Venant. La o oarecare depărtare de conductă, izotermele sînt plane paralele cu suprafața solului, perturbările termice avînd caracter local.

Un exemplu concret va arăta mărimea pierderilor de căldură spre stratul de apă subterană. În ipoteza unei conducte de 300 mm diametru, montată la $h = 1{,}5$ m, transportînd apă supraîncălzită la 100°C și cu un strat de apă subterană de 15°C aflat la 4 m adîncime, rezultă la $\lambda = 1$ kcal/m h grd., o pierdere orară de căldură pe metru liniar de conductă de 153 $\frac{\text{kcal}}{\text{m.h}}$. Dacă stratul de apă subterană e la 2 m adîncime pierderile de căldură ajung la 285 $\frac{\text{kcal}}{\text{m.h}}$.

Realitatea fenomenului fizic aduce însă o serie de precizări în folosirea relațiilor de calcul de mai sus.

În primul rînd este vorba de faptul că regimul este în realitate nestaționar, calculele prezentate efectuîndu-se numai în regim staționar. Regimul nestaționar se referă atît la cîmpul de temperaturi, cît și la cel de umidități, ceea ce duce la oscilații importante ale valorii fluxului termic.

Pe de altă parte, adîncimea H la care se găsește stratul de apă subterană, joacă un rol important în valoarea fluxului termic.

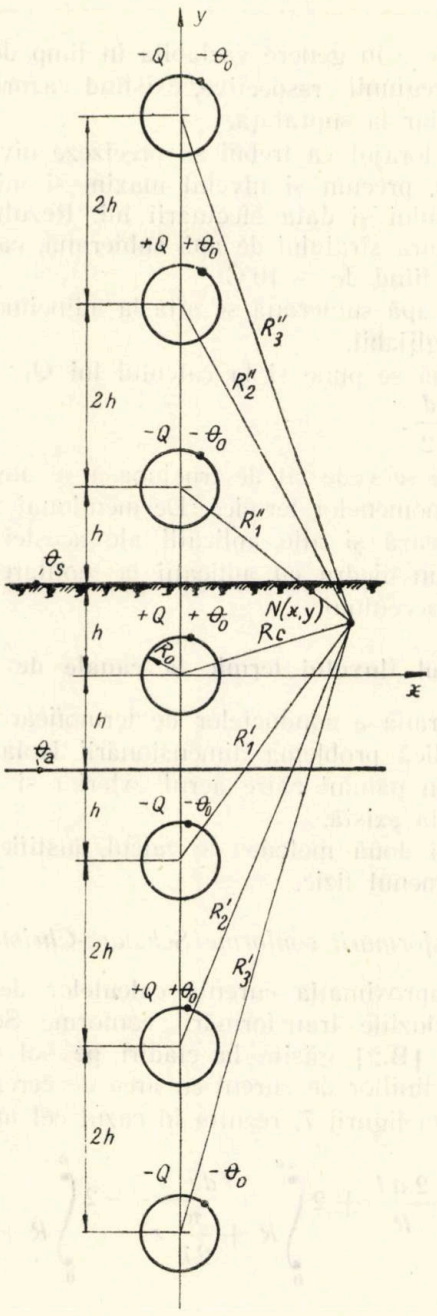


Fig. 6. Aplicarea metodei imaginilor în cazul oglindirii în două suprafețe izoterme plane și paralele (schema de calcul)

Această adîncime e în genere variabilă în timp depinzînd de regimul de precipitaţiuni al regiunii respective, existînd cazuri cînd pînza de apă subterană se află chiar la suprafaţă.

De fiecare dată forajul va trebui să precizeze nivelul mediu pe o perioadă dată de timp, precum şi nivelul maxim şi minim, specificîndu-se locul precis al forajului şi data efectuării lui. Rezultatele vor trebui să cuprindă şi temperatura stratului de apă subterană, care de obicei se consideră în calcule ca fiind de + 10°C

Dacă stratul de apă subterană se află la adîncime mare fluxul termic Q_2 poate deveni neglijabil.

Aceeaşi problemă se pune şi la calculul lui Q_1 ; în plus condiţia de compatibilitate $h > \frac{d}{2}$.

Din cele arătate se vede cît de fructuoasă se dovedeşte metoda imaginilor în studiul fenomenelor termice. De menţionat că literatura de specialitate [B. 2] tratează şi alte aplicaţii ale acestei metode, cum ar fi oglindirea faţă de un diedru cu aplicaţii la montarea conductelor într-o zonă cu denivelări accentuate

III. Calculul fluxului termic la canale de termoficare

Montarea subterană a conductelor de termoficare în canale vizitabile sau nevizitabile, ridică problema dimensionării izolaţiei pe baza pierderilor de căldură prin pămînt către aerul exterior şi către stratul de apă subterană cînd acesta există.

Se vor dezvolta două metode de calcul, justificate ştiinţific şi care ţine seama de fenomenul fizic.

1. *Metoda transformării conforme Schwarz-Christoffel*

Extinzînd, cu aproximaţia curentă calculelor de schimb de căldură în construcţii, concluziile transformării conforme Schwarz-Christoffel şi a teoremei Voltera [B.2] găsite la clădiri pe sol şi semiîngropate, în ipoteza aproximării liniilor de curent cu arce de cercuri cu centrele în O_1 respectiv O_2, conform figurii 7, rezultă în cazul cel mai simplu :

$$Q_s = (\theta_i - \theta_e)\left[\frac{2\,a\,l}{R} + 2\int_0^{2a}\frac{l\,dz}{R + \frac{\pi}{2\lambda}z} + 2\int_0^{a}\frac{l\,dx}{R + \frac{\pi}{\lambda}(x + a)}\right], \quad (24)$$

în care rezistenţa termică este,

$$R = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_e}, \quad (25)$$

Prin integrare rezultă :

$$Q_s = 2\,l\,(\theta_i - \theta_e)\left[\frac{a}{R} + \frac{2\lambda}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi a}{\lambda R}\right) + \frac{\lambda}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi a}{\pi a + \lambda R}\right)\right], \quad (26)$$

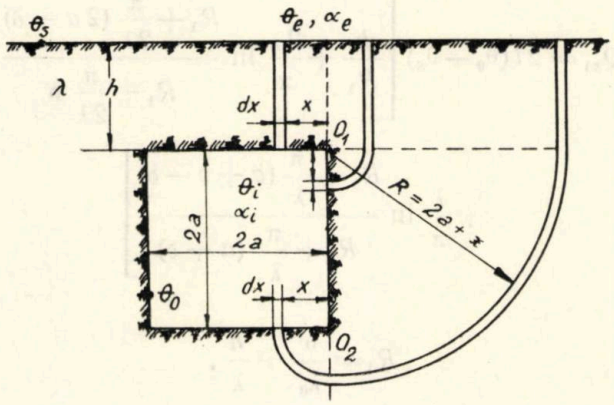


Fig. 7. Canal îngropat (schema de calcul)

în care s-a notat cu :

λ — coeficientul de conductivitate termică a solului în $\frac{\text{kcal}}{\text{m h grd}}$;

α_i — coeficientul de schimb superficial la interiorul canalului în $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h grd}}$;

α_e — idem la suprafaţa pămîntului, în $\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\text{h grd}}$;

θ_i — temperatura aerului din canal, în °C ;

θ_e — temperatura aerului de la suprafaţa pămîntului, în °C ;

l — lungimea canalului, în m ;

a — jumătatea din latura secţiunii patratice a canalului în m ;

h — adîncimea de montaj a plăcii superioare a canalului în m :

In cazul cînd se cunosc temperaturile de suprafeţe — θ_0 pe suprafaţa interioară a canalului şi θ_s pe suprafaţa solului — relaţia de calcul pentru fluxul termic se simplifică.

Notînd :

$$R = \frac{h}{\lambda}, \quad (27)$$

rezultă

$$Q_s = 2\lambda\,l\,(\theta_0 - \theta_s)\left[\frac{a}{h} + \frac{2}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi a}{h}\right) + \frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi a}{\pi a + h}\right)\right]. \quad (28)$$

În cazurile curent întîlnite secțiunea canalelor nu este de formă patratică iar rezistența termică a pereților canalului este importantă.

Aplicînd același procedeu de calcul, conform fig. 8 rezultă fluxul termic.

$$Q_{s1} = 2l(\theta_0 - \theta_s)\left[\frac{b}{R_1} + \frac{2\lambda}{\pi}\ln\frac{R_1 + \frac{\pi}{2\lambda}(2a-\delta)}{R_1 + \frac{\pi}{2\lambda}\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{R_1 + \frac{\pi}{\lambda}(a+b-\delta)}{R_1 + \frac{\pi}{\lambda}(a+\delta)}\right] \tag{29}$$

în care

$$R_1 = \frac{\delta}{\lambda_0} + \frac{h}{\lambda}, \tag{30}$$

cu δ — grosimea pereților canalului considerată uniformă iar
λ_0 — coeficientul de conductivitate termică mediu al materialului din care sînt făcuți pereții canalului.

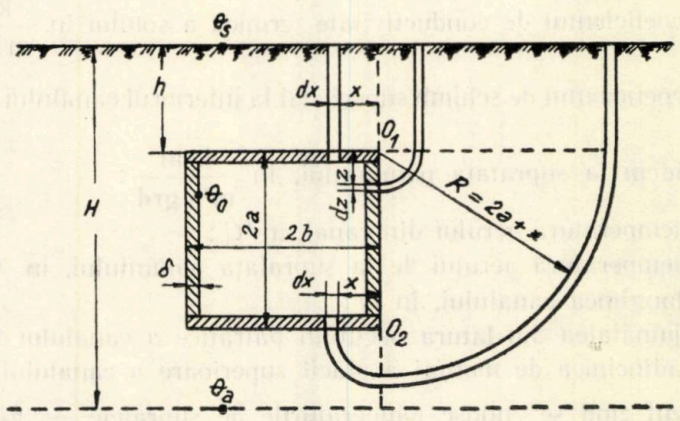


Fig. 8. Canal îngropat cu pereți de grosime uniformă

Dacă există un strat de apă subterană la adîncimea H, cu temperatura θ_a mai mică decît θ_0, atunci canalul de termoficare are pierderi de căldură și către acesta, calculabile cu relația:

$$Q_{s2} = 2l(\theta_0 - \theta_a)\left[\frac{b}{R_2} + \frac{2\lambda}{\pi}\ln\frac{R_2 + \frac{\pi}{2\lambda}(2a+\delta)}{R_2 + \frac{\pi}{2\lambda}\delta} + \frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{R_2 + \frac{\pi}{\lambda}(a+b)}{R_2 + \frac{\pi}{\lambda}(a+\delta)}\right]. \tag{31}$$

În aceste relații se introduce aproximația că temperatura suprafeței interioare a canalului θ_0 este aceeași pe toate laturile și constantă în timp, iar $R_2 = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta}{\lambda_0} + \frac{H-h-2a}{\lambda}$.

Metoda de calcul menționată mai sus a fost dezvoltată sub toate aspectele ei, de către un colectiv din cadrul Catedrei de Termotehnică de la Institutul de Construcții-București și prezentată în Buletinul Științific al Institutului de Construcții nr. 12 din 1964 [B. 5].

Prezentarea ei este necesară pentru o comparare cu a doua metodă propusă mai jos.

2. *Metoda imaginilor a lui Kelvin*

S-a arătat că pentru o conductă îngropată direct în pământ, prin fructuoasa metodă a imaginilor propusă de lordul Kelvin, se pot calcula pierderile de căldură cu relația

$$Q = \frac{2\pi\lambda l(\theta_0 - \theta_s)}{\ln\left[2\frac{h_1}{d} + \sqrt{\left(2\frac{h_1}{d}\right)^2 - 1}\right]} \tag{32}$$

termenii având semnificația din fig. 9.

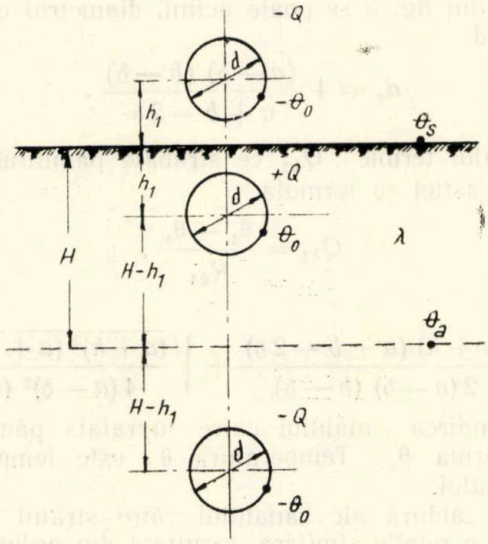


Fig. 9. Conductă îngropată cu strat de apă subterană (schema de calcul)

În deducerea relației de calcul de mai sus, suprafața exterioară a conductei este considerată drept izotermă de valoare θ_0.

Un canal de termoficare de secțiune un poligon regulat cu mai multe laturi, s-ar apropia de ipotezele de calcul ale formulei (32) cu cît numă-

rul de laturi ar fi mai mare, în acest caz cercul fiind din ce în ce mai bine aproximat de către poligonul regulat înscris lui.

Se poate defini pentru situația din fig. 7 un diametru echivalent care să înlocuiască în formula (32) secțiunea patratică a canalului.

În acest sens

$$d_e = 4\,\frac{S}{P} = 4\,\frac{2a \cdot 2a}{2 \cdot 4a} = 2a\,, \tag{33}$$

adîncimea axului fiind,

$$h_1 = h + a\,, \tag{34}$$

cu S — secțiunea și
P — perimetrul

Cu aceste notații pierderile de căldură ale canalului de termoficare din fig. 7, se pot calcula pe baza metodei imaginilor care are la bază tot o transformare conformă, cu relația,

$$Q_k = \frac{2\pi\lambda l(\theta_0 - \theta_s)}{\ln\left[1 + \frac{h}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 - 1}\right]}\,. \tag{35}$$

Pentru cazul din fig. 8 se poate defini, diametrul echivalent după relația (33) rezultînd

$$d_e = 4\,\frac{(a-\delta)(b-\delta)}{a+b-2\delta}\,. \tag{36}$$

Calculul fluxului termic Q_{k1} ce străbate pămîntul către aerul exterior se poate face astfel cu formula

$$Q_{k1} = \frac{\theta_1 - \theta_s}{R_{k1}}\,, \tag{37}$$

cu

$$R_{k1} = \frac{1}{2\pi\lambda l}\ln\left[\frac{(a+h)(a+b-2\delta)}{2(a-\delta)(b-\delta)} + \sqrt{\frac{(a+h)^2(a+b-2\delta)^2}{4(a-\delta)^2(b-\delta)^2} - 1}\right], \tag{38}$$

rezultînd din oglindirea canalului către suprafața pămîntului care e în același timp izoterma θ_s. Temperatura θ_1 este temperatura suprafeței exterioare a canalului.

Pierderile de căldură ale canalului către stratul de apă subterană pot fi calculate cu o relație similară, rezultată din oglindirea canalului de termoficare către suprafața stratului de apă, de temperatură θ_a = const.

Calculînd după (32) cu

$$h_1 = H - h - 2a \tag{39}$$

rezultă

$$Q_{k2} = \frac{\theta_1 - \theta_a}{R_{k2}}\,, \tag{40}$$

cu

$$R_{k2} = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \left[\frac{(a+b-2\delta)\ (H-h-2a)}{2\,(a-\delta)\,(b-\delta)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{(a+b-2\delta)^2\ (H-h-2a)^2}{4\,(a-\delta)^2\ (b-\delta)^2} - 1} \right] \tag{41}$$

termenii păstrînd semnificațiile din fig. 8.

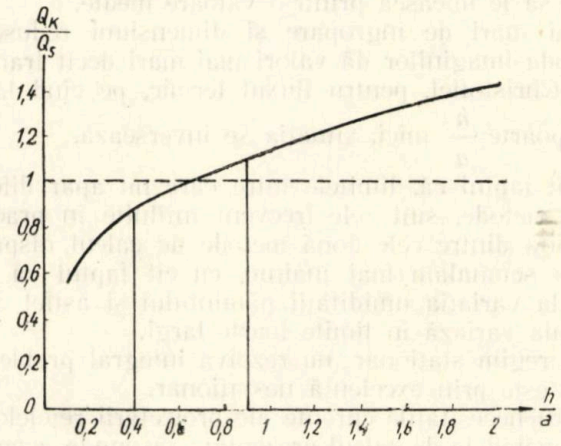


Fig. 10. Variația raportului $\frac{Q_k}{Q_s}$ în funcție de $\frac{h}{a}$

În relațiile de mai sus se pot introduce temperaturile θ_i a aerului din canal și θ_e a aerului exterior, avînd grijă ca rezistențele termice să se modifice corespunzător.

Cele două metode de calcul prezentate anterior arată că între ele pot exista diferențe, provenind din aproximarea izotermelor reale cu cele rezultate fie din metoda imaginilor, fie prin transformarea conformă Schwarz-Christoffel.

Ar trebui ca raportul fluxului termic calculat prin ambele metode să fie egal cu unitatea.

Făcînd raportul relațiilor (35) și (28) pentru cazul din fig. 7 rezultă:

$$\frac{Q_k}{Q_s} = \frac{\pi}{\ln\left[1+\frac{h}{a}+\sqrt{\left(1+\frac{h}{a}\right)^2-1}\right]\cdot\left[\frac{a}{h}+\frac{2}{\pi}\ln\left(1+\pi\frac{a}{h}\right)+\right.}$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{1}{1+\pi\frac{h}{a}}\right)\right]} \tag{42}$$

Diferențele între cele două metode de calcul sînt expuse în graficul din fig. 10.

3. *Concluzii*

Rezultatele calculelor efectuate pentru erori ce nu depășesc 10% arată că pentru rapoarte $\frac{h}{a}$ cuprinse între 0,4 și 0,9 diferențele sînt acceptabile, adică pentru canale în genere mari, îngropate la adîncimi mici.

Diferențe mari între cele două metode de calcul apar în afara acestor limite, iar experiența se poate pronunța în favoarea uneia sau alteia dintre metode, sau să le unească printr-o valoare medie.

La adîncimi mari de îngropare și dimensiuni reduse de canal, se observă că metoda imaginilor dă valori mai mari decît transformarea conformă Schwarz-Christoffel, pentru fluxul termic, pe cînd la adîncimi mici, adică pentru rapoarte $\frac{h}{a}$ mici, situația se inversează.

De remarcat faptul că, limitele între care nu apar diferențe sensibile între cele două metode, sînt cele frecvent întîlnite în practică.

În plus limita dintre cele două metode de calcul dispare cu atît mai mult, după cum semnalam mai înainte, cu cît faptul că ploaia, zăpada sau seceta duc la variația umidității pămîntului și astfel conductibilitatea termică a acestuia variază în limite foarte largi.

Tratarea în regim staționar nu rezolvă integral problematica fenomenului fizic, care este prin excelență nestaționar.

Totuși pentru necesitățile curente ale proiectării rețelelor termice, folosirea uneia din metodele de calcul prezentate răspunde acoperitor exigențelor. Concluziile acestui studiu pot fi folosite și la alte tipuri de canale, de exemplu de tip industrial, ce necesită un calcul termic.

BIBLIOGRAFIE

1. *Șubin, E. P.:* Proiectarea rețelelor termice urbane, partea I, trad. d. rusă. Editura Energetică de Stat, 1954.
2. *Hamburger, L.:* Introducere în teoria propagării căldurii. Partea I. Editura Academiei R.P.R., 1956.
3. *Eckert, E.R.G., Drake, R.M.:* Introduction to the Transfer of Heat and Mass 1959.
4. *Gröber, H. Erk, S. Grigull, U.:* Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer Berlin 1955.
5. *Davidescu A., Leonachescu, N., Chiriac, F.:* Contribuție la calculul scurgerii căldurii într-un semispațiu. Buletinul Științific nr. 12 din 1964, Institutul de Construcții București.
6. *Stoïcescu, L., Ștefănescu, D., Grecu, T., Dănescu, A.:* Termotehnica vol. I București 1957.
7. *Ștefănescu, D., Grünwald, B. Adler, O.:* Transmisia de căldură și dinamica gazelor, București, 1960.
8. *Vlădea I.:* Bazele teoretice ale termotehnicii, București 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

MAȘINI TERMICE

C. Z.: 621.431

O METODĂ DE CALCUL AL ARDERII PICĂTURII DE COMBUSTIBIL ÎN PERIOADA ARDERII DIFUZIVE ÎN MOTORUL CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE *

N. APOSTOLESCU

Ultima parte a arderii în motorul cu aprindere prin comprimare, care angajează adesea fracțiunea principală a combustibilului injectat în cursul unui ciclu, se desfășoară după mecanismul arderii difuzive [1].

Considerînd că transportul oxigenului în zona de reacție este factorul limitativ al dezvoltării arderii în această perioadă, viteza reacțiilor chimice

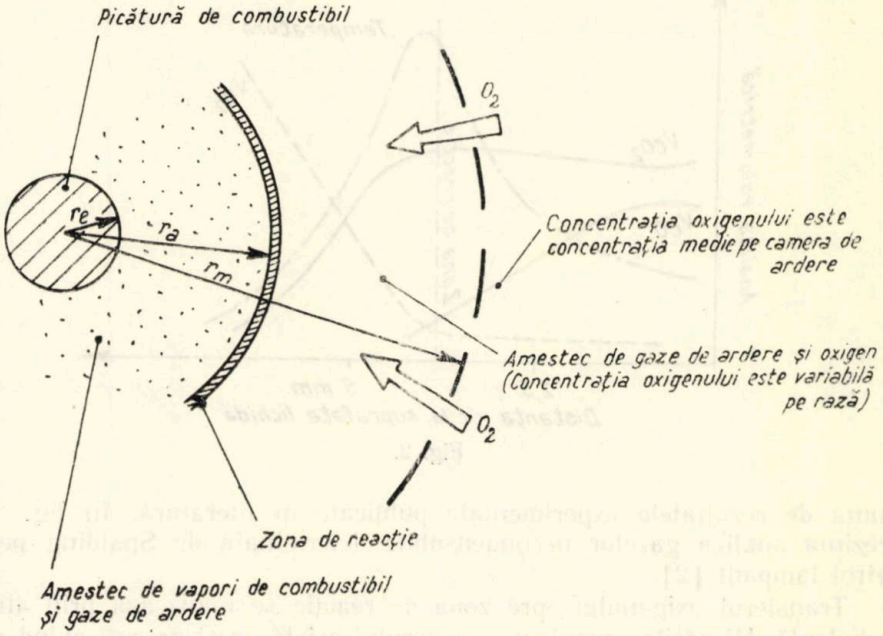


Fig. 1.

* Lucrarea comunicată la sesiunea cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 28—30 mai 1965.

depășind cu mult viteza formării amestecului, se poate stabili un model fizic al arderii picăturii de combustibil.

În cazul general, picătura de combustibil este înconjurată în cursul evaporării sale de o coroană sferică de vapori.

În condițiile desfășurării arderii, volumul de vapori de combustibil este limitat de zona de reacție (fig. 1). Admițînd că viteza reacțiilor chimice este ridicată în raport cu viteza arderii combustibilului, grosimea zonei de reacție este neglijabilă în raport cu dimensiunile coroanei formată din vapori de combustibil. De aceea, în continuare, se consideră că zona de reacție reprezintă suprafața de rază r_a care cuprinde vapori de combustibil.

În exteriorul său se găsește oxigen care difuzează spre zona de reacție. Se admite că concentrația de oxigen crește progresiv de la zona de reacție pînă la raza r_m dincolo de care concentrația de oxigen devine constantă, egală cu concentrația medie pe camera de ardere.

Ținînd seama că s-a adoptat ca premiză viteza ridicată a reacțiilor chimice în raport cu viteza transportului de oxigen spre zona de reacție, prezența oxigenului dincolo de zona de reacție este imposibilă; concentrația de oxigen se anulează la zona de reacție. Această ipoteză este susținută de rezultatele experimentale publicate în literatură. În fig. 2 se prezintă analiza gazelor necondensabile determinată de Spalding pentru petrol lampant [2].

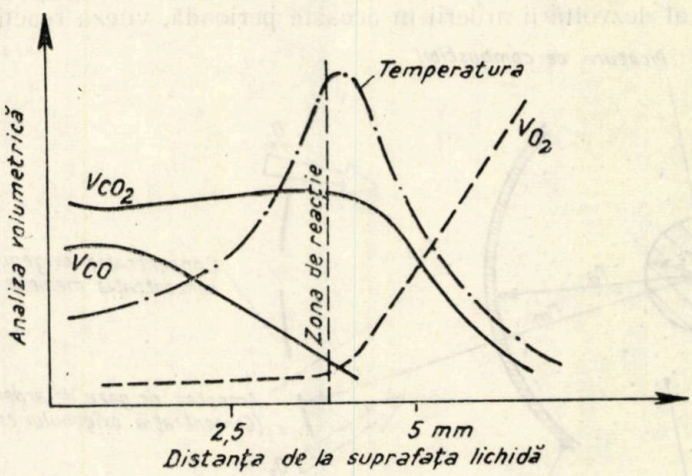


Fig. 2.

Transferul oxigenului spre zona de reacție se realizează prin difuzie turbulentă. Mișcările organizate ale aerului asistă acest proces, avînd rolul de a mări gradientul concentrației de oxigen în jurul zonei de reacție. În cadrul modelului admis, mișcările organizate ale aerului influențează mărimea razei r_m.

Arderea combustibilului decurge în cazul general în două etape:

a) în perioada existenței picăturii lichide de combustibil, arderea se desfășoară paralel cu vaporizarea combustibilului. Vaporizarea depășește în general ca viteză procesul de ardere;

b) după terminarea vaporizării combustibilului, se consumă volumul de vapori rămas.

Aceste două perioade necesită o tratare separată.

1. *Perioada arderii picăturii lichide*

Studiul procesului de vaporizare a combustibilului Diesel în condițiile de temperatură și presiune caracteristice perioadei arderii difuzive conduce la concluzia că evaporarea se desfășoară cu viteze înalte, corespunzătoare stabilirii la periferia picăturii a unor temperaturi apropiate de temperatura critică, maximă posibilă.

Pentru a pune în evidență acest aspect, s-a efectuat calculul temperaturii de echilibru la periferia picăturilor de combustibil t_p în cursul vaporizării, pe baza ecuației [3].

în care:

$$\lambda [t_c - t_p] = k_p \cdot \Delta i \cdot A e^{-\frac{B}{T_p}}$$

λ — coeficientul de conductibilitate al amestecului din camera de ardere;

t_c, T_c — temperatura amestecului din camera de ardere (°C, respectiv °K);

t_p, T_p — temperatura la suprafața picăturii (°C, respectiv °K);

k_p — coeficientul de difuzie la temperatura t_p a picăturii și presiunea p_c din camera de ardere

$$k_p = k_{p_0} \frac{T_p}{273\ p}$$

k_{p_0} — coeficientul de difuzie raportat la gradientul presiunii parțiale, la O°C și 1 ata;

Δi — creșterea entalpiei picăturii;

p_c — presiunea din camera de ardere, ata;

A, B — constante.

Valorile constantelor corespunzătoare pentru motorină, au fost adoptate după datele publicate în lucrarea citată.

Rezultatele calculelor sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

T_c	1400°		1600°		1900°	
p_c	40	60	40	60	40	60
t_p	415	449°	425	460°	440°	475°

Valorile notate cu asterisc depășesc temperatura critică pentru motorină, egală cu cca 430°C [4].

La temperaturi și presiuni ridicate, de ordinul celor care se ating în perioada arderii difuzive în motorul cu injecție directă, se poate considera astfel că vaporizarea picăturii are loc cu viteză maximă, independent de desfășurarea simultană a arderii.

Cercetări experimentale recente confirmă această concluzie. În fig. 3 se prezintă rezultatele obținute de Masdin și Thring [5]. Deși cercetarea

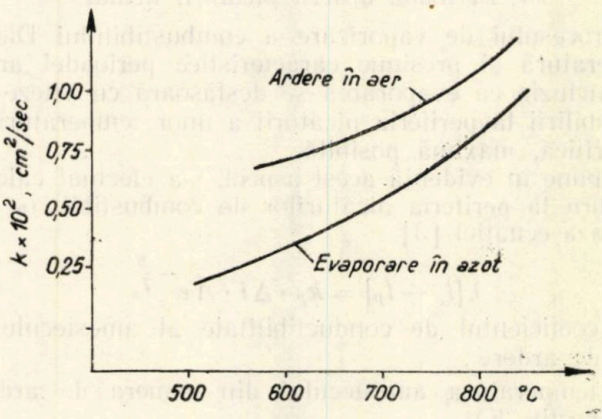


Fig. 3.

este efectuată în domeniul temperaturilor relativ joase, se observă tendința netă de apropiere a curbelor de variație a constantei de vaporizare a picăturii în cazul arderii în aer și vaporizării în azot la creșterea temperaturii mediului.

La temperatura de 560°C, constanta de vaporizare crește în cazul prezenței unei anvelope de flacără cu cca 75%, iar la 800°C crește cu numai 25%.

Pentru a se putea calcula viteza de transfer a oxigenului, de care este legată viteza de ardere, este necesar să se stabilească legea de variație a concentrației de oxigen pe rază.

Se admite un interval de timp Δt suficient de redus, pentru a se putea adopta valori constante, medii pe interval, ale razelor r_m și r_a. Se poate admite de asemeni o valoare constantă, medie pe intervalul Δt a concentrației de oxigen $\widetilde{C}_m$ la raza r_m. În aceste condiții și ținînd seama că la raza r_a concentrația este nulă, procesul de transfer al oxigenului prin difuzie turbulentă devine un proces staționar.

Se consideră o coroană sferică cu raza medie r, de grosime elementară dr, și se scrie egalitatea debitelor de substanță care trec prin suprafețele cu razele $r - \frac{dr}{2}$ și $r + \frac{dr}{2}$, prin difuzie turbulentă în unitatea de timp.

Aplicînd legea lui Fick

$$m_{0_2} = - S \varrho D \frac{dC}{dr}$$

în care

m_{0_2} — cantitatea de substanță 0_2 care trece prin suprafața S în unitatea de timp ;

$C = \frac{\varrho_{0_2}}{\varrho}$ — concentrația substanței O_2 ;

D — coeficientul de difuzie,

se obține cantitatea care intră în coroana sferică

$$- 4\pi \left(r - \frac{dr}{2}\right)^2 \varrho \tilde{D} \frac{d\tilde{C}\left(r - \frac{dr}{2}\right)}{dr}$$

și cantitatea care părăsește coroana sferică

$$- 4\pi \left(r + \frac{dr}{2}\right)^2 \varrho \tilde{D} \frac{d\tilde{C}\left(r + \frac{dr}{2}\right)}{dr}$$

în care

ϱ — masa specifică ;

$\tilde{D}$ — coeficientul de difuzie turbulentă pentru oxigen ;

$\tilde{C}$ — concentrația de oxigen.

Scriind egalitatea celor două cantități, dezvoltînd și reținînd numai infiniții mici de ordinul I, se obține în final

$$r \frac{d^2\tilde{C}}{dr^2} + 2 \frac{d\tilde{C}}{dr} = 0 . \qquad (1)$$

Ecuația diferențială obținută este de ordinul II, liniară și omogenă. Soluția ecuației este

$$\tilde{C} = B + \frac{A}{r} . \qquad (2)$$

Constantele A și B se determină scriind condițiile la limite :

— pentru $r = r_a$, $\tilde{C} = 0$

— pentru $r = r_m$, $\tilde{C} = \tilde{C}_m$

Se obține

$$A = -\widetilde{C}_m \frac{r_m r_a}{r_m - r_a} \quad \text{și} \quad B = \widetilde{C}_m \frac{r_m}{r_m - r_a}$$

și înlocuind în (2) se obține în final

$$\widetilde{C} = \widetilde{C}_m \frac{r_m r_a}{r_m - r_a} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}\right] \tag{3}$$

In mod analog se obține legea de variație a concentrației de vapori de combustibil între suprafața picăturii de combustibil lichid și zona de reacție.

In intervalul de timp Δt considerat mai sus, se admite și pentru raza picăturii r_l o valoare constantă, medie pe interval. Concentrația vaporilor la suprafața picăturii fiind constantă, procesul de transfer al vaporilor de combustibil este staționar ca și în cazul oxigenului.

Ținînd seama de procesul de transfer difuziv în condițiile vaporizării combustibilului, se va aplica în acest caz legea lui Ștefan [6]:

$$m_v = -S \frac{D}{R_v T} \cdot \frac{p}{p - p_v} \cdot \frac{dp_v}{dr}$$

în care

p_v — presiunea parțială a substanței care se vaporizează;
p — presiunea totală;
T — temperatura
R_v — constanta gazelor pentru substanța v.

Procedînd ca mai sus, se obține în final ecuația

$$r \frac{d^2 p_v}{dr^2} + 2 \frac{dp_v}{dr} = 0 \tag{4}$$

cu soluția generală

$$p_v = B' + \frac{A'}{r} \tag{5}$$

se pun condițiile la limite

— pentru $r = r_l$, $p_v = p_l$ presiunea de saturație la suprafața picăturii;

— pentru $r = r_a$, $p = 0$.

Se obține

$$p_v = p_l \frac{r_a r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right]. \tag{6}$$

Întrucît vaporizarea combustibilului se desfășoară practic independent de procesul de ardere, cu o viteză care depășește viteza de ardere, grosimea coroanei sferice care cuprinde vaporii de combustibil tinde să crească în timp. Astfel din cantitatea totală de combustibil vaporizat M într-un interval de timp Δt, o parte M_a arde, iar restul M_s se acumulează, antrenînd deplasarea zonei de reacție.

Dacă se consideră procesul staționar pe intervalul Δt, cu limitele r_l și r_a fixe, valoarea medie pe interval a razei r_a rezultă din următoarele condiții: cantitatea de substanță cuprinsă în coroana sferică delimitată de rază r_a să fie egală cu cea cuprinsă în intervalul de timp precedat plus cantitatea nou acumulată M_s, iar suprafața sferică de rază r_a să asigure difuzia cantității M_a care arde în cursul intervalului.

Cantitatea de substanță cuprinsă în coroana sferică este dată de integrala

$$\int_{r}^{r_a} 4\pi r^2 \varrho C\, dr .$$

Se înlocuiește (6) în expresia de mai sus, ținînd seama de relația de legătură.

$$C = \frac{p_v}{p} \cdot \frac{R}{R_v} \tag{7}$$

în care

C — concentrația vaporilor de combustibil;

R — constanta amestecului de vapori de combustibil și gaze arse.

Se obține

$$4\pi\varrho \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_a r_l}{r_a - r_l} \int_{r_l}^{r_a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right) r^2\, dr =$$

$$= 4\pi\varrho \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{r_a^3}{6} - \frac{r_l^2}{6}(3 r_a - 2 r_l)\right]. \tag{8}$$

Pe baza condițiilor arătate mai sus, se scrie ecuația de bilanț material care determină valoarea razei r_a medii pe intervalul Δt:

$$M_a + M_s = M_v . \tag{9}$$

Pentru a explicita termenul M_a, se ține seama că debitul de vapori de combustibil și debitul de oxigen prin zona de reacție sînt proporționale. Respectînd condițiile admise mai sus, factorul de proporționalitate este tocmai coeficientul stoichiometric σ.

Cantitatea de combustibil consumat în intervalul de timp Δt va fi dată de relația

$$M_a = \sigma S_a \varrho \tilde{D} \left.\frac{d\tilde{C}}{dr}\right|_{r=r_a} \cdot \Delta t = \sigma 4\pi \varrho \tilde{D} \tilde{C}_m \frac{r_m r_a}{r_m - r_a} \Delta t. \qquad (10)$$

Dacă se notează cu M_0 cantitatea de substanță prezentă în coroana sferică în intervalul precedent, și cu M_1 cantitatea prezentă în intervalul considerat:

$$M_1 = 4\pi \varrho \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{r_a^3}{6} - \frac{r_l^2}{6}(3r_a - 2r_l)\right]$$

M_s va fi egal cu

$$M_s = M_1 - M_0 = 4\pi \varrho \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{r_a^3}{6} - \frac{r_l^2}{6}(3r_a - 2r_l)\right] - M_0 \qquad (11)$$

În fine, pentru explicitatea termenului M_v, se utilizează legea de vaporizare:

$$r_l^2 = (r_l^0)^2 - \frac{kt}{4}$$

în care

r_l^0 — raza picăturii la începutul intervalului;
r_l — raza picăturii la sfîrșitul intervalului;
k — constanta de vaporizare.

Cantitatea vaporizată în intervalul de timp Δt va fi:

$$M_v = \frac{4\pi}{3} \varrho_c \left\{(r_l^0)^3 - \left[(r_l^0)^2 - \frac{k \cdot \Delta t}{4}\right]^{3/2}\right\} \qquad (12)$$

în care

ϱ_c — masa combustibilului.

Înlocuind (10), (11), (12) în (9) se obține:

$$4\pi \varrho \sigma \tilde{D} \tilde{C}_m \frac{r_m r_a}{r_m - r_a} \Delta t + 4\pi \varrho \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{r_a^3}{6} - \frac{r_l^2}{6}(3r_a - 2r_l)\right] -$$

$$- M_0 = \frac{4\pi}{3} \varrho_c \left\{(r_l^0)^3 - \left[(r_l^0)^2 - \frac{k\Delta t}{4}\right]^{3/2}\right\}$$

sau

$$\sigma \tilde{D} \tilde{C}_m \frac{r_m \cdot r_a}{r_m - r_a} \Delta t + \frac{R}{R_v} \cdot \frac{p_l}{p} \cdot \frac{r_l}{r_a - r_l} \cdot \left[\frac{r_a^3}{6} - \frac{r_l^2}{6}(3r_a - 2r_l)\right] =$$

$$= \frac{M_0}{4\pi \varrho} + \frac{\varrho_c}{3\varrho} \left\{(r_l^0)^3 - \left[(r_l^0)^2 - \frac{k\Delta t}{4}\right]^{3/2}\right\} \qquad (13)$$

Înlocuind în ecuația obținută valoarea medie pe interval a razei picăturii r_l, se poate calcula valoarea medie a razei zonei de reacție r_a. În continuare se poate determina cu ajutorul relației (8) cantitatea de vapori de combustibil acumulați în coroana sferică și cu relația (10) cantitatea arsă în intervalul Δt considerat.

2. *După vaporizarea completă a picăturii*

Începutul celei de a doua perioade este marcat prin dispariția picăturii lichide. Calculul efectuat în ultimul interval al perioadei precedente precizează distribuția concentrației vaporilor de combustibil la începutul perioadei a doua $c = \varphi(r)$ și valorile razelor r_a și r_m. În cursul perioadei a doua, pe măsura consumării vaporilor de combustibil prin ardere se modifică continuu concentrația în centru; raza zonei de reacție r_a fiind de asemeni continuu variabilă, rezultă că curba de distribuție a concentrației vaporilor de combustibil este continuu variabilă.

Procesul transferului vaporilor de combustibil spre zona de reacție este astfel esențialmente nestaționar în această perioadă.

Pentru a preciza legea de variație a concentrației pe rază, se scrie ecuația generală pentru procesul de difuzie în condiții nestaționare [7]:

$$r^2 \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

Ecuația diferențială obținută se poate rezolva prin metoda separării variabilelor. Admițînd ca și mai înainte o valoare constantă a razei r_a, medie pe un interval de timp Δt, se obține soluția generală:

$$C(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D\lambda_k^2 t}\left(A_k \frac{\cos \lambda_k r}{r} + B_k \frac{\sin \lambda_k r}{r}\right) \tag{14}$$

În continuare, se scriu condițiile la limite și condiția inițială:

1) Concentrația în centru este finită

$$C(0, t) \neq 0$$

rezultă

$$A_k = 0. \tag{15}$$

2) Concentrația în zona de reacție este nulă

$$C(r_a, t) = 0$$

rezultă

$$\frac{\sin \lambda_k r_a}{r_a} = 0$$

deci

$$\sin \lambda_k r_a = 0$$

cu soluția generală

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{r_a}. \tag{16}$$

Înlocuind (15) și (16) în soluția generală (14), se obține

$$C(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\sin\frac{k\pi}{r_a}r}{r} e^{-D\left(\frac{k\pi}{r_a}\right)^2 t} \tag{17}$$

Scriind și condiția inițială

3) $C(r,0)=\varphi(r)$

se obține

$$r\varphi(r)=\Sigma B_k \cdot \sin\frac{k\pi r}{r_a}$$

$$B_k=\int_0^{r_a} r\varphi(r)\cdot\sin\frac{k\pi r}{r_a}dr : \int_0^{r_a}\sin^2\frac{k\pi r}{r_a}dr \tag{18}$$

unde concentrația inițială, exprimată sub forma presiunii parțiale este dată de expresia (6)

$$\varphi(r)=p_l\frac{r_a r_l}{r_a-r_l}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right].$$

Pentru raza r_l se poate admite o valoare foarte redusă în momentul terminării vaporizării *, iar în interval $(0, r_l)$ concentrația se consideră constantă, egală cu p_l.

Se rezolvă mai întîi integrala

$$\int_0^{r_a}\sin^2\frac{k\pi r}{r_a}dr=\frac{r_a}{2}. \tag{19}$$

Se înlocuiește (6) și (19) în (18) și ținînd seama de cele arătate în continuare rezultă

$$B_k=\frac{2}{r_a}\left[\int_0^{r_l} r p_l \sin\frac{k\pi r}{r_a}dr+\int_{r_l}^{r_a} r p_l\frac{r_a r_l}{r_a-r_l}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)\sin\frac{k\pi r}{r_a}dr\right]=$$

$$=\frac{2}{r_a}[I_1+I_2] \tag{20}$$

$$I_1=p_l\int_0^{r_l} r\sin\frac{k\pi r}{r_a}dr=p_l\left|-\frac{r_a}{k\pi}r\cos\frac{k\pi r}{r_a}+\left(\frac{r_a}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi r}{r_a}\right|_0^{r_l}=$$

$$=p_l\left[-\frac{r_a r_l}{k\pi}\cos\frac{k\pi r_l}{r_a}+\left(\frac{r_a}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi r_l}{r_a}\right].$$

* egală de exemplu cu valoarea medie în ultimul interval Δt de vaporizare.

$$I_2 = p_l \frac{r_a r_l}{r_a - r_l} \int_{r_l}^{r_a} \left(1 - \frac{r}{r_a}\right) \sin \frac{k\pi r}{r_a}\, dr =$$

$$= p_l \frac{r_a r_l}{r_a - r_l} \left| -\frac{r_a}{k\pi} \cos \frac{k\pi r}{r_a} + \frac{1}{k\pi} r \cos \frac{k\pi r}{r_a} - \frac{1}{r_a}\left(\frac{r_a}{k\pi}\right)^2 \sin \frac{k\pi r}{r_a} \right|_{r_l}^{r_a} =$$

$$= p_l \frac{r_a r_l}{r_a - r_l} \left[\frac{r_a - r_l}{k\pi} \cos \frac{k\pi r_l}{r_a} + \frac{r_a}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi r_l}{r_a} \right].$$

$$I_1 + I_2 = p_l \frac{r_a^2}{k^2\pi^2} \cdot \frac{r_a}{r_a - r_l} \cdot \sin \frac{k\pi r_l}{r_a}$$

$$B_k = \frac{2}{r_a} [I_1 + I_2] = 2 p_l \frac{r_a^2}{r_a - r_l} \cdot \frac{1}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi r_l}{r_a}. \qquad (21)$$

Se înlocuiește valoarea obținută în (17)

$$C = 2 p_l \frac{r_a^2}{r_a - r_l} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi r_l}{r_a} \sin \frac{k\pi r}{r_a} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-D\left(\frac{k\pi}{r_a}\right)^2 t}$$

sau

$$C \approx \frac{2 p_l r_a}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi r_l}{r_a} \cdot \sin \frac{k\pi r}{r_a} \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-D\left(\frac{k\pi}{r_a}\right)^2 t} \qquad (22)$$

Întrucît concentrația oxigenului la limita coroanei sferice care înconjoară zona de racție poate fi considerată constantă pe intervalul de timp $\triangle t$ ca și în prima perioadă de ardere, iar pentru razele suprafețelor care limitează coroana se pot admite valori constante, medii pe interval, procesul transferului oxigenului poate fi conceput și în cea de a doua perioadă tot staționar, rămînînd valabilă astfel expresia (3):

$$\tilde{C} = \tilde{C}_m \frac{r_m r_a}{r_m - r_a} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r}\right).$$

Valoarea razei r_a, medii pe interval, se calculează acum scriind ecuația proporționalității între debitul de vapori de combustibil și debitul de oxigen prin zona de reacție în intervalul Δt.

Debitul de oxigen este

$$\varrho \tilde{D} \frac{d\tilde{C}}{dr} \Bigg|_{r=r_a} \cdot \Delta t = \varrho \tilde{D} \tilde{C}_m \frac{r_m}{r_a (r_m - r_a)} \cdot \Delta t.$$

iar debitul de combustibil

$$\varrho D \frac{\partial C}{\partial r}\Bigg|_{r=r_a} \cdot \Delta t = \varrho D \frac{2 p_l r_a}{\pi^2} \sum \frac{1}{k^2} \sin \frac{k \pi r_l}{r_a} \left[\frac{k \pi}{r_a} \cos \frac{k \pi r}{r_a} \cdot \frac{1}{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \sin \frac{k \pi r}{r_a} \right]_{r=r_a} \cdot \left(e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t} \right)_m \cdot \Delta t =$$

$$= \varrho D \frac{2 p_l}{\pi r_a} \Sigma (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \cdot \sin \frac{k \pi r_l}{r_a} \left(e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t} \right)_m \cdot \Delta t$$

în care

$$\left(e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t} \right)_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{D} \cdot \left(\frac{r_a}{k \pi} \right)^2 \left[e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t_1} - e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t_2} \right]. \qquad (23)$$

Factorul de proporționalitate fiind coeficientul stoichiometric σ, se obține:

$$\sigma \widetilde{D} \widetilde{C}_m \frac{r_m}{r_a (r_m - r_a)} = D \frac{2 p_l}{\pi r_a} \Sigma (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \sin \frac{k \pi r_l}{r_a} \left(e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t} \right)_m$$

și înlocuind (23) se obține după simplificări

$$\sigma \widetilde{D} C_m \frac{r_m}{r_a (r_m - r_a)} = \frac{2 p_l}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^3} \cdot \sin \frac{k \pi r_l}{r_a} \left[e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t_1} - \right.$$

$$\left. - e^{-D \left(\frac{k \pi}{r_a}\right)^2 t_2} \right]. \qquad (24)$$

Cu valoarea obținută r_a se determină apoi cantitatea de combustibil arsă în intervalul Δt, utilizînd relația (10).

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Apostolescu, N.* — Considerații asupra desfășurării arderii în motoarele cu aprindere prin comprimare rapide, cu injecție directă. Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Tom XXVII, Nr. 4, 1965.
2. *Spalding, D. B.* — Some fundamentals on combustion, Butterworth Scientific Publications, London, 1955.
3. *Vîrubov, D. N.* — O metodike rasceta isparenia topliva, în Culeg. Dvigateli vnutrennego sgorania, vîpusk 25, Mașghiz, Moskva, 1954.
4. *Robu, V. I.* — Distilare, fracționare, Ed. Tehnică, București, 1963.
5. *Masdin, E. G., Thring, M. W.* — Combustion of single droplets of liquid fuel, J. Inst. Fuel, 1962.
6. *Eckert, E. R. G., Drake, R. M.* — Teoria teplo i massoobmena, trad. din limba engleză, Gosenergoizdat, Moscova, 1964.
7. *Smirnov, V. I.* — Curs de matematici superioare, vol. II (trad. din limba rusă). Ed. Tehnică, București, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. : 621.313.333

FUNCȚIONAREA MOTORULUI ASINCRON CU ROTOR MASIV LA FRECVENȚĂ ȘI TENSIUNE VARIABILĂ *

NICOLAE GALAN

Practica exploatării arată că motoarele asincrone precum, de altfel, și alte tipuri de motoare electrice — funcționează de multe ori în condiții diferite de cele nominale. Adeseori în rețeaua de alimentare se produc abateri de lungă durată ale tensiunii și frecvenței de la valorile lor nominale, sau uneori este necesar să folosim motoarele la tensiuni și frecvențe diferite de cele nominale, așa, de exemplu, se întîmplă ca un motor calculat pentru frecvența de 60 Hz să fie întrebuințat în rețele cu frecvența de 50 Hz sau motoare calculate pentru o anumită tensiune să funcționeze în rețele de o altă tensiune; o situație analogă se întîlnește la reglajul vitezei motorului prin variația frecvenței, sau prin variația tensiunii. De aici rezultă că un asemenea studiu prezintă interes.

Se va analiza comportarea motorului asincron cu rotor masiv la frecvență și tensiune variabilă și cuplu util constant.

Pentru a analiza variația diferitelor mărimi care caracterizează funcționarea motorului asincron cu rotor masiv este necesar să prezentăm cîteva elemente din teoria acestui motor.

I. *Elemente de teorie*

Motorul asincron cu rotor masiv se deosebește de motoarele asincrone obișnuite prin faptul că are rotorul construit din oțel turnat; în ceea ce privește statorul nu intervine nici o modificare. Acest motor prezintă unele avantaje importante, cum ar fi: cuplu de pornire mare, curent de pornire mic, siguranță mecanică în funcționare, tehnologia rotorului simplă; printre dezavantaje remarcăm pe cele mai importante: factor de putere mic, randament mic.

Pe baza ecuațiilor de funcționare se poate concepe o schemă electrică echivalentă, așa cum este reprezentată în figura 1.

În schema electrică echivalentă s-a notat:

$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1$ — impedanța fazei statorice formată din rezistența și reactanța de scăpări a acestei faze;

* Manuscris predat la redacție la 19 februarie 1965.

$\underline{Z} = r_0 + jx_0$ — impedanța de magnetizare formată din rezistența corespunzătoare pierderilor în fier și reactanța corespunzătoare fluxului util;

$\underline{C}_1 = \frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_0} \approx 1 + \frac{x_1}{x_0} \approx c_1$, deoarece reactanța x_0 este foarte mare;

$\underline{Z}'_2 = \frac{r'_{20}}{S} + j\frac{x'_{20}}{S}$ — impedanța rotorului raportată echivalentă formată din rezistența și reactanța de scăpări a rotorului;

S — alunecarea motorului.

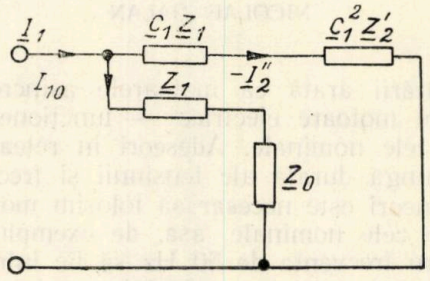


Fig. 1.

Parametrii schemei echivalente se calculează ca și la mașinile asincrone obișnuite cu excepția parametrilor rotorici.

În ipoteza că permeabilitatea magnetică este constantă și cîmpul electromagnetic în rotor este plan paralel, impedanța rotorică raportată, la alunecarea $s = 1$, va fi:

$$Z'_{20} = r'_{20} + jX'_{20} = (1{,}6 + j\,0{,}96)\frac{m_1(W_1 K_{w_1})^2}{p K_\Lambda}\sqrt{\frac{\mu_e l_n}{\gamma}}$$

unde:

m_1 — numărul de faze al statorului;
w_1 — numărul spirelor fazei statorice;
K_{w_1} — coeficientul de înfășurare a statorului;

$$K_\Lambda = \frac{1}{4}\left\{1n\left(1+\frac{1}{\Lambda}\right) - \cos\pi\Lambda\,[ci\pi(1+\Lambda) - ci\pi\Lambda] - \right.$$

$$\left. - \sin\pi\Lambda\,[si\pi(1+\Lambda) - si\pi\Lambda]\right\}$$ — coeficient care ține seamă de repartiția spațială a cîmpului magnetic;

$\Lambda = \frac{l_i}{D}$ în care l_i și D sînt lungimea ideală a mașinii și respectiv diametrul interior al statorului;

p — numărul perechilor de poli ;
γ — conductivitatea materialului statorului ;
μ_e — permeabilitate magnetică la suprafața rotorului ;
$f_n = 50$ Hz — frecvența nominală a rețelei ;

Calculul parametrilor rotorici este dificil, dacă ținem seamă de variația permeabilității magnetice a materialului din care este construit rotorul, în funcție de cîmpul magnetic.

La mașinile de putere mare datele calculate se apropie mult de datele experimentale chiar dacă considerăm $\mu_e = ct$, însă la mașini de putere mică este absolut necesar să ținem seamă de variația permeabilității magnetice în funcție de cîmpul magnetic.

Dacă considerăm $\mu = K_1 H^{\frac{1}{K}-1}$, atunci rezistența rotorică la $s=1$ se poate exprima în mod aproximativ, în funcție de valoarea eficace a curentului echivalent din rotor, sub următoarea formă :

$$\frac{r'_{20}}{r'_{20\,n}} = \left(\frac{I'_{2n}}{I'_2}\right)^{\frac{K-1}{2K}}$$ relație dată în [1].

Indicele n îl vom afecta mărimilor corespunzătoare funcționării motorului la datele nominale.

Pentru $k=7$ datele calculate se apropie foarte mult de datele experimentale. Se poate considera $k=1$ în cazul motoarelor de putere mare.

Dacă se notează : $a = \frac{r'_{20}}{x'_{20}}$, $b = \frac{r_1}{x_1}$, $m = \frac{C_1 r'_{20}}{x_1}$ vom obține expresii analitice ușor de utilizat pentru mărimile care ne interesează ; aceste mărimi le vom exprima în unități relative, raportarea făcîndu-se la valorile lor corespunzătoare frecvenței și tensiunii nominale.

Experiența arată că raportul a depinde în foarte mică măsură de curentul rotoric, prin urmare se poate considera constant.

Raportul b depinde într-o oarecare măsură de saturația mașinii, însă se poate considera constant ; această ipoteză nu duce la erori importante de calcul. În ce privește raportul m, la mașinile de putere mică nu se mai poate considera constant, și atunci vom calcula raportul $\frac{m}{m_n}$, unde :

$$m_n = \frac{C_1 r'_{20n}}{x_1} \quad \text{și} \quad m = \frac{C_1 r'_{20}}{x_1 \sqrt{k_f}}.$$

Ținînd seamă de (1) găsim raportul :

$$\frac{m}{m_n} = \frac{1}{\sqrt{k_f}} \cdot \left(\frac{I'_{2n}}{I'_2}\right)^{\frac{K-1}{2K}} \qquad (2)$$

care, de fapt, dă raportul m în funcție de valoarea eficace a curentului rotoric și de frecvență.

S-a considerat că reactanța de scăpări statorică este proporțională cu frecvența f, iar parametrii rotorici sînt proporționali cu $\sqrt{f}$, aceasta se va avea în vedere și în cele ce urmează.

Variația diferitelor mărimi în funcție de frecvență și tensiune va fi pusă în evidență prin coeficienții:

$$K_u = \frac{U_1}{U_{1n}} \quad \text{și} \quad K_f = \frac{f}{f_n}.$$

În cazul motorului asincron cu rotor masiv după [1] cuplul electromagnetic are următoarea expresie:

$$M = \frac{p\,U_1^2\,r'_{20}\sqrt{S}}{2\pi f\,(r_1\sqrt{S} + C_1 r'_{20})^2 + (x_1\sqrt{S} + C_1 x'_{20})^2} = \frac{p\,U_1^2}{2\pi f\,x_1\,C_1} \cdot \frac{\sqrt{S}}{m\,(1+a^2) + \dfrac{1+b^2}{m}\,S + 2\sqrt{S}\,(a+b)} \tag{3}$$

de unde deducem cuplul electromagnetic maxim și respectiv alunecarea critică.

Mărimile care interesează se vor exprima sub o formă din care să rezulte cu ușurință modul cum acestea variază în funcție de tensiune și frecvență.

Alunecarea critică

$$S_M = m^2\,\frac{1+a^2}{1+b^2} \quad \text{sau} \quad s_M = \frac{S_M}{S_{Mn}} = \left(\frac{m}{m_n}\right)^2 K_f^2\,\frac{1+b^2}{K_f^2+b^2}.$$

Cuplul electromagnetic maxim are expresie:

$$M_M = \frac{U_1^2\,p}{2\pi f\,x_1\,c_1} \cdot \frac{1}{2\,(a+b) + 2\sqrt{(1+a^2)\,(1+b^2)}} \tag{4}$$

sau, în unități relative:

$$m_M = \frac{M_M}{M_{Mn}} = \frac{K_u^2}{K_f} \cdot \frac{a+b+\sqrt{(1+a^2)\,(1+b^2)}}{a\,K_f + b + \sqrt{(1+a^2)\,(K_f^2+b)}} \tag{5}$$

Cuplul de pornire

$$m_p = \frac{M_p}{M_{pn}} = \frac{K_u^2}{K_f} \cdot \frac{m^2\,(1+a^2) + 1 + b^2 + 2\,m\,(b+a)}{m^2\,K_f\,(1+a^2) + K_f^2 + b^2 + 2\,m\sqrt{K_f\,(b+a\,K_f)}} \tag{6}$$

Determinăm variația alunecării la cuplu electromagnetic constant

$$\frac{M}{M_M} = \frac{\dfrac{M}{M_n}}{\dfrac{M_M}{M_n} \cdot \dfrac{M_{Mn}}{M_{Mn}}} = \frac{K}{m_M \cdot K_M} = \frac{2\,(1+q)}{\sqrt{\dfrac{S}{S_M}} + \sqrt{\dfrac{S_M}{S}} + 2\,q} \tag{7}$$

unde s-a notat

$$K=\frac{M}{M_n},\quad K_M=\frac{M_{Mn}}{M_n},\quad q=\frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Din relația (7) deducem:

$$s=\frac{S}{S_n}=\left[\frac{K_M(1+q)-Kq+\sqrt{[K_M(1+q)-Kq]^2-K^2}}{m_M K_M(1+q_f)-Kq_f+\sqrt{[m_M K_M(1+q_f)-Kq_f]^2-K^2}}\right]^2 s_M; \tag{8}$$

unde

$$q_f=\frac{aK_f+b}{\sqrt{(1+a^2)(K_f^2+b^2)}}.$$

Curentul de mers în gol

$$\frac{I_0}{I_{0n}}=\frac{K_u\sqrt{1+h^2}}{\sqrt{1+K_f^2h^2}}\quad\text{unde}\quad h=\frac{x_1+x_0}{r_1+r_0} \tag{9}$$

această expresie a curentului de mers în gol diferă de curentul de mers în gol real, cu atît mai mult cu cît mașina este mai saturată.

$\frac{I_0}{I_{0n}}=f\left(\frac{K_u}{K_f}\right)$ se poate deduce relativ ușor din caracteristica de magnetizare a mașinii.

Știind că cuplul electromagnetic $M=\frac{p I_2'^2 r_{20}'}{2\pi f\sqrt{S}}$ se deduce ușor expresia curentului rotoric echivalent raportat:

$$\frac{I_2'}{I_{2n}'}=\sqrt[\frac{3K+1}{2K}]{K\sqrt{K_f}\sqrt{\frac{S}{S_n}}} \tag{10}$$

unde toate mărimile sînt cunoscute.

Dacă neglijăm rezistența corespunzătoare pierderilor în fier, adică $r_0\approx 0$, atunci curentul statoric va fi:

$$\frac{I_1}{I_{1n}}=\sqrt{\left(\frac{I_0}{I_{0n}}\right)^2\cdot\left(\frac{I_{0n}}{I_{1n}}\right)^2+\left(\frac{I_2'}{I_{2n}'}\right)^2\cdot\left(\frac{I_{2n}'}{I_{1n}}\right)^2+2\frac{I_{0n}}{I_{1n}}\cdot\frac{I_{2n}'}{I_{1n}}\cdot\frac{I_{0n}}{I_{0n}}\cdot\frac{I_2'}{I_{1n}}\cdot\sin\varphi'} \tag{11}$$

unde

$$\frac{I_{2n}'}{I_{1n}}=\sqrt{1-\left(\frac{I_{0n}}{I_{1n}}\cos\varphi_n'\right)^2}-\frac{I_{0n}}{I_{1n}}\sin\varphi_n'$$

$$\cos\varphi'=\frac{b+\frac{mK_f\sqrt{S_n}}{\sqrt{S/S_n}}}{\sqrt{\left(b+\frac{mK_f\sqrt{S_n}}{\sqrt{\frac{S}{S_n}}}\right)^2+\left(1+\frac{am\sqrt{S_n}}{\sqrt{\frac{S}{S_n}}}\right)^2}}; \tag{12}$$

m fiind dat de (2).

Factorul de putere :

$$\cos\varphi_1 = \frac{I'_2 \cos\varphi'}{I_1} = \frac{I'_{2n}}{I_{1n}} \cdot \frac{\frac{I'_2}{I'_{2n}}}{\frac{I_1}{I_{1n}}} \cos\varphi' . \tag{13}$$

Puterea reactivă

$$\frac{Q}{Q_n} = K_u \frac{I_1}{I_{1n}} \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_{1n}} = K_u \frac{I_1}{I_{1n}} \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi_1}{1-\cos^2\varphi_{2n}}} \tag{14}$$

Timpul de pornire

$$t_p = \frac{T_k K_f}{m_M (1+q_f)} \cdot \left[\sqrt{s_M S_{Mn}} (1 - \sqrt{s S_n}) + \frac{1}{3\sqrt{s_M S_{Mn}}} (1 - s S_n \sqrt{s S_n}) + \right.$$
$$\left. + q_f (1 - s S_n) \right] \tag{15}$$

unde $T_k = \dfrac{J}{M_{Mn}} \omega_n$ în care J este momentul de inerţie.

Timpul de frînare la schimbarea a două faze între ele

$$t_f = \frac{T_k K_f}{m_M (1+q_f)} \left[0{,}41 \sqrt{s_M S_{Mn}} + \frac{0{,}61}{\sqrt{s_M S_{Mn}}} + q_f \right]. \tag{16}$$

Timpul de inversare a turaţiei

$$t_i = \frac{T_k K_f}{m_M (1+q_f)} \left[\sqrt{s_M S_{Mn}} (1{,}41 - \sqrt{s S_n}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\sqrt{s_M S_{Mn}}} (2{,}83 - s^{3/2} S_n^{3/2}) + q_f (2 - s S_n) \right]. \tag{17}$$

II. *Funcţionarea motorului la tensiune variabilă*

Vom avea în vedere comportarea motorului asincron cu rotor masiv la tensiune variabilă, frecvenţă nominală adică (adică $K_f = 1$) şi cuplul util constant. Deoarece cuplul util este apropiat ca valoare de cuplu electromagnetic, putem considera că şi acesta din urmă este aproximativ constant şi expresiile deduse mai sus rămîn valabile pentru această situaţie.

Variaţia diferitelor mărimi în funcţie de tensiune se deduce uşor din expresiile scrise în paragraful 1, ca un caz particular pentru $K_f = 1$.

Astfel obținem alunecarea motorului:

$$s = \left[\frac{K_M(1+q) - Kq + \sqrt{[K_M(1+q) - Kq]^2 - K^2}}{K_u^2 K_M(1+q) - Kq + \sqrt{K_M K_u^2 (1+q) - Kq]^3 - K^2}} \right]^2 \qquad (18)$$

deoarece $m_M = K_u^2$, iar $s_M = 1$ pentru $K = 1$.

curentul rotoric echivalent raportat

$$\frac{I'_2}{I'_{2n}} = \sqrt[4]{K s} \quad \text{dacă } K = 1. \qquad (19)$$

Dacă tensiunea crește mult, curentul de mers în gol nu va mai fi proporțional cu tensiunea din cauza saturației circuitului magnetic și va avea valori mult mai mari decît cele date de expresia (9) pentru $K_f = 1$.

În figurile de mai jos s-a reprezentat grafic variația alunecării, a curentului rotoric echivalent raportat, a curentului statoric în funcție de K_u.

Se vede că alunecarea crește foarte repede odată cu scăparea tensiunii, mai ales la valori mici ale coeficientului K_M, însă curentul rotoric echivalent raportat variază în funcție de K_u mult mai lent. De aici rezultă posibilitatea reglării vitezei prin varierea tensiunii la borne în limite destul de largi, fapt important în practică.

Curentul statoric depinde atît de curentul de magnetizare cît și de coeficientul K_M. Evident că pot fi reprezentate grafic și celelalte mărimi pentru o mașină dată, potrivit relațiilor de la paragraful 1.

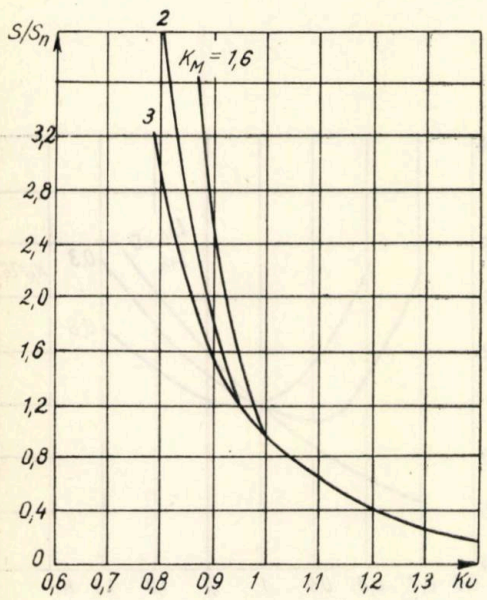


Fig. 2.

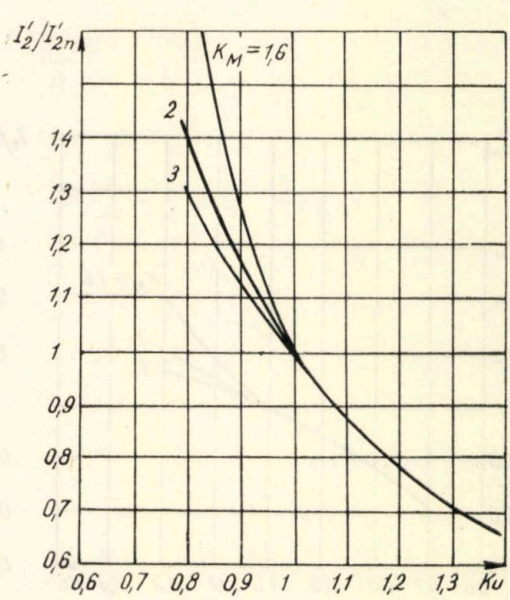


Fig. 3.

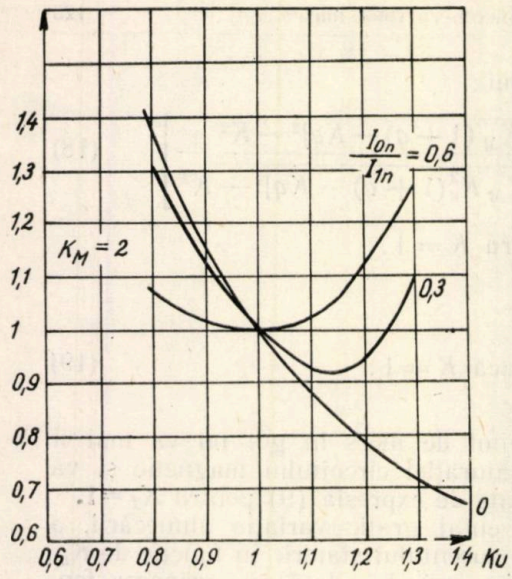


Fig. 4.

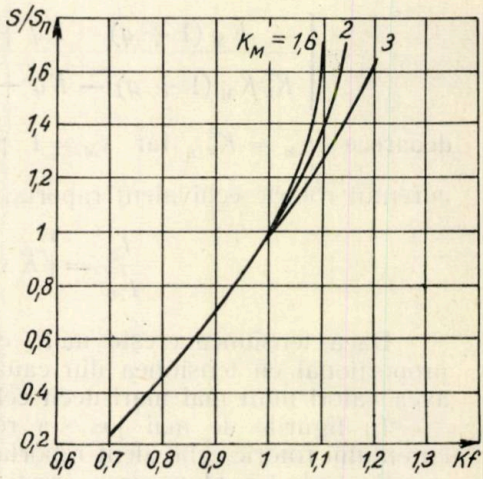


Fig. 5.

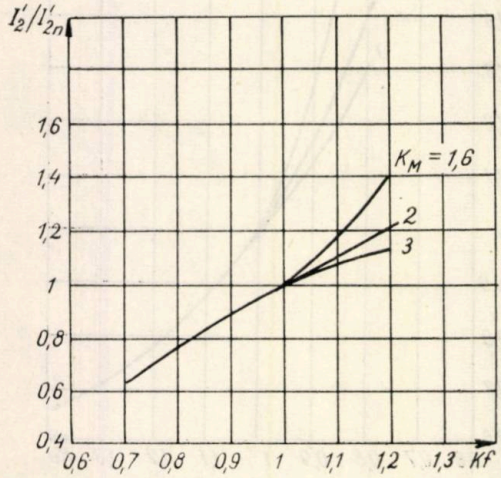


Fig. 6.

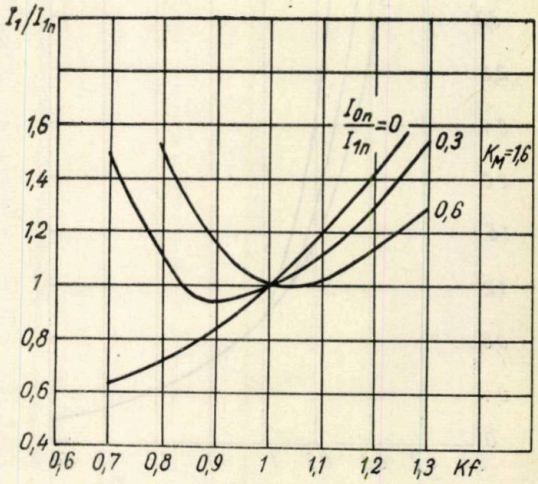


Fig. 7.

III. *Funcționarea motorului la frecvență variabilă*

Se va analiza deci comportarea motorului la frecvență variabilă, tensiune nominală (adică $K_u = 1$) și cuplu util constant (aproximativ cuplul electromagnetic constant).

În relațiile deduse în paragraful 1 vom deduce deci $K_u = 1$, obținînd diferitele mărimi în funcție de frecvență.

Alunecarea motorului

$$s = \left[\frac{K_M(1+q) - Kq + \sqrt{[K_M(1+q) - Kq]^2 - K^2}}{m_M K_M(1+q_f) - Kq_f + \sqrt{[K_M m_M(1+q_f) - Kq_f]^2 - K^2}}\right]^2 s_M \quad (20)$$

unde

$$m_M = \frac{a + b + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{aK_f^2 + bK_f + K_f\sqrt{(1+a^2)(K_f^2+b^2)}}$$

$$s_M = K_f^2 \frac{1+b^2}{K_f^2+b^2} \quad \text{dacă} \quad K = 1.$$

Curentul rotoric echivalent raportat pentru $K = 1$ este dat de expresia

$$\frac{I'_2}{I'_{2n}} = \sqrt{K\sqrt{K_f s}}. \quad (21)$$

Dacă frecvența scade mult, curentul de mers în gol va avea valori mult mai mari decît cele date de expresia (9) pentru $K_u = 1$ din cauza saturației circuitului magnetic.

În figurile 5, 6 și 7 s-a reprezentat variația alunecării, curentului rotoric echivalent raportat și curentului statoric.

Se constată că alunecarea crește mult mai repede, odată cu creșterea frecvenței, decît curentul rotoric echivalent raportat.

Potrivit relațiilor deduse în paragraful 1, se pot face aprecieri asupra variației diferitelor mărimi în funcție de variația frecvenței.

IV. *Funcționarea motorului la* $\frac{U}{f} = \text{ct.}$

Aceasta înseamnă că motorul va funcționa atît la tensiune variabilă cît și la frecvența variabilă, dar mereu avem $K_u = K_f$.

Înlocuind în relațiile din paragraful 1 $K_u = K_f = x$ obținem expresiile analitice pentru diferitele mărimi.

Dacă luăm $K = 1$ se constată că aceste mărimi variază foarte puțin în raport cu x, acest fapt prezintă importanță în cazul reglării vitezei motorului asincron prin variația frecvenței tensiunii de alimentare la cuplu constant și egal cu cel nominal.

Este important faptul că în acest caz randamentul, factorul de putere, alunecarea, inducția magnetică în diferitele porțiuni ale circuitului magnetic sînt practic constante.

Concluzii

1. Relațiile deduse în această lucrare se pot aplica la mașini de putere mare cît și la mașini de putere mică, avînd în vedere că în acest din urmă caz trebuie să ținem seamă de faptul că $m = f(I_2')$.

2. Teoria dezvoltată în această lucrare se poate aplica cu modificări neesențiale la cuplele asincrone, la frînele electromagnetice, la turbogeneratoare în regim asincron.

3. Relațiile deduse prezintă avantajul că pentru calculul diferitelor mărimi este necesar să se cunoască numai rapoartele a, b, m, tensiunea de alimentare și reactanța x_1.

4. Relațiile obținute sînt mai complicate decît la motoarele asincrone obișnuite din cauza efectului pelicular care are loc în rotorul masiv.

5. La variații mici ale tensiunii și frecvenței relațiilor deduse în paragraful 1 dau rezultate bune; la creșteri mari ale tensiunii sau la scăderi mari ale frecvenței trebuie să ținem seamă de saturația circuitului magnetic independent de puterea mașinii.

Catedra de mașini electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Kuțevalov V. M.:* Asinhronaia mașina e masivnîm rotorom AN Lativskii SSR Institut energhetiki, 1962.

2. *H. M. McConnell, E. F. Sverdrup:* The Induction Machine with solid Iron Rotor A.I.E.E. Transactions, vol. 74, Part III, June 1955.

4. *A. J. Wood:* An Analysis of solid Rotor Machines A.I.E.E. Transactions, vol. 78, Part III, February 1960.

5. *I. A. Sîromiatnicov:* Rejimî rabotî asinhronîh i sinhronîh electroowigatelei, G.E.I. 1963, Moscova.

6. *N. Galan:* Cuplurile asincrone la motoarele sincrone reactive cu polii masivi, Buletinul Institutului Politehnic București, ianuarie—februarie, tomul XXV, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

CENTRALE ELECTRICE

C.Z. : 621.311.25:621.039

DÉTERMINATION DE LA MEILLEURE TEMPÉRATURE DE L'EAU D'ALIMENTATION DANS LES CENTRALES ÉLECTRONUCLÉAIRES AUX RÉACTEURS À ÉBULLITION ET SURCHAUFFE NUCLÉAIRE

N. DANILA, C. HAIDUC

La méthode pour déterminer la meilleure température de l'eau d'alimentation dans les centrales électronucléaires (CEN) aux réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur n'est pas traitée dans la littérature de spécialité. Les ouvrages existants dans ce domaine et dans lesquels on tient compte en dehors des paramètres thermodynamiques du cycle et aussi des indices techniques-économiques, sont concentrés sur d'autres types de réacteurs nucléaires [1, 2, 3]. Cela s'explique par le fait que les réacteurs à ébullition avec surchauffe nucléaire ont connu un développement ultérieur grâce à leur complexité tant du point de vue physique que du point de vue thermodynamique.

Dans l'ouvrage [4] on montre que la détermination des meilleurs paramètres en énergétique doit être faite conformément aux dépenses spécifiques de calcul z_e. Le meilleur paramètre déterminé doit assurer l'obtention de la valeur minime pour z_e, qui représente les dépenses totales de calcul pour 1 kWh émise dans le réseau, ou si l'on marque les dépenses totales annuelles de calcul avec Z, il y a la relation :

$$z_e = \frac{Z}{P_e \cdot \tau}.$$

Le calcul de la meilleure température de l'eau d'alimentation dans la CEN à réacteur bouilleur (à ébullition) avec surchauffe nucléaire de la vapeur (v. fig. 1) implique préalablement à calculer la variation du rendement électrique de la CEN en fonction de la température de l'eau d'alimentation t_a aux paramètres initiaux et finals du cycle.

Dans la fig. 2 on présente la variation du rendement électrique brut η_e en fonction de t_a, pour les paramètres initiaux de la vapeur de : $p_0 = 90$ ata ; $t_0 = 535°C$ et $p_0 = 130$ ata ; $t_0 = 565°C$, à une pression dans le condenseur $p_c = 0{,}05$ ata.

*) Manuscris predat la redacţie la 27 aprilie 1965.

Les calculs ont été effectués pour des schémas réels de CEN à cycle direct avec la méthode donnée dans l'ouvrage [3].

Selon que l'on montre dans l'ouvrage [2] la meilleure valeur d'un paramètre de la CEN, calculé de la condition $z_e = \min$, coïncide avec la valeur de ce paramètre, calculé de la condition $\Delta z_e = \min$. La grandeur

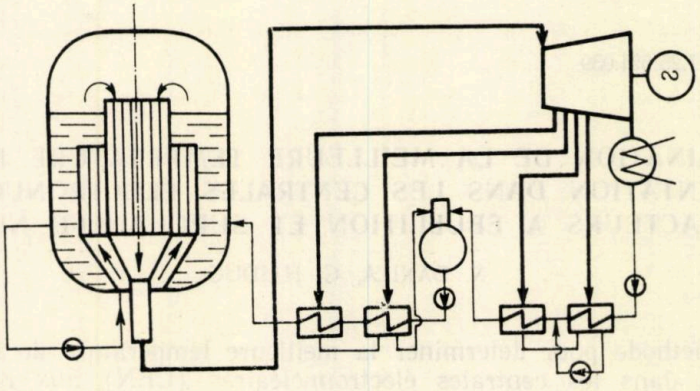


Fig. 1. Schéma thermique de principe de la centrale électronucléaire (CEN) à réacteur à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur.

Δz_e représente la variation relative de la grandeur z_e envers une grandeur z_e^0 prise pour base. Il résulte donc que pour déterminer la meilleure température de l'eau d'alimentation :

$$\Delta z_e = \frac{z_e}{z_e^0} - 1 \qquad (1)$$

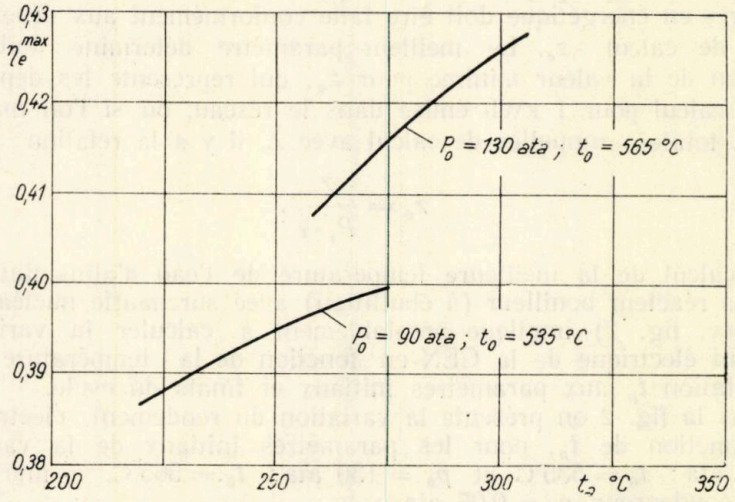


Fig. 2. Rendement électrique maximum de la CEN à réacteur à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

et :

$$z_e = z_c + z_i + z_{ex} \tag{2}$$

$$z_e^0 = z_c^0 + z_i^0 + z_{ex}^0 \tag{3}$$

où :

z_c et z_c^0 — la composante du combustible des dépenses de calcul pour t_a quelconque et t_a^0 pris pour base ;

z_i et z_i^0 — la composante des investissements dans les dépenses de calcul pour t_a quelconque et t_a^0 pris pour base ;

z_{ex} et z_{ex}^0 — la composante de l'exploitation des dépenses de calcul pour t_a quelconque et t_a^0 pris pour base.

Si l'on marque les composantes relatives des dépenses de calcul avec :

$$\bar{z}_c^0 = \frac{z_c^0}{z_e^0} - 1 \; ; \quad \bar{z}_i^0 = \frac{z_i^0}{z_e^0} - 1 \; ; \quad \bar{z}_{ex}^0 = \frac{z_{ex}^0}{z_e^0} - 1 \tag{4}$$

où :

$$\bar{z}_c^0 + \bar{z}_i^0 + \bar{z}_{ex}^0 = 1 , \tag{5}$$

l'on peut écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\Delta z_e = \bar{z}_c^0 \cdot \Delta z_c + \bar{z}_i^0 \cdot \Delta z_i + \bar{z}_{ex}^0 \cdot \Delta z_{ex} \tag{6}$$

où :

$$\Delta z_c = \frac{z_c}{z_c^0} - 1 \; ; \quad \Delta z_i = \frac{z_i}{z_i^0} - 1 \; ; \quad \Delta z_{ex} = \frac{z_{ex}}{z_{ex}^0} - 1 .$$

Si l'on considère constante la puissance thermique du réacteur : Q_r = const, on peut admettre que pour t_a = var, le coût de la kWh thermique produite par le réacteur est invariable. Dans ce cas la variation relative de la composante du combustible des dépenses de calcul s'exprime :

$$\Delta z_c = \frac{\eta_n^0}{\eta_n} - 1 = \Delta \eta_n \tag{7}$$

où :

η_n et η_n^0 — le rendement net de la CEN pour t_a et t_a^0 pris pour base.

Dans l'expression de Δz_i la composante des investissements dans les dépenses spécifiques de calcul z_i on peut exprimer :

$$z_i = A_e \cdot i_{CEN} , \tag{8}$$

où le coefficient A_e est donné par une relation sous la forme :

$$A_e = \frac{A_a + p_n}{\tau} , \tag{9}$$

où :

A_a — le coefficient d'amortissement de la CEN. ($A_a = 0{,}06 \div 0{,}085$) ;

p_n — le coefficient normalisé d'efficacité des investissements ($p_n = 0{,}10$).

Pour des calculs approximatifs, dans le cas de la CEN, l'on peut considérer [2] :

$$A_a = (1{,}2 \div 1{,}3) \cdot (0{,}04 - 3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \tau) \tag{10}$$

où : τ — la durée d'utilisation de la CEN à la puissance nominale ;
et : i_{CEN} — les investissements spécifiques dans la CEN.

Si l'on admet dans la relation pour Δz_i, dans le cas $t_a = \text{var}$, l'égalité des sommes : $(A_a + p_n) = (A_a + p_n)_0$ et $\tau = \tau_0$ on obtient :

$$\Delta z_i = \frac{i_{CEN}}{i^0_{CEN}} - 1 = \Delta i_{CEN} \cdot \tag{11}$$

Donc la variation de la composante des investissements dans les dépenses spécifiques de calcul peut être considérée proportionnelle avec la variation des investissements dans la CEN.

Dans le cas de la CEN la composante relative de l'exploitation des dépenses de calcul n'est pas trop élevée et varie d'habitude dans les limites : $0{,}08 < \bar{z}^0_i < 0{,}12$. On peut considérer avec assez de précision : $\bar{z}^0_{ex} = 0{,}1$; [5] et donc : $\Delta z_{ex} = 0$. Dans ce cas, en tenant compte des expressions (7) et (11), on peut écrire la relation (6) :

$$\Delta z_e = \bar{z}^0_c \cdot \Delta \eta_n + (0{,}9 - \bar{z}^0_c) \cdot \Delta i_{CEN} \cdot \tag{12}$$

Dans (12) la grandeur $\bar{z}^0_c$ est une constante qu'on introduit conformément aux données de la littérature de spécialité. Ainsi, pour les CEN à réacteurs à ébullition avec le cycle thermodynamique direct, la composante du combustible du prix de revient de l'énergie électrique produite, d'après les données publiées par la maison Général Electric [6], varie selon qu'il résulte du tableau 1.

Tableau 1.

Puissance électrique de la CEN, MW.	50	300	600	750	1000
Composante relative de combustible du prix de revient de l'énergie électrique, %	25,1	30,6	35,9	37,4	39,2

Ces données ont été obtenues pour le cycle thermodynamique avec les paramètres initiaux : $p_0 = 70{,}3$ ata ; $t_0 = 285°C$ et l'humidité de 0,2%. Le cycle est prévu avec réchauffage intermédiaire de la vapeur.

Vu le fait que la composante de combustible du prix de revient de l'énergie électrique varie dans de larges limites, on peut considérer avec assez d'approximation que la grandeur $\bar{z}_c^0$, varie entre les limites du domaine donné par le tableau 1.

Dans l'expression (12) pour l'obtention de la fonction : $\Delta z_e = f(t_a)$, il est nécessaire de connaître préalablement les expressions des fonctions : $\Delta \eta_n = f(t_a)$ et: $\Delta t_{CEN} = f(t_a)$.

La variation relative du rendement net de la CEN :

$$\Delta \eta_n = \frac{P_e^0 - P_{si}^0}{P_e - P_{si}} - 1 , \tag{13}$$

où : P_e et P_e^0 — la puissance électrique brute de la CEN pour t_a quelconque et t_a^0.

La consommation interne de puissance à la CEN a réacteur à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur :

$$P_{si} = P_{pc} + P_{pa} + P_{cr} + P_{aux} \tag{14}$$

où :

P_{pc} ; P_{pa} ; P_{cr} ; P_{aux} — respectivement les consommations de puissance à la pompe de circulation du réacteur avec circulation forcée, à la pompe d'alimentation, au circuit de refroidissement des condenseurs et aux installations auxiliaires de la CEN.

La consommation de puissance aux pompes de circulation du réacteur est proportionnelle avec la puissance électrique du réacteur :

$$P_{pc} = a \cdot P_e , \tag{15}$$

où : a — coefficient représentant la part de puissance du réacteur qui revient à la consommation au passage de l'agent de refroidissement par la zone d'ébullition.

La consommation de puissance à la pompe d'alimentation se peut exprimer avec assez de précision [5], en considérant le rendement de la pompe $\eta_p = 0{,}8$ et le poids spécifique de l'eau $\gamma_a = 1000 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\right]$:

$$P_{pa} = \frac{D \cdot p_1}{29{,}4 \cdot 10^3} , \tag{16}$$

où :

$D \left[\frac{\text{tf}}{\text{h}}\right]$ — le débit de l'eau d'alimentation ;

$p_1 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$ — la pression de l'eau d'alimentation du réacteur, après la pompe d'alimentation.

La consommation de puissance aux pompes de refroidissement des condenseurs des turbines de CEN :

$$P_{cr} = \frac{m \cdot D_c \cdot \Delta p}{29{,}4 \cdot 10^3}, \tag{17}$$

où :

m — le module de refroidissement ;

$D_c \left[\frac{\text{tf}}{\text{h}}\right]$ — le débit de vapeur dans le condenseur ;

$\Delta p \left[\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}\right]$ — les pertes de pression dans le système de refroidissement des condenseurs.

L'expression de la variation relative du rendement net de la CEN (13), en tenant compte des relations (15), (16) et (17), acquiert la forme ;

$$\Delta \eta_n = \frac{\frac{1}{d_e^0} - C\left[p_0 + m \cdot \Delta p \cdot (1 - \Sigma \alpha_i)_0\right]}{\frac{1}{d_e^0} A - C\left[A\, p_0 \frac{d_e}{d_e^0} + m \cdot \Delta p \cdot (1 - \Sigma \alpha_i)_0\right]} - 1, \tag{18}$$

où le coefficient :

$$C = \frac{1}{(0{,}985 - a) \cdot 29{,}4 \cdot 10^{-3}}, \tag{19}$$

et :

$$A = \frac{d_e^0 (1 - \Sigma \alpha_i)_0}{d_e (1 - \Sigma \alpha_i)}, \tag{20}$$

où :

d_e et $d_e^0 \left[\frac{\text{kgf}}{\text{kWh}}\right]$ — la consommation spécifique de vapeur, respectivement pour t_a et t_a^0 ;

$(1 - \Sigma \alpha_i)$ et $(1 - \Sigma \alpha_i)_0$ — le débit relatif de vapeur, dans le condenseur, pour t_a et t_a^0.

Pour obtenir les courbes : $\Delta \eta_n = f(t_a)$, il est nécessaire la connaissance en préalable des fonctions : $d_e = f(t_a)$ et $(1 - \Sigma \alpha_i) = f(t_a)$.

Dans la figure 3 on donne la variation de la consommation spécifique de vapeur en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

On remarque une variation intense de la grandeur d_e avec t_a, surtout dans le domaine des valeurs plus élevées de la température de l'eau

d'alimentation. Dans certains ouvrages publiés dans la littérature de spécialité on ne tient pas compte de cette variation, ce qui conduit à l'introduction de quelques erreurs à la détermination des meilleures valeurs pour t_a.

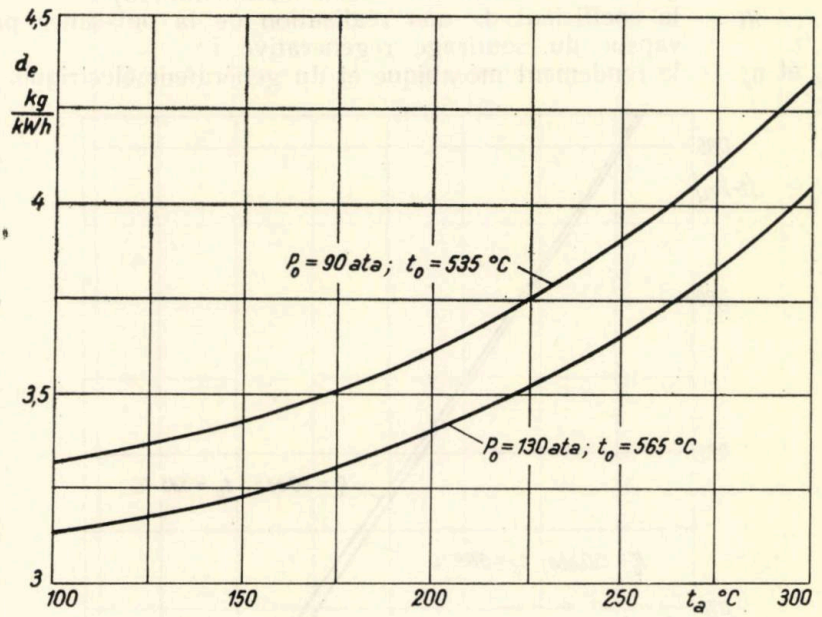


Fig. 3. Consommation spécifique de la vapeur de la CEN, en fonction de la température de l'eau d'alimentation :

$p_0 = 90$ ata ; $t_0 = 535$°C.
$p_0 = 130$ ata ; $t_0 = 565$°C.

La variation du débit relatif de vapeur dans le condenseur en fonction de t_a est présentée dans la figure 4.

Avec l'accroissement de t_a, la grandeur $(1-\Sigma\alpha_i)$ diminue beaucoup, presque linéairement, ce que démontre la nécessité de prendre en considération cette variation à la détermination des meilleures valeurs pour t_a.

Dans l'ouvrage [2] on ne tient pas compte de cette variation, ce qui conduit à l'introduction de certaines erreurs dans le calcul, qui ne peuvent être admises dans le cas des déterminations précises.

La variation des grandeurs d_e et $(1-\Sigma\alpha_i)$ avec t_a a été obtenue pour les schémas réels des CEN avec cycle thermodynamique direct.

On a employé pour d_e la relation donnée dans l'ouvrage [7] :

$$d_e = \frac{860}{(i_0 - i_c) \cdot (1 - \Sigma y_i \alpha_i) \cdot \eta_m \cdot \eta_g}, \qquad (21)$$

où :

i_0 et i_c $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kgf}}\right]$ — l'enthalpie initiale de la vapeur et l'enthalpie de la vapeur dans le condenseur ;

α_i — le débit relatif de vapeur dans le soutirage i régénérative (servant à réchauffer l'eau d'alimentation) ;

y_i — le coefficient de non réalisation de la puissance par la vapeur du soutirage régénérative i ;

η_m et η_g — le rendement mécanique et du générateur électrique.

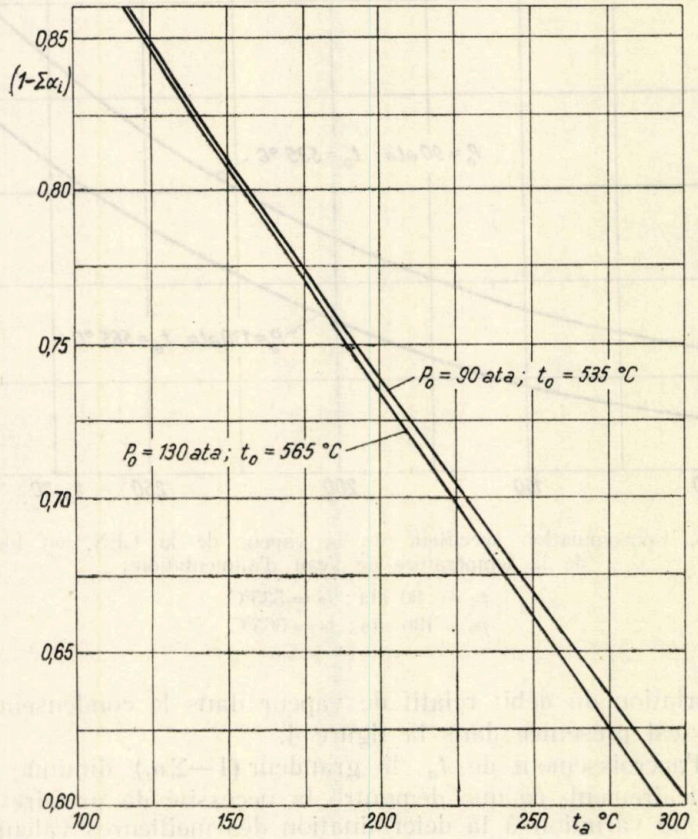


Fig. 4. Débit relatif de vapeur en condenseur, en fonction de la température de l'eau d'alimentation :
$p_0 =$ 90 ata ; $t_0 = 535°C$.
$p_0 =$ 130 ata ; $t_0 = 565°C$.

Dans l'expression (21) le coefficient de non réalisation de la puissance par la vapeur du soutirage i, on peut écrire :

$$y_i = \frac{i_0 - i_i}{i_0 - i_c}, \tag{22}$$

où :

$i_t \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kgf}}\right]$ — l'enthalpie de la vapeur du soutirage i.

Dans l'équation (12) la variation relative des investissements spécifiques dans la CEN est donnée par la relation ;

$$\Delta i_{CEN} = \bar{I}^0_{sr} \cdot \delta i_{sr} + \bar{I}^0_{sm} \cdot \delta i_{sm} + \bar{I}^0_{cc} \cdot \delta i_{cc} + \bar{I}^0_{el} \cdot \delta i_{el} \tag{23}$$

où :

$$\bar{I}^0_{sr} = \frac{i^0_{sr}}{i^0} \; ; \; \bar{I}^0_{sm} = \frac{i^0_{sm}}{i^0} \; ; \; \bar{I}^0_{cc} = \frac{i^0_{cc}}{i^0} \; ; \; \bar{I}^0_{el} = \frac{i^0_{el}}{i^0} \tag{24}$$

et :

$$\bar{I}^0_{sr} + \bar{I}^0_{sm} + \bar{I}^0_{cc} + \bar{I}^0_{el} = 1 .$$

Les grandeurs : $\bar{I}^0_{sr}$, $\bar{I}^0_{sm}$, $\bar{I}^0_{cc}$ et $\bar{I}^0_{el}$ — représentent les composantes des investissements spécifiques, respectivement pour la salle du réacteur, la salle des machines, le circuit de refroidissement du condenseur et des installations électriques ; i^0_{sr}, i^0_{sm}, i^0_{cc} et i^0_{el} — les investissements spécifiques, respectivement pour la salle du réacteur, la salle des machines, le circuit de refroidissement du condenseur et pour les installations électriques.

Pour les CEN à réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur, on peut considérer :

$$\begin{aligned} \bar{I}^0_{cc} &= 0{,}18\ \bar{I}^0_{sm} \\ \bar{I}^0_{el} &= 0{,}15\ \bar{I}^0_{sm} . \end{aligned} \tag{25}$$

On peut aussi considérer que la variation de la température de l'eau d'alimentation n'influence pas les investissements spécifiques dans les installations électriques de la CEN, donc :

$$\delta i_{el} = 0 . \tag{26}$$

Si l'on tient compte de la condition (26) et des expressions (24) et (25), la variation relative des investissements dans la CEN de la (23), acquiert la forme :

$$\Delta i_{CEN} = \bar{I}^0_{sm} (\delta i_{sm} + 0{,}18\, \delta i_{cc}) + (1 - 1{,}33\, \bar{I}^0_{sm})\, \delta i_{sr} . \tag{27}$$

Dans (27) la variation relative des investissements dans le réacteur :

$$\delta i_{sr} = \frac{i_{sr}}{i^0_{sr}} - 1 = \frac{I_{sr} \cdot P^0_e}{I^0_{sr} \cdot P_e} - 1 , \tag{28}$$

où pour $Q_r = \text{const}$; $I_{sr} = \text{const}$, et $I_{sr} = I^0_{sr}$.

Le rapport des puissances électriques de la (28) est proportionnel au rapport des rendements nets respectifs :

$$\frac{P_e^0}{P_e} = \frac{\eta_n^0}{\eta_n}, \tag{29}$$

qui introduit dans (28) conduit à la conclusion importante que :

$$\delta i_{sr} = \Delta \eta_n, \tag{30}$$

et l'expression (27) devient :

$$\Delta i_{CEN} = \bar{I}_{sm}^0 (\delta i_{sm} + 0{,}18\, \delta i_{cc}) + (1 - 1{,}33\, \bar{I}_{sm}^0)\, \Delta \eta_n . \tag{31}$$

Dans l'expression (27) il faut aussi connaître les expressions des fonctions :

$$\delta i_{sm} = f(t_a) \quad \text{et} \quad \delta i_{cc} = f(t_a) .$$

Ces fonctions peuvent être obtenues en utilisant les grandeurs d_e et $(1 - \Sigma \alpha_i)$ obtenues initialement comme fonctions de t_a. Ainsi, pour la variation relative des investissements spécifiques dans la salle des machines de la CEN, on peut écrire :

$$\delta i_{sm} = \bar{I}_{pr}^0 \cdot \delta i_{pr} + \bar{I}_t^0 \cdot \delta i_t + \bar{I}_g^0 \cdot \delta i_g + \bar{I}_{aux}^0 \cdot \delta i_{aux} + \bar{I}_c^0 \cdot \delta i_c ; \tag{32}$$

$$\bar{I}_{pr}^0 = \frac{i_{pr}}{i_{sm}^0} ; \quad \bar{I}_t^0 = \frac{i_t}{i_{sm}^0} ; \quad \bar{I}_g^0 = \frac{i_g}{i_{sm}^0} ; \quad \bar{I}_{aux}^0 = \frac{i_{aux}}{i_{sm}^0} ; \quad \bar{I}_c^0 = \frac{i_c}{i_{sm}^0} ,$$

où :

$\bar{I}_{pr}^0$, $\bar{I}_t^0$, $\bar{I}_g^0$, $\bar{I}_{aux}^0$, $\bar{I}_c^0$ — les composantes relatives des investissements spécifiques rapportés à la salle des machines, respectivement pour les réchauffeurs régénératifs, turbines, générateurs électriques, installations auxiliaires et condenseurs.

Dans la relation (32) pour les variations relatives des investissements spécifiques on obtient les relations suivantes d'une manière analogue avec l'ouvrage [5] :

$$\delta i_{pr} = \left[\frac{d_e (1 - \Sigma \alpha_i)\, [32 + 0{,}247\, (\Sigma F_i)_0]}{d_e^0 (1 - \Sigma \alpha_i)^0\, [32 + 0{,}247\, (\Sigma F_i)]} - 1 \right] \tag{33}$$

$$\delta i_t = \delta i_g = \left[\frac{d_e^0 (1 - \Sigma \alpha_i)_0}{d_e (1 - \Sigma \alpha_i)} \right]^{\beta} - 1 , \tag{34}$$

où : β — coefficient qui est la fonction de puissance de la turbine [8].

$$\delta i_c = \left[\frac{d_e (1 - \Sigma \alpha_i)^2}{d_e^0 (1 - \Sigma \alpha_i)_0^2} - 1 \right] \tag{35}$$

$$\delta i_{aux} = \bar{I}_{pa}^0 \cdot \delta i_{pa} + \bar{I}_{pc}^0 \cdot \delta i_{pc} , \tag{36}$$

où :

$\bar{I}^0_{pa} = \frac{i_{pa}}{i^0_{aux}}$; $\bar{I}^0_{pc} = \frac{i_{pc}}{i^0_{aux}}$ — les composantes relatives des investissements de $\bar{I}^0_{aux}$, correspondantes à la pompe d'alimentation et à la pompe de condensation.

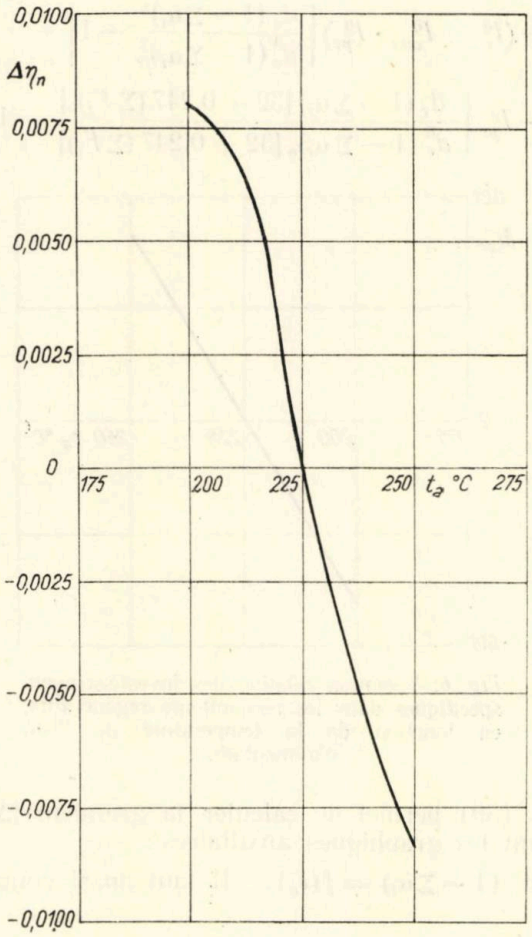


Fig. 5. Variation relative du rendement net de la CEN, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

Dans (36) la grandeur :

$$\delta i_{pa} = \left(\frac{d_e}{d_e^0} - 1\right), \tag{37}$$

et :

$$\delta i_{pc} = \delta i_c = \delta i_{cc} \,. \tag{38}$$

En introduisant dans l'expression (32), les relations correspondantes de (33), (34), (35), (36), (37) et (38) pour δi_{sm} on obtient une fonction sous la forme :

$$\delta i_{sm} = (\bar{I}_t^0 + \bar{I}_g^0)\left\{\left[\frac{d_e^0(1-\Sigma\alpha_i)_0}{d_e(1-\Sigma\alpha_i)}\right]^{\beta} - 1\right\} + \bar{I}_{aux}^0 \cdot \bar{I}_{pc}^0\left(\frac{d_e}{d_e^0} - 1\right) +$$

$$+ (\bar{I}_c^0 + \bar{I}_{aux}^0 \cdot \bar{I}_{pc}^0)\left[\frac{d_e(1-\Sigma\alpha_i)^2}{d_e^0(1-\Sigma\alpha_i)_0^2} - 1\right] +$$

$$+ \bar{I}_{pr}^0\left[\frac{d_e(1-\Sigma\alpha_i)[32+0{,}247(\Sigma F_i)_0]}{d_e^0(1-\Sigma\alpha_i)_0[32+0{,}247(\Sigma F_i)]} - 1\right] \qquad (39)$$

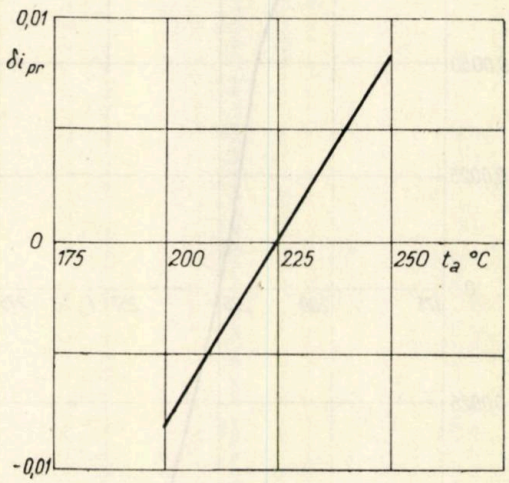


Fig. 6. Variation relative des investissements spécifiques dans les réchauffeurs régénératifs, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

L'expression (39) permet de calculer la grandeur Δi_{sm} en fonction de t_a en utilisant les graphiques auxiliaires :

$d_e = f(t_a)$ et $(1-\Sigma\alpha_i) = f(t_a)$. Il faut aussi connaître la fonction $(\Sigma F_i) = f(t_a)$.

Dans le présent ouvrage, la meilleure température de l'eau d'alimentation pour les CEN ci-dessus mentionnées a été déterminée pour les paramètres initiaux de la vapeur : $p_0 = 90$ ata ; $t_0 = 535$°C.

Dans la figure 5 on donne la variation relative du rendement net en fonction de t_a calculée avec l'expression (18).

Avec l'accroissement de t_a, dans le domaine considéré, $\Delta\eta_n$ diminue presque linéairement. La levée de suite de la température de l'eau d'alimentation mène au changement de la pente de la courbe, tendant à s'aplatir.

Dans la figure 6 on présente la variation relative des investissements spécifiques dans le système de réchauffage régénératif de l'eau d'alimentation. Comme base on a pris : $t_a^0 = 225°C$.

La grandeur δi_{pr} varie linéairement avec t_a

La variation relative des investissements spécifiques dans le condenseur et dans la pompe d'alimentation en fonction de t_a est donnée dans la fig. 7.

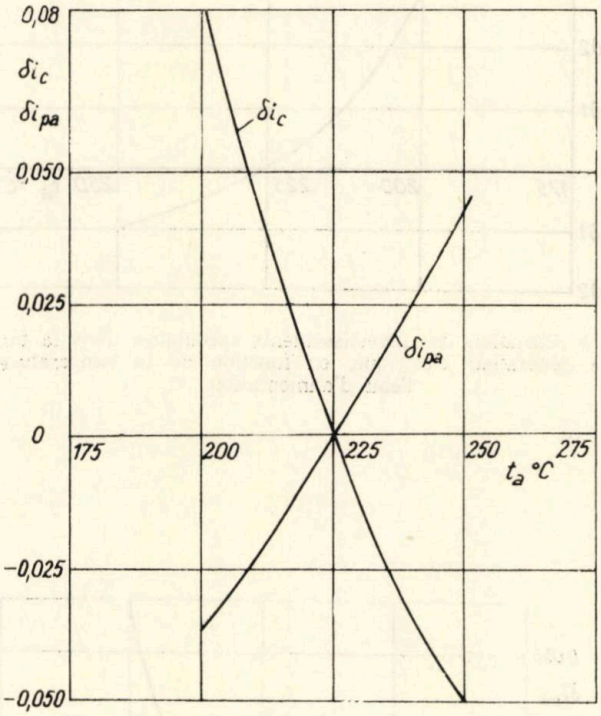


Fig. 7. Variation relative des investissements spécifiques en condenseur et en pompe d'alimentation, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

Les investissements spécifiques dans le condenseur diminuent substantiellement à cause de la réduction du débit de vapeur dans le condenseur avec l'accroissement de la grandeur t_a. Les investissements dans la pompe d'alimentation augmentent à cause de l'accroissement du débit de vapeur à l'entrée dans la turbine.

Les investissements spécifiques dans la turbine et dans le générateur électrique diminuent avec l'augmentation de t_a à cause de l'accroissement de la puissance de ceux-là (v. fig. 8).

Dans la fig. 9 on donne les fonctions :

$$\delta i_{sm} = f(t_a)$$

et :

$$\delta i_{aux} = f(t_a).$$

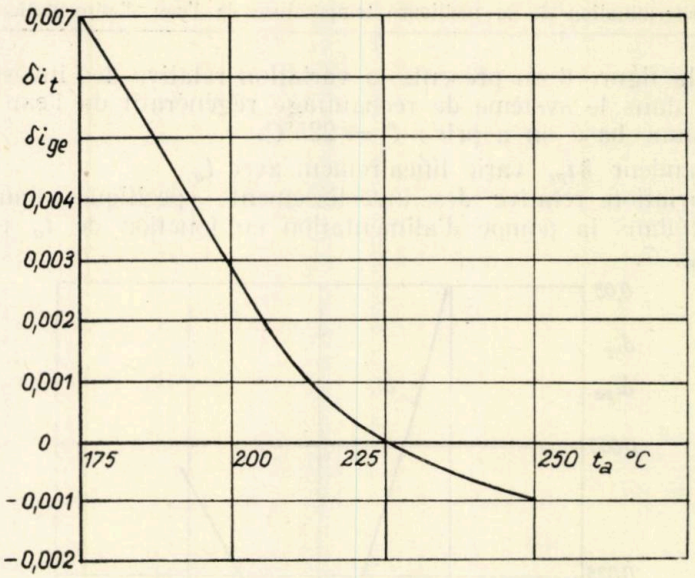


Fig. 8. Variation des investissements spécifiques dans la turbine et le générateur électrique, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

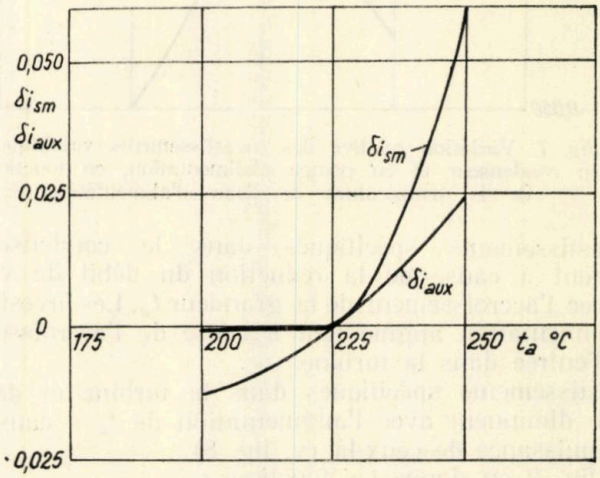


Fig. 9. Variation relative des investissements spécifiques relatifs dans la salle des machines et dans les installations auxiliaires de la CEN, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

Les investissements spécifiques relatives dans la CEN, Δi_{CEN} varient beaucoup avec t_a (v. fig. 10).

La grandeur Δi_{CEN} a été obtenue pour $\bar{I}^0_{sm} = 0{,}3$;

$$\bar{I}^0_{pr} = \bar{I}^0_c = \bar{I}^0_{aux} = \bar{I}^0_{constr} = 0{,}1 \quad \text{et} \quad \bar{I}^0_t = \bar{I}^0_g = 0{,}3.$$

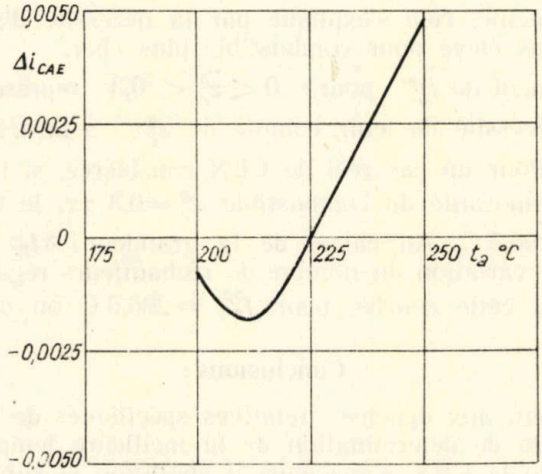


Fig. 10. Variation relative des investissements spécifiques en entier dans la CEN, en fonction de la température de l'eau d'alimentation.

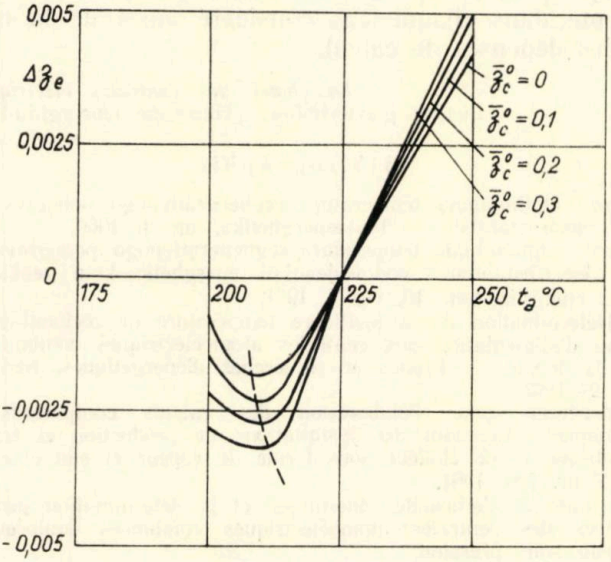


Fig. 11. Variation relative des dépenses de calcul dans la CEN, en fonction de la température de l'eau d'alimentation pour $0 < \bar{z}^0_c < 0{,}3$

La courbe : $\Delta i_{CEN} = f(t_a)$ détermine en grande mesure l'allure des courbes $\Delta z_e = f(t_a)$ calculées avec l'expression (12) (v. fig. 11).

Les grandeurs des courbes $\Delta z_e = f(t_a)$ déterminent les valeurs de la meilleure température de l'eau d'alimentation t_a^{opt}. Avec l'accroissement de la composante de combustible des dépenses de calcul $\bar{z}_c^0$ la grandeur t_a^{opt} augmente, cela s'explique par la nécessité d'adopter un cycle à rendement plus élevé pour combustible plus cher.

L'accroissement de t_a^{opt} pour : $0 < \bar{z}_c^0 < 0{,}3$ représente 3,5°C ; cela démontre la nécessité de tenir compte de $\bar{z}_c^0$ à la détermination de la grandeur t_a^{opt}. Pour un cas réel de CEN considérée, si l'on adopte P = 300 MW, la composante du combustible $\bar{z}_c^0 = 0{,}3$ (v. le tableau 1). Dans ce cas $t_a^{opt} = 206{,}5$°C. Au calcul de la grandeur δi_{pr} on a considéré initialement une variation du nombre de réchauffeurs régénératifs $n = f(t_a)$ Conformément à cette courbe, pour $t_a^{opt} = 206{,}5$°C on obtient n = 6.

Conclusions :

Conformément aux dépenses relatives spécifiques de calcul a été élaborée la méthode de détermination de la meilleure température de l'eau d'alimentation de la CEN à réacteurs à ébullition et surchauffe nucléaire de la vapeur.

La méthode exposée a donné de bons résultats à la détermination de la grandeur t_a^{opt} pour le type de CEN considéré. On démontre la nécessité de tenir compte dans chaque cas considéré aussi de la composante de combustible des dépenses de calcul.

La chaire des centrales électriques
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest

Bibliographie

1. *D. D. Kalafati :* Optimalnaia temperatura reghenerativnogo podogreva vodî na atomnîh electrostanțiah — Teploenerghetika, nr. 4, 1960.
2. *Iu. D. Arseniev :* Optimalnaia temperatura reghenerativnogo podogreva vodî na atomnîh electrostantiah s vodovodeanîmi energheticeskimi reaktorami — Atomnaia energhia, tom. 10, vîp. 1, 1961.
3. *C. Haiduc :* Détermination de la meilleure température de réchauffage régénératif de l'eau d'alimentation aux centrales atomoelectriques combinées, — Academie de la R.S.R. — Etudes et recherches d'énergétiques, Série B, tome XIII, nr. 2—1963.
4. * * * — Instructions pour l'élaboration des calculs comparatifs techniques-économiques concernant des installations de production et transport d'énergie électrique et de chaleur sous forme de vapeur et eau chaude — M.M.E.E., DEE nr. 129, 1961.
5. *C. Haiduc :* Etude de l'efficacité thermique et la détermination des meilleurs paramètres des centrales atomoélectriques combinées équipées avec réacteurs à eau sous pression.
6. *G. E. Issues :* Nuclear Power Plant Price List — Nucleonics nr. 11, 20—21 (1961).
7. *L. I. Kerțelli, V. Ia. Rijkin :* Teplovîe electriceskie stanții, Gosenergoizdat, 1956.
8. *V. B. Pakșver :* Tehnico-economiceskie pocazateli teplovîh electrostanții bolșoi moșcinosti— Gosenergoizdat, 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 5

ELECTRONICĂ

C.Z. : 621.385.2

A. DETAILED EQUIVALENT SCHEME FOR THE DIELECTRIC DIODE AT SMALL SIGNALS *

M. DRĂGĂNESCU, D. DĂSCĂLU

I. *INTRODUCTION*

The small signal a.c. theory of the dielectric diode was established by SHAO and WRIGHT [1] under the following principal idealising conditions :

a) The diffusion current is neglected in comparison with the drift current.

b) The mobility of the carriers (electrons) is constant.

c) The effect of the traps is negligible.

The method used by SHAO and WRIGHT for solving the problem is essentially that used by LLEWELLYN [2] for the vacuume diode. One of the authors [3] solved the problem by simpler and more direct method the results being identical. From these theories [1] [3] the impedance of the dielectric diode has the following expression :

$$Z = R_i \left\{ \frac{6}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) - i \frac{3}{\theta} \left[1 - \frac{2}{\theta^2} (1 - \cos \theta) \right] \right\} \tag{1}$$

where R_i is the internal resistance of the diode at low frequencies and

$$\theta = \omega T_a \tag{2}$$

is the transit angle, T_a the transit time and $\omega = 2\pi f$, where f is the frequency. At low frequency, when $\theta \ll 1$, the expression (1) becomes :

$$Z = R_i \left[1 - i \frac{\theta}{4} \right] \tag{3}$$

or

$$Y \simeq \frac{1}{R_i} + i \frac{\theta}{4 R_i}. \tag{4}$$

* Manuscris predat la redacție la 10 aprilie 1965

Because [1] [3]

$$\frac{T_a}{R_i} = 3\,C_0 \tag{5}$$

where C_0 is the electrostatic capacitance of the diode, the expression (4) becames :

$$Y = \frac{1}{R_i} + i\,\omega\,\frac{3\,C_0}{4}. \tag{6}$$

The equivalent scheme which corresponds to this expression is shown in fig. 1. It consists of a resistance R_i in parallel with a capacitance $\frac{3}{4}\,C_0$

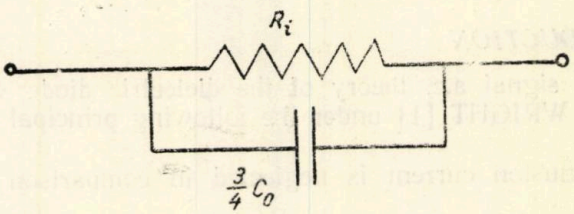


Fig. 1.

smaller than the electrostatic capacitance of the device.

Because the space charge in the presence of the current encreases the total charge of the device, it is clear that it is excepted to encrease the capacitance of the diode. In fact, the capacitance is smaller and this discrepancy is explained in this paper by showing that an inductive effect plays an important role at the lowest frequencies.

II. *THE COMPONENTS OF THE ELECTRIC CURRENT THROUGH THE DIODE.*

The current through the diode *) has two components :

$$j = en\mu E + \varepsilon\,\frac{\partial E}{\partial t} \tag{7}$$

where the first component is the drift current and the second, the displacement current. The notations are usually used in the literature. Noting

$$j_c = en\mu E \;;\; j_d = \varepsilon\,\frac{\partial E}{\partial t} \tag{8}$$

*) It is considered a diode of unitary cross-section.

and taking into account that a small a.c. component is superimposed on a great d.c. component, it may be written :

$$\left.\begin{aligned} E &= E_0 + \underline{E}_1 \epsilon^{i\omega t} \\ j &= J_0 + \underline{J}_1 \epsilon^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

then

$$\underline{J}_{d1} = i\omega\varepsilon \underline{E}_1 . \tag{10}$$

The total current is constant in any section of the diode, but the displacement and the convection current are functions of the position from the ohmic contact (source). At the blocking electrode (drain) [3]

$$\underline{E}_1 = \frac{\underline{J}_1}{\varepsilon\omega}\left[-i + \frac{1-\epsilon^{-i\theta}}{\theta}\right] \tag{11}$$

where $\underline{J}_1$ is the phasor of the sinusoidal component of the total current.

Therefore, at the anode, the displacement current has the expression :

$$\underline{J}_{d1} = i\omega\varepsilon \underline{E}_1 = \underline{J}_1 f(\theta) \tag{12}$$

where

$$f(\theta) = -1 + \frac{-\sin\theta + i(1-\cos\theta)}{\theta} = 1 + \frac{i}{\theta}(i - e^{-i\theta}). \tag{13}$$

But because

$$\underline{U}_a = Z\underline{J}_1 \tag{14}$$

where $\underline{U}_a$ is the phasor of the a.c. component of the potential at the anode, we may write :

$$\underline{J}_{d1} = \underline{J}_1 - \underline{J}_{d1} . \tag{15}$$

Then the impedance corresponding to the displacement current is equal to

$$Z_d = \frac{Z}{f(\theta)} . \tag{16}$$

Because

$$\underline{J}_c = \underline{J}_1 - \underline{J}_{d1} \tag{17}$$

where $\underline{J}_{c1}$ is the phasor of the convection current, one obtains easly the following expression for the impedance corresponding to this component of current at the anode :

$$Z_c = \frac{Z}{1-f(\theta)} . \tag{18}$$

III. *GENERAL INTERPRETATION OF THE DETAILED EQUIVALENT SCHEME.*

The detailed equivalent scheme of the diode is shown in fig. 2. Noting

$$\overline{Y} = \frac{1}{Z R_i} \tag{19}$$

$$\overline{Y}_c = \frac{1}{Z_c R_i} [1 - f(\theta)] \overline{Y} \tag{20}$$

$$\overline{Y}_d = \frac{1}{Z_d R_i} = f(\theta) \overline{Y} \tag{21}$$

where $\overline{Y}$, $\overline{Y}_c$ and $\overline{Y}_d$ are normalised admittances (total, convection and displacement admittance), these complex quantities are represented in fig. 3. as function of the normalized frequency

$$\bar{\omega} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega T_a}{2\pi} = \frac{T_a}{T}. \tag{22}$$

From figure 3 it may be seen that the convection admittance has allways a positive real part (a positive conductance) but an imaginary part which is positive for some domains of frequency and negative for others.

From (13) it is clear that for

$$\theta = 2k\pi \tag{23}$$

$$f(\theta) = 1.$$

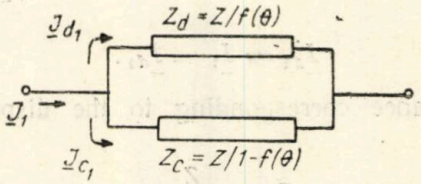


Fig. 2.

Therefore for

$$\bar{\omega} = k \frac{T_a}{T} \tag{24}$$

where k is an integer,

$$\overline{Y}_d = \overline{Y} \quad ; \quad \overline{Y}_c = 0. \tag{25}$$

The convection admittance passes through zero many times, its imaginary part being negative (inductive) for some domains of frequency

and positive (capacitive) for others. The displacement admittance has always positive real and imaginary parts, therefore is always capacitive. The total admittance $\overline{Y}$ is also always capacitive.

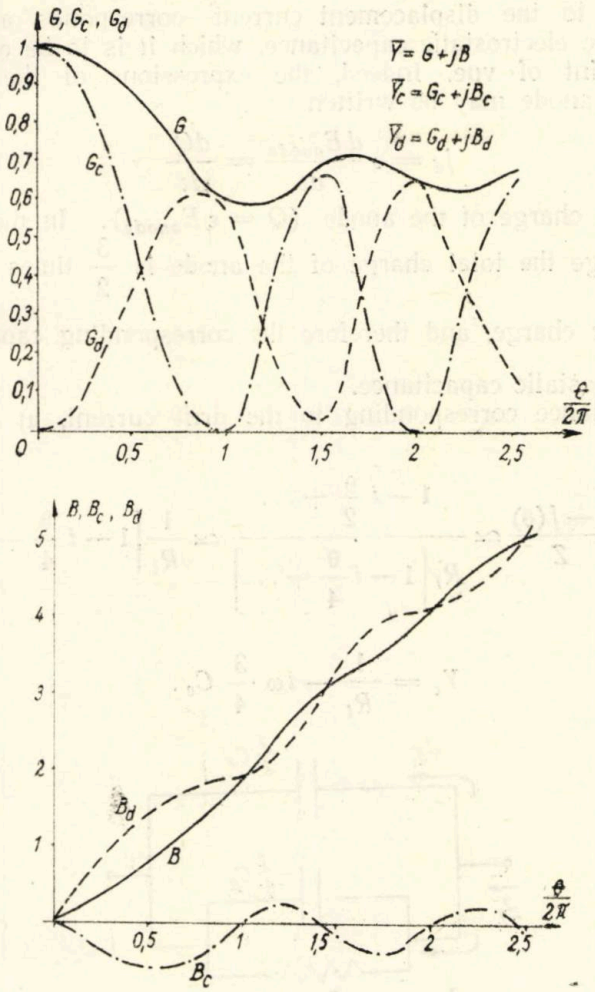


Fig. 3.

IV. *THE CASE OF LOW FREQUENCIES*

It is interesting to examine the case of low frequencies when $\theta \ll 1$. Then

$$Y_d = \frac{f(\theta)}{Z} = \frac{\frac{\theta^2}{3!} - \frac{\theta^4}{5!} + i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{24}\right) + \dots}{R_i\left[1 - \frac{\theta^2}{20} - i\,\frac{\theta}{4}\left(1 - \frac{\theta^2}{120}\right) + \dots\right]} \simeq i\,\frac{\theta}{2R_i}, \tag{26}$$

Taking into account (2) and (3)

$$Y_d = i\omega \frac{3}{2} C_0 . \tag{27}$$

Therefore, to the displacement current corresponds a capacitance greater than the electrostatic capacitance, which it is to be excepted from a physical point of vue. Indeed, the expressions of the displacement current at the anode may be written

$$j_d = \varepsilon \frac{dE_{anode}}{dt} = \frac{dQ}{dt} \tag{28}$$

where Q is the charge of the anode $(Q = \varepsilon E_{anode})$. In the presence of the space charge the total charge of the anode is $\frac{3}{2}$ times greater than the electrostatic charge, and therefore the corresponding capacitance is $\frac{3}{2}$ times the electrostatic capacitance.

The admittance corresponding to the drift current, at low frequencies, is

$$Y_c = \frac{1 - f(\theta)}{Z} \simeq \frac{1 - i\frac{\theta}{2} + \dots}{R_i\left[1 - i\frac{\theta}{4} + \dots\right]} \simeq \frac{1}{R_i}\left[1 - i\frac{\theta}{4} + \dots\right] \tag{29}$$

or

$$Y_c = \frac{1}{R_i} - i\omega \frac{3}{4} C_0 . \tag{30}$$

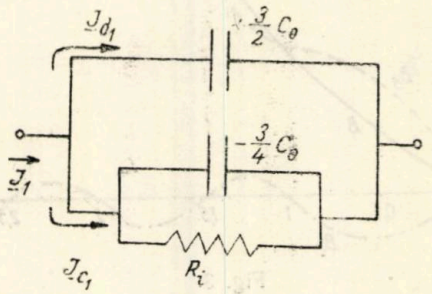


Fig. 4.

The admittance is composed (fig. 4) of a conductance $\frac{1}{R_i}$ in parallel with a negative capacitance. This negative capacitance shows an inductive effect due to the transit time of the mobile charges through the device. This inductive effect is comparable with the capacitive effect even at the lowest frequencies. This inductive effect explains why the total capacitance of the device is not greater but smaller than the electrostatic capacitance.

V. *CONCLUSIONS.*

On the basis of a detailed equivalent scheme it is explained why the capacitance of a dielectric diode, at low frequencies is smaller than the electrostatic capacitance. This is due to an inductive effect which is important even at the lowest frequencies. The inductive effect is due to the transit time of the charge carriers through the device. The results are similar to those obtained previously for the vacuum diode [4] and also for the *PN* junction [5].

Chair of electron tubes and transistors
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest

REFERENCES

1 *J. Shao, G. T. Wright:* Characteristics of the space-charge-limited diode at very high frequencies Solid State Electronics, 3 (1961), 291—303.

2 *F. B. Llewellyn:* Electron inertia effects Cambridge, 1941.

3 *M. Дрэгэнеску:* Частотные свойства идеального диэлектрического диода при малых сигналах Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, XXVII, 4, 131—138 (1965).

4 *M. Drăgănescu:* A new equivalent circuit for diodes at frequencies corresponding to $\theta < 0{,}1\,\pi$. Revue de Physique (Acad. R.S.R.) IV, 1, 61—68 (1959).

5 *M. Drăgănescu:* Asupra capacităţii de difuzie a unei joncţiuni P—N. Studii şi cercetări de fizică, XIII, 1, 49—57 (1962).

MŰSZAKI KÖNYVTÁRES ORSZÁGOS DOKUMENTÁCIÓS CENTRUM

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10105

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

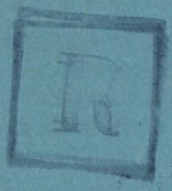
Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 JUN 1

F1130

REFERÁLVA



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXVII NUMĂRUL 6 ANUL 1965
NOIEMBRIE — DECEMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXVII — NUMĂRUL 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE
1965

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. *I. S. Antoniu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici ;* Prof. Dr. *E. Bratu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli ;* Conf. *S. Călin,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu ;* Prof. *S. Gîdea ;* Conf. *I. Grădișteanu,* cand. Șt. Ec. ; Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. *Gh. Manea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea ;* Prof. *N. Marinescu,* cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu ;* Prof. *C. Penescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet ;* Prof. *Al. Rău ;* Prof *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. Dr. *R. Voinea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste ; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei Republicii Socialiste România

Sumar

MATEMATICĂ

I. M. Miu

Sur les zéros des solutions des certaines équations différentielles . . 17

N. Donciu

Asupra curburei unei curbe trasate pe o suprafață conică oarecare . 25

MECANICĂ

N. I. Manolescu, Gh. Popa, A. Martineac

Contribuții la teorema triplei generări a curbei de bielă 29

CENTRALE ELECTRICE

C. Dinculescu, N. Dănilă, C. Wlezek

Méthode de calcul technique-economique pour déterminer le type optimum de centrale électrique nucléaire et la compétitivité entre les centrales électriques nucléaires et les centrales classiques 57

TERMOTEHNICĂ

C. Guță

Influența frontierelor asupra scurgerii prin rețelele de profile de mică alungire ale turbo-mașinilor axiale 81

MAȘINI UNELTE

A. Oprean

Studiul teoretic și experimental al debitului pompelor cu roți dințate 97

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

I. Gavrilaș

Considerații în legătură cu creșterea preciziei de prelucrare în cazul așchierii cu secțiune variabilă 119

V. Tache, Gh. Bădescu, A. Brăgaru

Corelația dintre parametrii constructivi și cei funcționali la excentricii circulari 133

Резюме

Д. К. 517.9

И. М. Миу

Дополнения к теории некоторых дифференциальных уравнений

В настоящей работе даются простые демонстрации теоремы Штурма и дифференциального уравнения и затем исследуются реальные ошибки решений дифференциального уравнения степени n. Далее изучаются точки пересечения уравнения $y = F(x, y)$ с кривой.

Предварительные исследования проводятся на основе теоремы автора статьи в 1 2 и 3.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 513.5/8

Н. Дончу

Об изогнутой кривой, проведенной на любой конической поверхности

Автор рассматривает вопрос об изогнутой кривой, проведенной на любой конической поверхности. С этой целью рассматривается кривая пересечения данной конической поверхности со сферой с центром в вершине конуса с радиусом, равным I. Развертывание конической поверхности на плоскости выражает изгиб кривой, полученной развертыванием.

Находится и интегрируется дифференциальное уравнение геодезических линий.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 621.827 : 621-232

Н. И. Манолеску, Г. Попа, А. Мартиняк

Новые доказательства касающиеся тройного образования кривой шатуна для синтеза шарнирных плоских механизмов

После того как приводятся уже существующие доказательства, касающиеся наличия трех шарнирных четырехзвенных механизмов, в которых некая точка в плоскости шатуна образует такую же самую кривую шатуна (теория Робертса-Чебышева) авторы обобщают доказательство с помощью пантографа Силвестра и продолжают это доказательство, пользуясь планом повернутых скоростей, а также и другой теоремой трех центров мгновенного вращения (пользуясь то аналитеческим методом, то шарнирным четырехзвенником типа Робертса).

Наконец дается доказательство, которое позволяет проектировать плоские шарнирные механизмы, в структуре которых шарниры четырехзвенники типа Робертса.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Summary

D.C. 517.9

I. M. Miu

Contributions to the Theory of Some Differential Equations.

In this paper are given simple demonstrations of Sturm's theorems in differential equations, then the real zeros of the solutions of the n order linear differential equation are studied. After that the author studies the intersection points of the solutions of the equation $y'=F(x,y)$ with a curve.

The previous studies are performed using a theorem indicated by the author in [1], [2] and [3].

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D.C. 513.5./8

N. Donciu

On the Curvature of a Curve Traced on any Conical Surface.

The author treats of the curvature problem of a curve traced on any conical surface using for that the curve of intersection γ between the given conical surface and the sphere with the centre in the cone apex and with the radius 1. Displaying the conical surface on a plane, the curvature of the curve obtained by displaying is expressed. Considering the oscillating plane to the normal curve at the surface, the author finds out and integrates the differential equation of geodesical lines.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 621.827 : 621.232

N. I. Manolescu, Gh. Popa, A. Martineac

New Demonstrations Concerning the Triple Generation of the Coupler-point Curve (Coupler-curve) for the Synthesis of Planar Mechanisms.

After the actual demonstrations concerning the existence of three four-bar linkages at which a point from the connecting rod plane produces the same coupler-curve (the theorems of Roberts-Tschebytscheff) the authors generalize with the help of Silvester's pantograph and prove in the following way a demonstration which helps the use of the rotating velocity vector diagram and other theorems form the three velocity poles (by means of the analytical metho dor with an other Robert's four-bar linkage).

At last on realise that a demonstration which allows the synthesis of planar mechanisms in the structure of those existing in Robert's four-bar linkage.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 621—154 : 533 : 621.51

К. Гуцэ

Влияние крайних поверхностей над течением через решетки профилей малых удлинений осевых туробомашин

В настоящей работе изучается пограничный слой возникающий на периферии проточной части с целью определить его толщину перед любой ступенью.

При решении вопроса отметим три этапа а именно:

I. Определение параметров пограничного слоя на начальном участке втулки:

II. Определение таких же параметров на цилиндрическом участке втулки:

III. Определение параметров пограничного слоя образованного на периферийной поверхности проточной части.

Расчеты ведутся на основе графиков изображенных на фиг. 3, 4, 5 и 7, 8.

Установлена зависимость потерь в пограничном слое от удлинения лопаток и кривизны крайних поверностей проточной части.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 621.65/69.621-82.621.9

А. Опрян

Теоретическое и экспериментальное исследование производительности шестерренных насосов

В работе представлен общий аналитический метод определения теоретической производительности в шестеренных насосах основанный на анализе явлений, имеющих место в процессе всасывания-выкачивания.

Полученные математические отношения, простые по форме, дают высокую точность при расчете и позволяют определить основные параметры (расход, пульссация, КПД, момент двигателя и мощность) Для расчета реальной производительности зависящей от различных факторов, была разработана показательная формула на основе обработки богатого экспериментального материала.

С помощью полученных выражений легко определяются об'емные потери и об'емные К.П.Д. шестеренных насосов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 621—154:533:621.51

C. Guță

The Border Influence upon the Leakage through the Networks of Profile Slightly Lengthened of the Axial Turbomachines.

In this paper is studied the limiting stratum that rises at the periphery of the passing section of the current in order to determine its thickness in front of a certain step. In solving the problem three stages are distinguished such as :

1) The determination of the parameters of the limiting stratum on the coated side of the hub.

2) The determination of the same parameters on the cylindrical side of the hub.

3) The determination of the parameters of the limiting stratum formed on the peripherical area of the passing side.

The calculuses are led on the basis of the diagram represented in the fig. 3, 4, 5 and 7, 8. The dependence upon the losses in the limiting stratum of lengthening the blades and the curvature of the outermost areas of the passing sides are also established.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 621.65/69:621—82:621.9

A. Oprean

The Theoretical and Experimental Flow of Gear Pumps.

The paper presents a generalized analytical method of determining the theoretical flow of gear pumps based on the analysis of the phenomena that take place in the pump in the suction-pressing process.

The obtained mathematical relations are simple in form, give a great calculus accuracy and allow the determination of the basic parameters (flow, pulsation, efficiency, torque and power). For calculating the real flow depending on diverse factors was worked out an exponential relation based on the processing of a rich experimental material. By means of the obtained expressions, the volume losses and volume efficiency of the gear pumps are easily determined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 62.001.24 : 621.311.25 : 621.039

К. Динкулеску, Н. Дэнилэ, К. Влезек

Метод технико-экономического расчета для определения оптимального типа атомной электростанции и определения экономического соотношения между атомными и классическими электростанциями

Работа устанавливает метод технико-экономического расчета для определения оптимального типа атомной электростанции при условии минимальных расчетных годовых расходов-вопрос представляющии в настоящее время большой теоретический и практический интерес в Румынии и др. странах.

Предложенный метод позволяет определить относительные экономические соотношения между атомными и классическими электростанциями.

В работе указывается также как можно произвести технико-экономические расчеты данного метода при помощи электронной вычислительной машины и полученные при этом результаты.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 621.91.07 : 621.919.3

И. Гаврилаш

Некоторые соображения в связи с ростом точности обработки при стружке с переменным сечением

В работе показано, каким образом претерпевает изменения точности обработки из-за обобщения, поверхности и эластичные деформации системы при обработке поверхностей внешних цилиндров при помощи круглового обжатия где сечение стружки переменно.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Д. К. 621.837

В. Таке, Г. Бэдеску, А. Брэгару

Корреляция конструктивных и функциональных параметров у круговых эксцентриков

В работе рассматриваются функциональные параметры круговых эксцентриков и их корреляция с конструктивными параметрами.

На основе этого исследования приводятся новые данные и отвергаются некоторые данные из литературы по специальности.

Работа способствует выяснению некоторых вопросов возникших в связи с механизмами сжимания с эксцентриком как например: надежность в эксплуатации, избегание частей рабочего профиля, где происходит застревание механизма и ограничение рабочего профилия с таким рассчетом чтобы отклонении угла наклонной плоскости и силы сжимания были очень маленькими, так чтобы практрчески, их можно считать постоянными.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 62.001.24:621.311.25:621.039

C. Dinculescu, N. Dănilă, C. Wlezek

Technical-economic Calculation Method for Determining the Optimum Type of Atomic Power Station and the Competition between Atomic and Classical Power Stations.

In this paper is estableshed a new method of technical economic calculation for determining the optimum type of atomic power station, based on the criterion of the calculation of the minimum yearly expenses a problem of theoretical and practical interest, most actual both in Rumania and abroad.

The proposed method may also determine the relative economic position between atomic and classical power stations. In the paper is shown how to perform the technical-economic calculations of the method by means of electronic computers and the results obtained.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 621.91.07:621.919.3

I. Gavrilaş

Considerations Concerning the Growth of the Working Precision in the Case of the Variable Section Cutting.

In this paper the author shows the way in which the working precision is influenced owing to the generation of the elastic surface and strain of the system, when external cylindrical surfaces are worked by circular broaching, the chip section being variable.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. C. 621.837

V. Tache, Gh. Bădescu, A. Brăgaru

The Correlation between the Constructive and Functional Parameters at the Circular Eccentrics.

A study of the functional parameters of circular eccentrics and of the correlation between these and the constructive parameters is presented. Based on this study, completions are brought and some data included in the literature of speciality are refuted. The paper contributes to elucidate some problems risen by, the fastening devices with eccentric, such as: safety in exploitation, the avoidance of the part of work profile in which are produced the sticking of the mechanism and the limitation of the work profile so that the variations of the declivity angle and of the fastening force should be very small, being thus practically considered constant.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Résumé

C. D. 517.9

I. M. Miu

Sur les zéros des solutions des certaines équations différentielles.

Dans ce travail on donne des démonstrations simples des théorèmes de Sturm des équations différentielles, puis on étudie les zéros réels des solutions de l'intersection des solutions de l'equation $y = F(x, y)$ avec une courbe.

On fait les études précédentes en employant un théorème indiqué par l'auteur dans 1, 2, 3.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C.D. 513.5/8

N. Donciu

Sur la courbure d'une courbe tracée sur une superficie quelconque

L'auteur traite du problème de la courbure d'une courbe tracée sur une surface conique quelconque, en utilisant dans ce but la courbe d'intersection γ d'entre la superficie conique donnée et la sphère avec centre dans le somment du cône et avec rayon 1. En déroulant la superficie conique sur un plan on exprime la courbure de la courbe obtenue par déroulement. En considérant le plan oscillateur à la courbe nonualement à la superficie. On trouve et on intègre l'équation différéentielle des lignes géodésiques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 621.827 :621—232

N. I. Manolescu, Gh. Popa, A. Martineac

Nouvelles démonstrations de la triple formation de la courbe-bielle, pour la synthèse des mécanismes plans articulés.

Après la présentation de démonstrations actuelles en ce qui concerne l'existence de trois mécanismes quadrilatères dans lesquels existe un point commun dans le plan de la bielle qui decrit la même courbe de bielle (le théorème Roberts-Tchebycheff) les auteurs donnent une généralisation à l'aide du panthographe Silvestre et puis présentent une démonstration en utilisant le plan des vitesses rabattues et une autre qui utilise le théorème des trois centres instantanés de rotation (soit par la méthode analytique soit à l'aide du quadrilatère du type Roberts).

Enfin on présente une démonstration qui permet la construction des mécanismes plans articulés dans la structure desquels on trouve des quadrilatères du type Roberts.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

Zusammenfassung

D.K. 517.9

I. M. Miu

Beiträge zur Theorie einiger Differentialgleichungen

In dieser Arbeit werden einfache Beweisführungen der Sturm'schen Theoreme bezüglich der Differentialgleichungen gebracht. Dann werden die realen Fehler der Lösungen der liniären Differentialgleichung der Ordnung n untersucht. Anschliessend werden die Schnittpunkte der Lösungen der Gleichung $y' = F(x, y)$ mit einer Kurve untersucht.

Die vorangehenden Untersuchungen werden unter Anwendung eines vom Verfasser in [1] [2] und [3] angegebenen Theorems vorgenommen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D.K. 513.5/.8

N. Donciu

In bezug auf die Krümmung einer auf eine beliebige konische Oberfläche gezogene Kurve.

Der Autor behandelt das Problem der Krümmung einer auf eine beliebige konische Oberfläche gezogene Kurve, γ, indem dazu die Schnittkurve zwischen der gegebenen konischen Oberfläche und der Kugel mit dem Zentrum an der Spitze des Konus und Halbmesser I, verwendet wird. Durch Entfaltung der konischen Oberfläche auf eine Ebene, drückt er die Biegung der durch die Entfaltung erhaltenen Kurve aus.

Indem er die Schwingungsebene der Kurve normal zur Oberfläche betrachtet, findet und integriert er die differentielle Gleichung der geodesischen Linien.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D.K. 621.827:621—232

N. I. Manolescu, Gh. Popa, A. Martineac

Neue Beweise betreffend die dreifache Erzeugung der Koppelkurve, für die Synthese der Getriebe.

Nach der Vorführung der gegenwärtigen Beweise über das Vorhandensein dreier Viergelenkgetriebe wo ein Punkt in der Ebene der Koppel dieselbe Koppelkurve erzeugt (Satz von Roberts-Tschebtscheff), verallgemeinern die Verfasser diesen Satz mit Hilfe des Sylvester-Panthographs.

Sie führen ferner andere Beweise vor, den gedrehten Geschwindigkeits öplan und den Satz der drei Geschwindigheispole benützend (mit Hilie der analytjschen Methode, oder des Vierecks nach Roberts).

Am Schluss wird ein Beweis gegeben, den Entwurf der ebenen Viergelenkgetriebe ermöglichend, in denen Vierecke nach Roberts vorhanden sind.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 621—154 :533:621.51

C. Guță

L'influence des frontières sur l'écoulement par les réseaux des profils de petit allongement des turbomachines axiales.

Dans cet ouvrage on étudie la couche limite qui prend naissance à la périphérie de la section de passage du courant pour déterminer son épaisseur au moment d'un stade quelconque. Dans la résolution du problème on distingue les trois étapes suivantes :

1) La détermination des paramètres de la couche limite sur la partie carenée de la souche.

2) La détermination des même paramètres sur la partie cylindrique de la souche.

3) La détermination des paramètres de la couche limite formée à la surface périphérique de la partie de passage.

Les calculs se dirigent selon les graphiques représentés dans les fig. 3, 4, 5 et 7, 8. On établit la dépendance des pertes dans la couche limite des allongements des palettes et la courbure des surfaces extrêmes de la partie de passage.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 621.65/ 69:621—82:621.9

A. Oprean

L'étude théorique et expérimentale du débit des pompes à roues dentées.

Dans cet ouvrage l'auteur présente une méthode analytique généralisée de détermination du débit théorique des pompes à roues dentées à partir de l'analyse des phémomènes qui ont lieu dans la pompe au cours du processus d'„aspiration-refoulement". Les relations mathématiques obtenues sont simples du point de vue de la forme, elles présentent une grande précision de calcul et permettent la détermination des paramètres de base (débit, pulsation, rendement, couple-moteur et puissance.) Pour le calcul du débit réel en fonction de divers facteurs on a élaboré une relation exponentielle, basee sur un richematériel expérimental A l'aide des expressions obtenues, on détermine facilement les pertes volumétriques et le rendement volumétriques des pompes à roues dentées.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. K. 621—154:533:621.51

C. Guță

Der Einfluss der Begrenzungen auf das Fliessen durch die Netze der Profile mit kleinen Dehnungen, bei den achsialen Turbomaschinen.

In vorliegender Arbeit wird die Grenzschicht untersucht, die an der Grenze des Durchgangsquerschnittes des Stromes entsteht. Dieses geschieht zum Zweck der Bestimmung ihrer Dicke auf der Höhe irgendeiner Stufe. Bei der Lösung der Aufgabe unterscheidet man drei Etappen und zwar :

I. Bestimmung der Parameter der Grenzschicht auf der profilierten Seite der Nabe.

II. Bestimmung derselben Parameter auf der zylindrischen Seite der Nabe.

III. Bestimmung der Parameter der Grenzschicht, die sich auf der periferischen Oberfläche des Durchgangsteils gebildet hat.

Die Berechnungen erfolgen auf Grund der graphischen Darstellungen aus den Abbildungen 3, 4, 5, und 7, 8. Es wird die Abhängigkeit der Verluste in der Grenzschicht von der Dehnung der Schaufeln und der Krümmung der äussersten Oberflächen der Durchgangsstelle, festgesetzt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. K. 621.65/.69:621—82:621.9

A. Oprean

Theoretisches und exeperimentelles Studium der Durchflussmenge von Zahnradpumpen.

In der Arbeit wird eine analytisch-verallgemeinerte Bestimmungsmethode der theoretischen Durchflussmenge der Zahnradpumpen dargestellt, die sich auf die Analyse der Vorgänge gründet, die in der Pumpe während des „Ansaugens-Förderns" stattfinden. Die erhaltenen mathematischen Beziehungen sind formmässig einfach, ergeben eine grosse Berechnungsgenauigkeit und ermöglichen die Bestimmung der Grundparameter (Durchflussmenge, Pulsation Wirkungsgrad, Drehmoment und Leistung). Für die Berechnung der tatsächlichen Durchflussmenge in Abhängigkeit von verschiedenen Faktoren wurde eine exponentielle Gleichung aufgestellt, die sich auf die Verarbeitung zahlreichen Versuchsmaterials stützt.

Mit Hilfe der erhaltenen Ausdrücke werden die Volumenverluste und die Volumenleistungsfähigkeit der Zahnradpumpen leicht bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 62.001.24:621.311.25:621.039

C. Dinculescu, N. Dănilă, C. Wlezek

Méthode de calcul technique-économique pour déterminer le type optimum de centrale électrique nucléaire et la compétitivité entre les centrales électriques nucléaires et les centrales classiques.

On établit une méthode de calcul technique — economique pour déterminer le type optimum de centrale électronucleaire, d'après le crite rium des dépenses annuelles de calcul minimales. Ce problème présente un intérêt théorique et pratique très actuel en Roumanie et à l'etranger. La méthode proposée permet également de déterminer la position économique relative entre les centrales électronucléaires et les centrales classiques. L'ouvrage montre la manière dont on a effectué les calculs techniques — économiques de la méthode à l'aide de la calculatrice électronique ainsi que les résultats obtenus.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 621.91.07:621.919.3

I. Gavrilaş

Considérations concernant l'accroissement de la précision d'usinage au cas de la coupe en section variable.

Dans cet ouvrage on présente la manière dont la précision d'usinage est influencée grâce à la création de la surface et aux deformation élastiques du système, pour l'usinage des surfaces cylindriques exterieures par brochage circulaire où la section coupeau est variable.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

C. D. 621.837

V. Tache, Gh, Bădescu, A. Brăgaru,

La corrélation entre les paramètres constructifes et les paramètres fonctionnaux des excentriques circulaires.

Le travail présente l'étude des paramètres fonctinnaux des excentriques circulaires et la corrélation entre ceux-ci et les paramétres constructifs. En partant de cette étude on complète et on infirme certaines données contenues dans la littérature de spécialité.

Le travail contribue à élucider certains problèmes posés par les mécanismes et par les éléments de serrage à excentrique, comme par exemple : la sûreté dans l'exploitation, le détour des portions du profil de travail ou on produit l'immobilisation du mécanisme et la limitation du profil de travail de telle manière que les variations de l'angle de pente et de la force soient très petites et que partiquement elles puissent être considérées constantes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. K. 62.001.24:621.311.25:621.039

C. Dinculescu, N. Dănilă, C. Wlezek

Technisch-wirtschaftliche Berechnungsmethode zur Bestimmung des geeingnetesten Typs eines Atomkraftwerks und der Konkurrenzfähigkeit zwischen Atom- und klassischen Kraftwerken.

In der Arbeit wird eine technisch-wirtschaftliche Berechnungsmethode zur Bestimmung des geeignetesten Typs eines Atomkraftwerkes aufgestellt. Dies geschieht auf Grund der jährlichen kleinsten Berechnungskosten, ein Problem, dem gegenwärtig in Rumänien und im Ausland ein besonderes theoretisches und praktisches Interesse entgegengebracht wird.

Die vorgeschlagene Methode ermöglicht auch die Bestimmung der gegenseitigen relativen wirtschaftlichen Stellung der Atomkraftwerke und der klassischen Kraftwerke.

In der Arbeit wird die Durchführung der technisch-wirtschaftlichen Berechnungen mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine und die erhaltenen Ergebnisse beschrieben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. K. 621.91.07:621.919.3

I. Gavrilaş

Betrachtungen in bezug auf die Erhöhung der Bearbeitungspräzision bei Zerspanung mit veränderlichem Querschnitt.

In der Arbeit wird gezeigt, wie die Bearbeitungspräzision auf Grund der Generierung der oberfläche und der elastichen Formänderung des Systems, bei Bearbeitung der äusseren zylinderförmigen Flächen durch drehendes Räumen mit veränderlichem Spanquerschnitt, beeinflusst wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

D. K. 621.837

V. Tache, Gh. Bădescu, A. Brăgaru

Das Verhältnis zwischen den konstruktiven und funktionellen Parametern bei kreisförmigen Exzentern.

Die Arbeit umfasst das Studium der funktionellen Parameter der kreisförmigen Exzenter und den Zusammenhang zwischen diesen und den konstruktiven Parametern.

Auf Grund dieses Studiums werden Ergänzungen gebracht und gleichzeitig einige in der Fachliteratur vorgefundene Daten widerlegt.

Die Arbeit trägt zur Klärung einiger Probleme der Anziehungsmechanismen, mit Exzentern bei, wie z. B. die Betriebssicherheit, das Ausscheiden der Teile des Arbeitsprofils in denen Stauchugen des Mechanismus vorkommen und die Begrenzung des Arbeitsprofils in solcher Weise, dass die Veränderungen des Steigungswinkels und der anziehenden Kraft sehr klein werden, so dass sie praktisch als konstant betrachtet werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXVII, Nr. 6/965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.9

SUR LES ZÉROS DES SOLUTIONS DES CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES *

I. M. MIU

Dans ce qui suit, nous démontrerons et étudierons quelques questions en utilisant un théorème indiqué par nous dans [1], [2], [3] :

1) Nous démontrerons le théorème de Sturm concernant les zéros des solutions des l'équations différentielles linéaire de 2-me ordre et le théorème de comparaison de Sturm pour la même équation.

2) Nous étudions l'interdépendence entre les zéros des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre superieur.

3) Nous éxaminons encore les zéros des solutions de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$- et puis les zéros des solutions des quelques équations différentielles particulières.

Aussi nous étudions les points d'intersections des toutes solutions de l'équation $y' = F(x, y)$ avec une courbe $y = g(x)$.

En tout ce qui suit, il sera la question de zéros réels.

§ 1. L'équation différentielle linéaire de 2-me ordre

Dans nôtre ouvrage [1], [2], [3] nous avons démontré et généralisé le suivante :

Théorème : Considérons les fonctions :

1° $f(x)$ *continue sur* [a, b] *et dérivable sur* (a, b).

2° $\psi(x)$, $\varphi(x)$ *bornées et définies sur* [a, b] *et continues sur* (a, b).

Il résulte que les zéros réels des fonctions

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) \ , \ \varphi(x) \ ,$$

séparent les zéros réels de la fonction $f(x)$ dans $[a, b]$.

Dans cette ouvrage nous utiliserons partout ce théorème.

* Manuscris predat la redacție la 28 iunie 1965.

I. *La démonstration du théorème de Sturm*

Le théorème de Sturm. Étant donné l'équation :

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

avec $p(x)$ et $q(x)$ fonctions continues sur $[a, b]$, les zéros des solutions de cette équation se séparent réciproquement dans $[a, b]$.

Démonstration. Soit $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions linéaires independentes de l'équation (1).

En appliquant le théorème cité, il résulte que les zéros de $y_1(x)$ dans $[a, b]$ sont séparés par les zéros des fonctions :

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \; ; \quad y_2 .$$

Aussi les zéros de $y_2(x)$ dans $[a, b]$ sont séparés par les zéros des fonctions :

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \; ; \quad y_1 .$$

Comme le vronskian $W(y_1, y_2)$ conserve le même signe dans l'intervalle $[a, b]$, il résulte que les zéros de $y_1(x)$ et $y_2(x)$ se séparent réciproquement dans $[a, b]$.

II. *Le théorème de comparaison de Sturm*

Le théorème de comparaison est :

Soit les équations :

$$y'' + q_1(x)\,y = 0 \tag{2}$$

$$z'' + q_2(x)\,z = 0 \tag{3}$$

ou $q_1(x)$, $q_2(x)$ sont fonctions continues sur $[a, b]$, et $q_1(x) \leqslant q_2(x)$

Il résulte qu'entre deux zéros consecutifs situés dans $[a, b]$ de l'une des solutions particulières $y(x)$ de l'équation (2), se trouve au moins un zero de chaque solution particulière de l'équation (3).

Démonstration. Nous considérons pour les deux équations, que les solutions ne sont pas identiquement nulles.

En multipliant les équations (2) et (3) respectivement avec $z(x)$ et $y(x)$ et en retranchant les équations obtenues, on aura :

$$y'' z - y z'' = (q_2(x) - q_1(x))\,yz ,$$

ou

$$(y' z - y z')' = (q_2(x) - q_1(x))\,yz . \tag{4}$$

Soit x_1 et x_2, $(a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)$ deux zéros consécutives de y qui sont toujours simples.

Nous considérons les cas :

a) La solution $z(x)$ ne s-annule pas pour x_1 et x_2. Nous supposons que $z(x)$ n-a aucune zéros dans $[x_1, x_2]$.

Sans diminuer la généralité, nous supposons que $y(x)$ et $z(x)$ sont fonctions positives dans (x_1, x_2).

En integrant entre x_1 et x, $(a \leqslant x_1 < x \leqslant x_2 \leqslant b)$ la relation (4), on a :

$$| y'z - yz' |_{x_1}^{x} = \int_{x_1}^{x} (q_2(x) - q_1(x)) y z \, dx \tag{5}$$

Comme $q_1(x) \leqslant q_2(x)$ et $y'(x_1) > 0$, on aura :

$$y'z - yz' = \int_{x_1}^{x} (q_2(x) - q_1(x)) y z \, dx + y'(x_1) z(x_1) > 0 \tag{6}$$

En appliquant le théorème cité, il résulte que les zéros des y dans $[x_1, x_2]$ sont séparés par les zéros des fonctions :

$$y'z - yz' = 0 , \quad z = 0$$

La rélation (6) donne $y'z - yz' > 0$, et comme $y(x_1) = 0$, $y(x_2) = 0$, il résulte que $z(x)$ a au moins un zéro entre x_1 et x_2.

b) La solution $z(x)$ s'annule pour $x = x_1$.

Nous supposons que les fonctions $q_1(x)$, $q_2(x)$ ne sont pas identiques sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, et que $y(x) > 0$, $z(x) > 0$ dans (x_1, x_2).

En integrant entre x_1 et x_2 la rélation (4), le premier membre devient :

$$| y'z - yz' |_{x_1}^{x_2} = 0 ,$$

et le deuxième membre devient :

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_2(x) - q_1(x)) \, yz \, dx > 0 .$$

Comme il y a une contradiction, il résulte que la solution $z(x)$ a au moins un zéros dons l'intervalle (x_1, x_2).

c) De manière analogue on étudie le cas $z_2(x) = 0$.

III. *Un autre théorème sur les zéros de l'équation linéaire de 2-me ordre*

Théorème. Considérons l'équation différentielle

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 , \tag{1}$$

où $p(x)$, $q(x)$ sont fonctions continues sur $[a, b]$.

Les zéros d'une solution $y_1(x)$ de l'équation (1) sont séparés par les zéros de $p(x)$ et $y_1''(x)$.

Démonstration : Nous appliquons le théorème cité, en prenant $\psi(x) = q(x)$, $\varphi(x) = p(x)$, et il résulte les fonctions

$$q(x) y_1 + p(x) y_1' , \; p(x) . \tag{7}$$

Comme y_1 est solution de l'équation (1) nous avons :

$$q(x)\, y_1 + p(x)\, y_1' \equiv - y_1''. \tag{8}$$

Il résulte de (7), en tenant compte de (8), que dans $[a, b]$ les zéros de y_1, sont séparés pat les zéros de $p(x)$ et de y_1''.

Si $p(x)$ a toutes les zéros imaginaires, les zéros de y_1 sont séparés par les zéros de y_1''.

§ 2. Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Considérons l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{9}$$

où $a_i(x)$, sont fonctions continues sur $[a, b]$.

Supposons maintenant qu'on lui connaisse k solutions particulières linéaires independentes $y_1, y_2 \ldots y_k$.

Soient :

$$\eta_1(x) = C_1^1 y_1 + C_2^1 y_2 + \ldots + C_k^1 y_k$$

$$\eta_2(x) = C_1^2 y_1 + C_2^2 y_2 + \ldots + C_k^2 y_k,$$

deux solutions linéaires independentes de l'équation (9), où

$$C_1^1,\ C_2^1 \ldots C_k^1\ ;\ C_1^2,\ C_2^2 \ldots C_k^2.$$

désignent constantes arbitraires.

Cela posé, nous démontrons de la même manière comme â l'équation de deuxième ordre le suivant :

Théorème. Soit l'équation linéaire (9) avec les coefficients continues sur $[a, b]$.

Les zéros de la solution $\eta_1(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ sont séparés par les zéros de la solution $\eta_2(x)$ et du wronskian

$$W(\eta_1, \eta_2) = \sum \begin{vmatrix} C_i^1 & C_j^1 \\ C_i^2 & C_j^2 \end{vmatrix} W(y_i, y_j).$$

Si dans l'intervalle $[a, b]$ nous avons $W(\eta_1, \eta_2) \neq 0$, alors les zéros des solutions η_1, η_2 se séparent reciproquement dans $[a, b]$.

Corollaire. Soit y_1, y_2 deux solutions particulières linéaires independentes de l'équation (9).

Les zeros de toutes solutions $C_1 y_1 + C_2 y_2$ sont séparés par les zéros du wronskian $W(y_1, y_2)$ et par les zéros de l'une des solutions $C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Il résulte que si le wronskian $W(y_1, y_2) \neq 0$ dans $[a, b]$, les zéros des solutions $C_1 y_1 + C_2 y_2$ se séparent reciproquement dans cette intervalle.

§ 3. L'équation différentielle $y' = F(x, y)$

I. *Sur le séparation des zéros des solutions de l'équation* $y' = F(x, y)$.

Considérons l'équation différentielle :

$$y' = F(x, y), \tag{10}$$

où $F(x, y)$, est une fonction continue sur le rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$, avec la dérivée $F'_y(x, y)$ continue sur ce rectangle.

Nous supposons que le rectangle D où $F(x, y)$ este définie, contient un segment sur l'axe x, $(c \leqslant 0 \leqslant d\ ,\ c \neq d)$.

Nous avons le :

Théorème. Etant donnée une équation différentielle $y' = F(x,y)$, *si la fonction* $F(x, y)$ *satisfait sur le rectangle D les contitions énoncées plus haut, alors les zéros de toutes ses solutions situés en* $[a, b]$ *sont séparés par les zéros de la fonction* $F(x, 0)$.

Démonstration : Comme $F(x, y)$ est une fonction continue et a la dérivée $F'_y(x, y)$ continue sur D on a

$$F(x, y) = F(x, 0) + F'_y(x, \theta y)\, y, \tag{11}$$

$$0 < \theta < 1$$

Démontrons, d'abord, que la fonction $\Phi(x, y) = F'_y(x, \theta y)$ est aussi continue sur D.

De la relation (11) on aura :

$$\Phi(x, y) = \frac{F(x, y) - F(x, 0)}{y}. \tag{12}$$

Comme les fonctions $F(x, y)$, $F(x, 0)$ sont continues, il faut que la fonction $\Phi(x, y)$ soit continue pour $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Il nous reste à considérer le cas quand $y = 0$.

La relation (12) donne :

$$\lim_{y \to 0} \Phi(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{F(x, y) - F(x, 0)}{y} = F'_y(x, 0).$$

En tenant compte de la relation (11) on voit que pour $y = 0$ la fonction $\Phi(x, y)$ devient $F'_y(x, 0)$.

Il résulte donc, que $\Phi(x,y)$ est une fonction continue sur le réctangle D.

D'après ce qui précède, l'équation (10) peut sécrire sous la forme :

$$y' = \Phi(x, y)\, y + F(x, 0) \tag{13}$$

où la fonction $\Phi(x, y)$ est continue sur le rectangle D.

En appliquant le théorème cité, il résulte que les zéros de $y(x)$ sont séparés par les zéros de $y'(x) - \Phi(x, y(x))\, y(x)$.

De l'équation différentielle donnée, écrite sous la forme (13) il résulte :

$$y'(x) - \Phi(x,y)\,y(x) \equiv F(x,0).$$

Il s'ensuit de là, que les zéros de la fonction $F(x,0)$ séparent les zéros de toutes solutions $y(x)$ de l'équation $y' = F(x,y)$ dans l'intervalle $[a,b]$.

Observations. De ces qui précédent, on voit que le théorème subsiste aussi quand la fonction $F(x,y)$ est continues sur D, a une dérivée $F'_y(x,y)$ continue pour $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$ et satisfait la condition de Lipschitz relativement à y sur D.

Cas particulières

1° Nous considérons l'équation :

$$y' + a_0(x)\,y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y + a_n(x) = 0 \qquad (13)$$

où les coefficients $a_k(x)$ sont fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$.

En appliquant le théorème précedent, il résulte que les zéros des toutes solutions de l'équation (13) sont séparés dans $[a,b]$ par les zéros de la fonction $a_n(x)$.

2° En particularisant le cas précedent on obtient l'équation Riccati :

$$y' + P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) = 0 \qquad (14)$$

Si nous considérons les fonctions $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ continues sur l'intervalle $[a,b]$, on déduit que les zéros de toutes les solutions de l'équation (14) sont séparés dans $[a,b]$ par les zéros de $R(x)$.

Pour $P(x) \equiv 0$, on déduit le cas de l'équation linéaire de premier ordre.

3° Si nous considérons l'équation :

$$y' + a_0(x)\,y^n + a_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y = 0 \qquad (15)$$

avec les coefficents $a_k(x)$ continues sur $[a,b]$, il résulte la conclusion — bien connue — que à l'exception de la solution banale $y = 0$, aucune solution de cette équation n-a pas des zéros dans $[a,b]$.

(Nous avons la même conclusion pour l'équation (10) quand $F(x,0) \equiv 0$.

II. *L'intersection des courbes integrales de l'équation* $y' = F(x,y)$ *avec une courbe* $y = g(x)$

Dans ce cas, on suppose que les fonctions $F(x,y)$, $g(x)$ satisfassent les conditions :

1. $F(x,y)$ est une fonction continue sur le rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$ avec la dérivée $F'_y(x,y)$ continue sur ce rectangle.

2. La fonction $g(x)$ est dérivable sur $[a,b]$ et son graphique est contenu dans le rectangle D pour $x \in [a,b]$.

Nous avons le :

Théorème. Etant donnée une équation différentielle $y' = F(x,y)$ *et une courbe* $y = g(x)$ *de telle sorte que les fonctions* $F(x,y)$, $g(x)$ *satisfassent les conditions précédentes, nous avons la conclusion :*

Les points d'intersections de toutes les solutions de l'équation $y'=F(x,y)$ *avec la courbe* $y=g(x)$ *ont les extrémités des abscisesses compriese entre les zéros de la fonction :*

$$F(x, g(x)) - g'(x).$$

Démonstration :

On fait le changement de la fonction

$$y = z + g(x) \tag{16}$$

et l'équation (10) devient :

$$z' = F(x, z + g(x)) - g'(x). \tag{17}$$

Cela posé, le problème se reduit de séparer les zéros des solutions $z(x)$ de l'équation (17). Dans l'equation (17) la fonction $F(x. z + g(x))$ est continue pour toutes solutions $z(x)$ de cette équation et a sa dérivée $F'_z(x, z + g(x))$ aussi continue sur le rectangle D.

Nous appliquons le théorème précédent à l'équation (17) et il résulte que les zéros de toutes solutions $z(x)$ sont séparés par les zéros de la fonction

$$F(x, g(x)) - g'(x).$$

En tenant compte de la changement de fonction (16), on voit que les point x qui séparent les zéros $z(x)$, séparent aussi les projections sur l'axe x des points d'intersections des toutes solutions $y(x)$ de l'équation (10) avec la courba $y = g(x)$.

Cas particulier. En appliquant le théorème précédent, on peut séparer les points d'intersections de toutes solutions $y(x)$ de l'équation (10) par une droite $y=k$.

Il resulte que les abscisses de ces points sont séparés par les zéros de la fontion $F(x, k)$.

Observations. 1. En particularisant le théorème précédent pour une droite $y = mx + n$, il résulte la conclusion suivante :

Pour une équation $y'=F(x,y)$, chaque courbe isocline sépare les points d'intersections de chaque courbe integrale avec une droite de même inclination.

2. Le théorème subsiste aussi quand la fonction $F(x, y)$ est continue sur D, avec sa dérivée $F'_y(x, y)$ continue sur la courbe $y = g(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$ et satisfait la condition de Lipschitz relativement à y sur D.

La chaire de mathématiques
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

LITTÉRATURE

1. *I. M. Miu :* — Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations. Buletinul Instit. politehnic București, fasc. 4, 1963.
2. *I. M. Miu :* — Sur un thèorème et une géneralisation du théorème de la moyenne. Buletinul Institutului politehnic, București, fasc. 6, 1963.
3. *I. M. Miu :* — Sur les zéros réels de certaines fonctions. Buletinul Institutului politehnic București, fasc. 2 1964.
4. *A. Halanay :* — Introducerea în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Editura tehnică,

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomnul XXVII — 1965, Numărul 6

C.Z. : 513.5/.8

ASUPRA CURBUREI UNEI CURBE TRASATE PE O SUPRAFAȚĂ CONICĂ OARECARE *

NICOLAE DONCIU

1. Se consideră suprafața conică cu vîrful în O și care are ca directoare curba C. Fie γ curba de intersecție dintre această suprafață și sfera cu centrul în origine și cu raza 1.

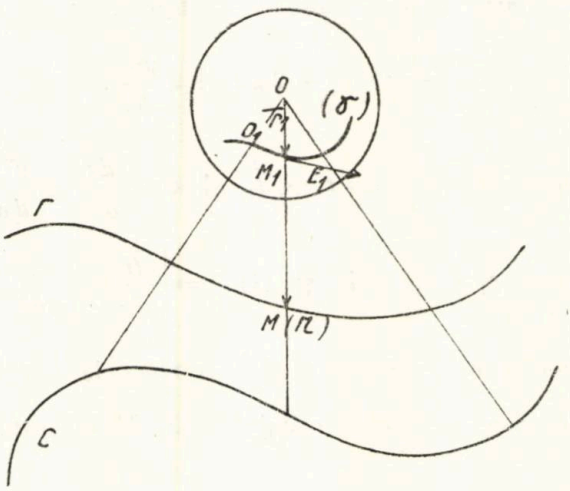


Fig. 1.

Se consideră O_1 un punct pe curba γ de la care se începe măsurarea arcelor. Fie Γ o curbă oarecare trasată pe suprafața conică dată, $\bar{r}$ vectorul de poziție al punctului M față de reperul O și $\bar{r}_1$ vectorul de po-

---

În această lucrare se pune în legătură o curbă oarecare Γ situată pe o suprafață conică oarecare, cu curba γ de intersecție dintre această suprafață și sfera cu centrul în origine și cu raza 1. Se exprimă curbura curbei Γ cu elementele curbei γ și se obține ecuația liniilor geodezice ale suprafeței conice.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București 22—23 februarie 1964.

ziție al punctului corespunzător M_1 de pe curba γ. Dacă arc $O_1M_1 = \sigma$, atunci ecuația vectorială a curbei Γ este (1) $\bar{r} = \lambda(\sigma)\bar{r}_1$ unde $\lambda(\sigma)$ este o funcție de arcul σ.

Derivînd (1) în raport cu σ se obține:

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma} = \lambda'\bar{r}_1 + \lambda\frac{d\bar{r}_1}{d\sigma}; \quad \text{dar (2)} \quad \frac{d\bar{r}_1}{d\sigma} = \bar{t}_1,$$

deci (3) $\frac{d\bar{r}}{d\sigma} = \lambda'\bar{r}_1 + \lambda\bar{t}_1$, $\bar{t}_1$ fiind vectorul unitar purtat pe tangenta la curba (γ). Dar cum $\bar{t}_1 \perp \bar{r}_1$ rezultă (4) $\left|\frac{d\bar{r}}{d\sigma}\right| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda'^2}$. Se derivează (3) în raport cu σ și se ține seamă de (2) și de (5) $\frac{d\bar{t}_1}{d\sigma} = \frac{\bar{n}_1}{R_1}$; unde $\bar{n}_1$ este vectorul unitar purtat pe normala principală în M_1 la curba γ și R_1 raza de curbură în acest punct; se obține:

$$\frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2} = \lambda''\bar{r}_1 + 2\lambda'\bar{t}_1 + \lambda\frac{\bar{n}_1}{R_1}. \tag{6}$$

Se consideră vectorii $\bar{u} = \bar{r}_1 \times \bar{t}_1$ și $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2}$ unde

$$u = |\bar{r}_1 \times \bar{t}_1| = 1, \text{ și (7) } v = \left|\frac{d\bar{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2}\right|.$$

Produsul scalar al vectorilor $\bar{u}$ și $\bar{v}$ conduce la (8) $\cos\Theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{v}$; Θ fiind unghiul făcut de planul osculator în M la curba Γ cu planul tangent la con.

Dar

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (\bar{r}_1 \times \bar{t}_1)\cdot\left(\frac{d\bar{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2}\right)$$

sau

$$(\bar{r}_1 \times \bar{t}_1)\cdot\left(\frac{d\bar{r}}{d\sigma} \times \frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2}\right) = \begin{vmatrix} \bar{r}_1\cdot\frac{d\bar{r}}{d\sigma} & \bar{r}_1\cdot\frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2} \\ \bar{t}_1\cdot\frac{d\bar{r}}{d\sigma} & \bar{t}_1\cdot\frac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2} \end{vmatrix}$$

se ține seamă de (3) și (6) și rezultă

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\begin{vmatrix} \bar{r}_1\cdot(\lambda'\bar{r}_1+\lambda\bar{t}_1) & \bar{r}_1\cdot\left(\lambda''\bar{r}_1+2\lambda'\bar{t}_1+\lambda\dfrac{\bar{n}_1}{R_1}\right)\\ \bar{t}_1\cdot(\lambda'\bar{r}_1+\lambda\bar{t}_1) & \bar{t}_1\cdot\left(\lambda''\bar{r}_1+2\lambda'\bar{t}_1+\lambda\dfrac{\bar{n}_1}{R_1}\right)\end{vmatrix}$$

sau

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\begin{vmatrix} \lambda' & \lambda''+\lambda\dfrac{\bar{n}_1\cdot\bar{r}_1}{R_1}\\ \lambda & 2\lambda'\end{vmatrix}$$

Dar $\bar{r}\cdot\bar{t}_1=0$; derivînd acest produs scalar în raport cu σ și ținînd seamă de (2) și (5) se obține $\dfrac{\bar{r}_1\cdot\bar{n}_1}{R_1}=-1$.

de unde

$$u\cdot v=\begin{vmatrix} \lambda' & \lambda''-\lambda\\ \lambda & 2\lambda'\end{vmatrix}$$

sau

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\lambda^2+2\lambda'^2-\lambda\lambda'' \tag{10}$$

Dar cum

$$R=\frac{\left|\dfrac{d\bar{r}}{d\sigma}\right|^3}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{d\sigma}\times\dfrac{d^2\bar{r}}{d\sigma^2}\right|} \tag{11}$$

unde R este raza de curbură în punctul M al curbei Γ; ținînd seamă de (4) și (7) rezultă:

$$R=\frac{(\lambda^2+\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}{v}\quad\text{deci}\quad v=\frac{(\lambda^2+\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}{R}.$$

Din (8) și (10) se obține:

$$\frac{\cos\Theta}{R}=\frac{\lambda^2+2\lambda'^2-\lambda\lambda''}{(\lambda^2+\lambda'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

2. Desfășurînd suprafața conică pe un plan, lăsînd fixă generatoarea OO_1, atunci $\Theta=0$; λ și σ devin coordonatele polare ale unui punct curent de pe curba transformată prin desfășurarea suprafeței.

Așadar formula (11) devine

$$\frac{1}{R} = \frac{|\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''|}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sau

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''|}.$$

3. Dacă planul osculator la curba Γ este normal la suprafață, atunci $\Theta = \frac{\pi}{2}$ și ecuația diferențială a liniilor geodezice pe o suprafață conică oarecare este

$$\lambda\lambda'' - 2\lambda'^2 - \lambda^2 = 0. \tag{12}$$

Ecuația (12) se integrează prin schimbarea de funcție $\lambda = e^{\int z d\sigma}$, și rezultă

$$r = \frac{C_2 \bar{r}_1}{\cos(\sigma + C_1)}.$$

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Georges Bouligaud:* Leçons de Géométrie Vectorielle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

MECANICĂ

C. Z.: 621.827 : 621—232

CONTRIBUȚII LA TEOREMA TRIPLEI GENERĂRI A CURBEI DE BIELĂ *

N. I. MANOLESCU, GH. POPA, A. MARTINEAC

§ 1 Introducere

Se știe că o curbă bielă (traiectoria unui punct D din planul bielei unui mecanism patrulater articulat), poate fi generată de un același punct D, situat pe trei mecanisme patrulatere diferite.

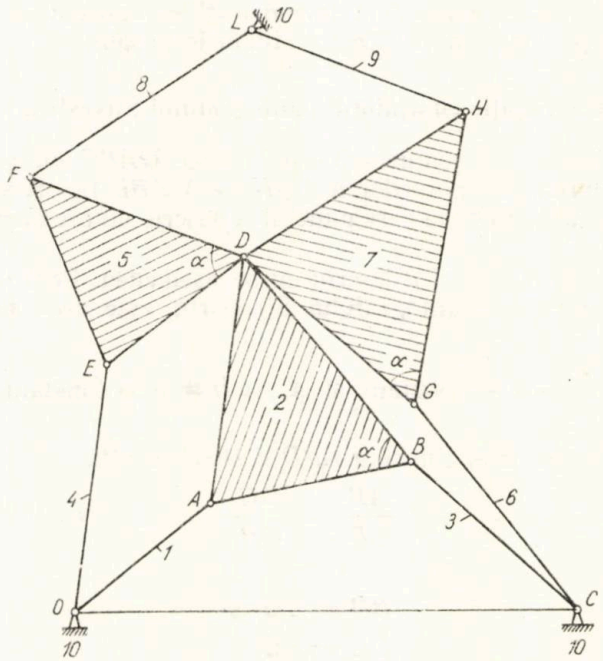


Fig. 1

Astfel traiectoria punctului D (fig. 1), poate fi generată de mecanismele patrulatere $OABC$ (D în planul bielei AB), $OEFL$ (D în planul bielei EF) și $CGHL$ (D în planul bielei GH).

Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 28—30 mai 1965.

Condițiile geometrice necesare pentru realizarea triplei generări sînt:

— $\Delta ABD \sim \Delta EDF \sim \Delta DGH$ cu unghiul α indicat pe figura 1;

— figurile: $OADE$; $CBDG$; $LFDH$ să fie paralelograme.

Cele trei mecanisme patrulatere cu punctul D comun, se realizează pornind de la mecanismul patrulater inițial $OABC$. Acesta se amplifică cu cîte o grupă assurică diada CED respectiv CGD (unde D este un punct din planul bielei AB), în poziții particulare astfel încît figurile formate, $OADE$ respectiv $CBDG$ să fie paralelograme.

Pe elementele DE respectiv GD se construiesc triunghiurile EDF și DGH, direct asemenea cu triunghiul ABD.

De articulațiile F și H se leagă încă o grupă assurică cu două brațe FLH, astfel încît figura $FDHL$, să fie de asemenea paralelogram.

Prin această construcție, punctul L este fix, oricare ar fi poziția mecanismului patrulater inițial $OABC$ în timpul ciclului cinematic.

Demonstrațiile acestei teoreme fundamentale din capitolul sintezei mecanismelor, sînt numeroase și instructive prin varietatea lor.

Se vor arăta mai jos pe scurt demonstrațiile cunoscute pînă în prezent, precum și cele pe care autorii acestui studiu le propun.

§ 2. Demonstrație cu ajutorul pantografului Silvestru. [1] [5]

Prin amplificarea mecanismului patrulater $OABC$ cu grupa assurică DGC și construirea triunghiurilor $\Delta\ DGH \sim \Delta\ ABD$ fig. 2, s-a realizat un pantograf Silvestru $CBDG$ la care punctul A descrie un arc de cerc cu centrul în O (fig. 3).

Punctele A și H (fig. 2) descriu curbe asemenea. Pentru a demonstra această proprietate a pantografului Silvestru, este deci necesar să se arate că:

$$\frac{CH}{CA} = k = \text{constant} \text{ și } \sphericalangle ACH = \alpha = \text{constant}.$$

Din asemănarea triunghiurilor ABD și DGH rezultă:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{DG}{GH}$$

Dar cum

$$BD = CG \text{ și}$$
$$DG = BC$$

(prin construcție) înlocuind se obține:

$$\frac{AB}{CG} = \frac{BC}{GH}.$$

Din fig. 2 se observă că

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CGH = 2\pi - \alpha - \sphericalangle DBC.$$

Prin urmare :

$$\Delta ABC \sim \Delta CGH$$

sau :

$$\frac{AC}{HC} = \frac{AB}{CG} = \frac{BC}{GH} = \frac{1}{k} = \text{constant}.$$

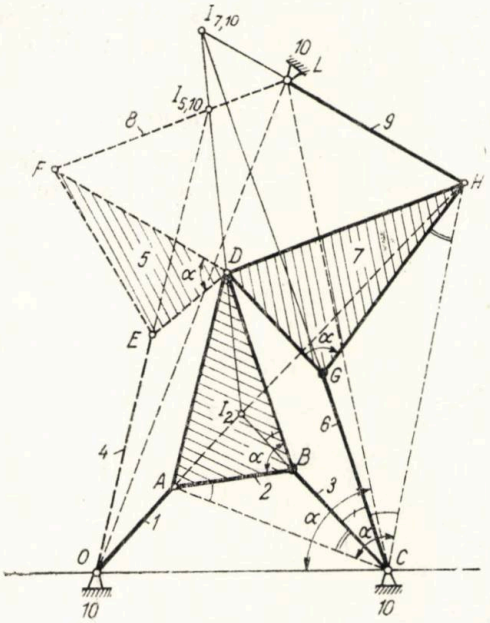


Fig. 2

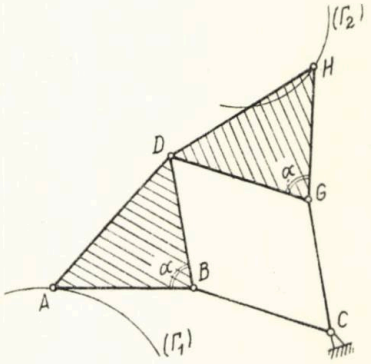


Fig. 3.

De asemenea, din figură se observă că :

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABI_2 + \sphericalangle I_2BD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCG =$$
$$= \sphericalangle BCA + \sphericalangle GCH + \sphericalangle BCG = \sphericalangle ACH = \alpha .$$

În concluzie, curba descrisă de punctul H este un cerc a cărui rază este

$$LH = k\ OA$$

și al cărui centru se află pe raza vectoare $HI_{7,10}$ unde $I_{7,10}$ este centrul instantaneu de rotație al figurii DGH. Unind pe C cu L rezultă că :

$$\Delta OAC \sim \Delta\ LHC$$

deoarece

$$\frac{OA}{LH} = \frac{AC}{HC} = \text{k, iar latura } LC \text{ este fixă.}$$

În consecință :

$$\frac{OC}{CL} = \frac{1}{k} \text{ și } \sphericalangle OCL = \alpha \text{, deci :}$$

$$\Delta OCL \sim \Delta ABD .$$

Un raționament identic se face și pentru pantograful Silvestru *OAED* construit prin amplificarea mecanismului inițial cu grupa assurică *ODE*. Se obține evident același punct fix *L*, aflat pe raza vectoare $FI_{5,10}$ unde $I_{5,10}$ este centrul instantaneu de rotație al figurii *EDF*.

— *Relații între vitezele unghiulare la pantograful Silvestru* —

Din considerațiile anterioare, rezultă că *HC* se obține din *AC* printr-o transformare de pol *C*. Considerînd un sistem de coordonate complexe cu orgina în *C*, (fig. 4) ecuația cercului descris de *A* este :

$$z_1 = z_0 + r \cdot e^{i\beta}$$

unde r = raza manivelei.

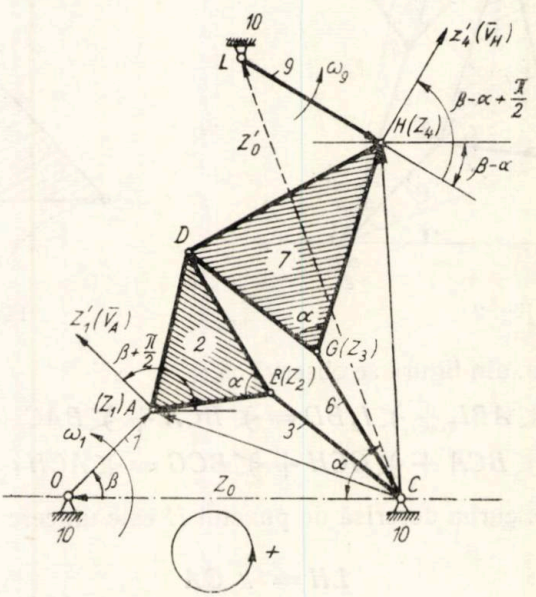


Fig. 4.

Deci

$$z_4 = az_1$$

unde :

$$a = k \cdot e^{i(-\alpha)} = \text{raportul complex de asemănare.}$$

$$z_4 = kz_0 \cdot e^{i(-\alpha)} + k \cdot r \cdot e^{i(\beta-\alpha)} = z_0' + k \cdot r \cdot e^{i(\beta-\alpha)}.$$

Punctelor de pe mecanism le corespund afixele :

$$A(z_1) \quad B(z_2) \quad G(z_3) \quad H(z_4) \quad O(z_0) \quad L(z'_0).$$

Traiectoria punctului H este evident un cerc cu afixa centrului z'_0.
Derivînd se obține :

$$z'_1 = r \cdot \omega_1 \cdot i \cdot e^{i\beta} = r \cdot \omega_1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} \longrightarrow [\bar{v}_A]$$

$$z'_4 = r \cdot \omega_1 \cdot i \cdot e^{i(\beta-\alpha)} \cdot k = r \cdot \omega_1 \cdot k \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right)} \rightarrow [\bar{v}_H]$$

unde pentru vectorii rotitori complexi corespund modulele.

$$|z'_1| = OA \cdot \omega_1 \; ; \; |z'_4| = k \cdot OA \cdot \omega_1 = LH \cdot \omega_1$$

Fig. 4 arată că sensurile lui ω_1 și ω_9 coincid.
Prin urmare între vitezele unghiulare instantanee, există relațiile :

$\omega_1 \equiv \omega_9$ pantograf 1 $[BDGCAH]$
$\omega_3 \equiv \omega_8$ pantograf 2 $[EDA\ FB]$
$\omega_4 \equiv \omega_6$ pantograf 3 $[LFDHEG]$

fig. 5

Întrucît și sensurile coincid, putem scrie :

$$i_{19} = \frac{\omega_1}{\omega_9} = +1$$

$$i_{38} = \frac{\omega_3}{\omega_8} = +1$$

$$i_{46} = \frac{\omega_4}{\omega_6} = +1$$

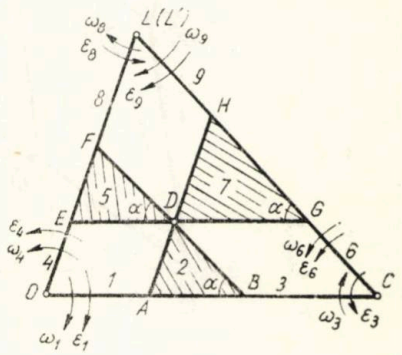


Fig. 5

În concluzie curbele omotetice Γ_1 și Γ_2 fig. 3 sînt parcurse de elementele finale ale pantografului Silvestru cu viteze unghiulare egale ca modul și sens.

§ 3. Demonstrație cu ajutorul metodei asemănării exprimată prin numere complexe [6]

Se consideră un sistem de coordonate complexe cu origina în D fig. 6. Afixele articulațiilor mecanismului se notează după cum urmează :

$$D(0) \quad A(z_1) \quad B(z_2) \quad E(z_3) \quad F(z_4) \quad G(z_5) \quad H(z_6).$$

Afixele triunghiului OCL format de articulațiile fixe O și C vor fi în acest caz :

$$0(z_1+z_3) \quad C(z_2+z_5) \quad L(z_4+z_6).$$

În lucrarea [6], utilizînd acest sistem este prezentată o demonstrație pornind de la exprimarea asemănării între două triunghiuri sub forma de determinant.

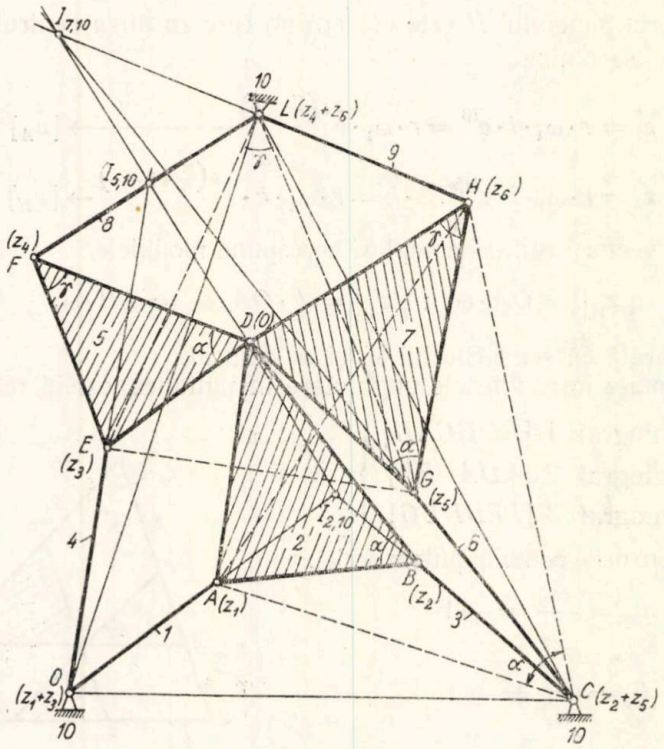


Fig. 6

În ce'e de mai jos se dă o demonstrație mult simplificată, după cum urmează

$$\Delta ABD \sim \Delta DEF \sim \Delta DGH ,$$

sau

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ z_3 & 0 & z_4 \\ 0 & z_5 & z_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ținînd seamă de proprietățile determinanților, se adună la linia 1 liniile 2 și 3 și se obține determinantul :

$$\begin{vmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_5 & z_4 + z_6 \\ z_3 & 0 & z_4 \\ 0 & z_5 & z_6 \end{vmatrix} = 0$$

adică :

$$\Delta OCL \sim \Delta EDF \sim \Delta DGH$$

deci și

$$\Delta OCL \sim \Delta ABD .$$

Triunghiul OCL are baza OC fixă și este asemenea cu o figură invariabilă în mișcare, triunghiului ABD.

Punctul L este deci fix, iar teorema triplei generări este demonstrată, întrucît punctul D face concomitent parte din planele 2,5 și 7 ale mecanismelor patrulatere $OABC$, $OEFL$, $CGHL$.

§ 4. Demonstrație de sinteză [5]

Se pornește de la ideia dezvoltării pantografului $LFDHGE$ tip Silvestru fig. 6.

În cazul acestei pantograf punctele E și G descriu curbe omotetice, rotite între ele cu unghiul constant γ deoarece :

$$\Delta EFD \sim \Delta DHG \sim \Delta ELG .$$

În consecință, dacă articulația E descrie un arc de cerc cu centrul într-un punct oarecare O, atunci articulația G descrie deasemeni un cerc cu centrul într-un punct C, astfel încît :

$$\frac{EO}{GC} = \frac{EL}{GL} = k' ,$$

iar cele două raze vectoare OE și CG fac între ele unghiul constant γ.

Avem astfel dubla generare a curbei de bielă descrisă de punctul D, care aparține în același timp celor două plane ale bielelor EF și GH din mecanismele patrulatere $OEFL$ respectiv $CGHL$. În continuare se poate construi un nou pantograf Silvestru, prin formarea paralelogramului $CGDB$ și determinarea punctului A din planul elementului BD astfel încît :

$$\Delta ABD \sim \Delta DGH .$$

Punctul A va descrie deasemeni un arc de cerc rotit față de cel al punctului H cu unghiul α. Centrul acestui cerc se va găsi pe o dreaptă care pleacă din C și face unghiul α cu dreapta CL.

Punctul O, centrul acestei cerc se va lua astfel încît :

$$\frac{CL}{CO} = \frac{CH}{CA} = \frac{DB}{AB} = k .$$

Articulînd în A și O o bară, se obține un al treilea mecanism patrulater $OABC$, al cărui punct de bielă D va descrie aceiași curbă bielă ca a punctului D aparținînd planelor 5 și 7. S-a creiat astfel mecanismul Roberts-Cebîșev.

§ 5. Demonstrație cu ajutorul vectorilor exprimați în planul complex [2]

După amplificarea mecanismului patrulater inițial $OABC$ cu cele 3 grupe assurice și formarea celor trei paralelograme caracteristice, se va căuta expresia în numere complexe a lungimii CL, luîndu-se ca axă Ox axa OC și ca axă y perpendiculară în C la OC (fig. 7).

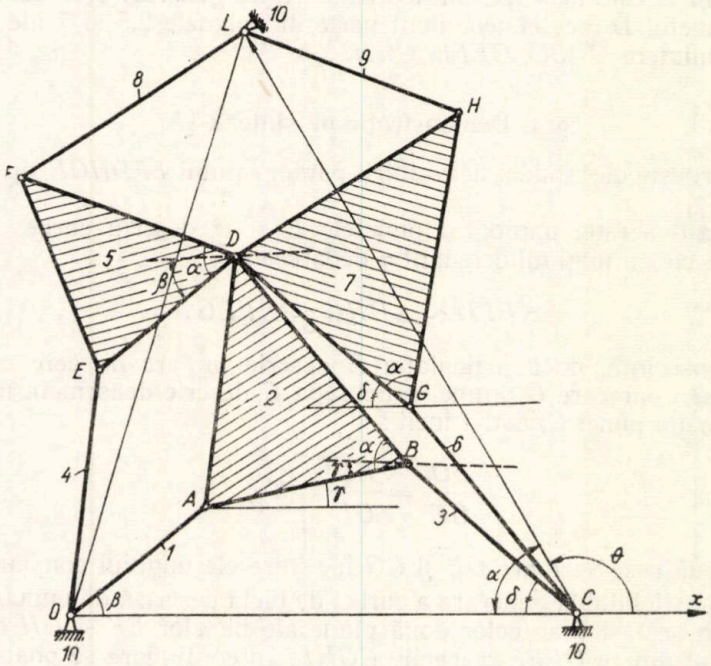


Fig. 7

Egalitatea vectorială :

$$\overline{CL} = \overline{CG} + \overline{GH} + \overline{HL} \quad \text{devine :}$$

$$CL \cdot e^{i\theta} = CG \cdot e^{i(\pi-\alpha+\gamma)} + GH \cdot e^{i(\pi-\alpha-\delta)} + HL \cdot e^{i(\pi-\alpha+\beta)}$$

sau :

$$CL \cdot e^{i\theta} = e^{i(\pi-\alpha)} \cdot [BD \cdot e^{i\gamma} + GH \cdot e^{-i\delta} + DF \cdot e^{i\beta}] .$$

Dar :

$$BD = k\,AB \quad \text{și deasemeni} \quad \Delta ABD \sim \Delta DGH \sim \Delta EDF ,$$

deci în mod analog :

$$GH = k\,GD = k\,BC$$

$$DF = k\,ED = k\,OA$$

Inlocuind se obține :

$$CL \cdot e^{i\theta} = k \cdot e^{i(\pi-\alpha)} \cdot [OA \cdot e^{i\beta} + AB \cdot e^{i\gamma} + BC \cdot e^{-i\delta}] = k \cdot OC \cdot e^{i(\pi-\alpha)}$$

deoarece :

$$OA \cdot e^{i\beta} + AB \cdot e^{i\gamma} + BC \cdot e^{-i\delta} = \overline{OC}.$$

In consecință :

$$CL = k\,OC = \text{constant}$$

$$\theta = \pi - \alpha = \text{constant}$$

Rezultă că punctul L este fix în plan indiferent de valorile pe care le iau unghiurile β, γ și δ adică de poziția mecanismului în timpul ciclului cinematic.

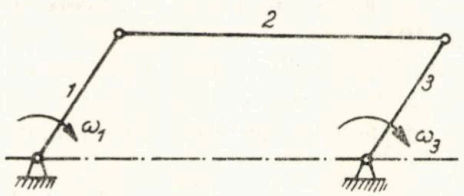
Din relațiile anterioare rezultă deasemeni că :

$$\Delta\, OCL \sim \Delta\, ABD.$$

§ 6. Demonstrație prin patrulatere Roberts [3] [4]

Se știe că în general cînd două elemente legate la bază au aceiași viteză unghiu'ară, între ele există un raport de transformare a mișcării $i = +1$ (asociind și noțiunea de sens).

Acest raport este realizat la mecanismul paralelogram fig. 8. Același lucru se poate însă realiza și la un mecanism cu opt elemente. Mecanismul



$\omega_1 \equiv \omega_3$ [$i = +1$]

Fig. 8.

se compune din : un patrulater inițial $OABC$, sau patrulater Roberts (fig. 9) cu biela 2, la al cărui punct de bielă D sînt legate diadele OED și CFD în poziții particulare. Între elementele mecanismului există următoarele relații :

$$OE = AD \quad ; \quad OA = ED$$

$$FD = BC \quad ; \quad FC = BD.$$

Iau naștere în felul acesta două conture paralelograme $OAED$ și $DBCF$. Trebuie demonstrat că vitezele unghiulare ω_{58} și ω_{78} sînt egale, indiferent de poziția mecanismului în timpul ciclului cinematic, adică există raportul de transformare :

$$i_{57} = \frac{\omega_{58}}{\omega_{78}} = +1.$$

Cunoscînd poziția centrului instantaneu de rotație [5,7], raportul distanțelor între acest centru și axele de rotație corespunzătoare vitezelor unghiulare ω_{58} și ω_{78} este invers raportului de transformare i_{57}.

Se va determina poziția acestui pol, folosind teorema celor 3 C.I.R. Se notează centrele instantanee cunoscute cu 2 cifre (care corespund celor 2

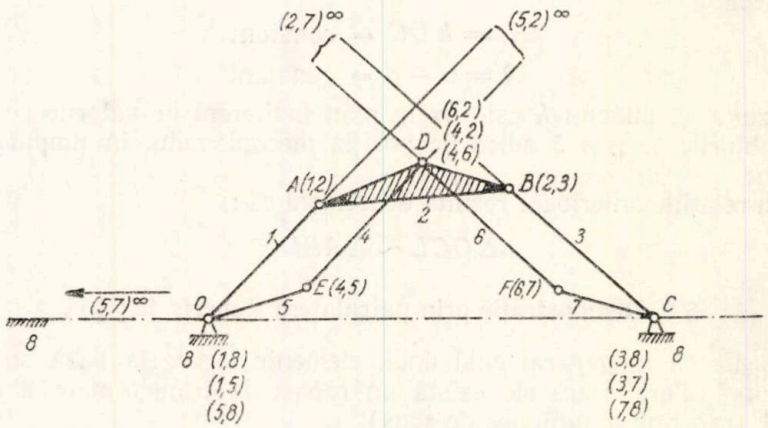


Fig. 9.

elemente ce formează polul.). Se figurează pe un cerc elementele mecanismului, inclusiv baza (fig. 10).

Polurile cunoscute inițial prin legăturile lanțului care formează mecanismul se figurează prin linii care unesc vîrfurile poligonului înscris. Schema dă toate cele N C.I.R. existente la acest mecanism, unde :

$$N = \frac{e\,(e-1)}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ C. I. R.}$$

sub forma lanțurilor unui poligon stelat (fig. 10).

Folosind teorema colinearității celor 3 C.I.R. un centru instantaneu se obține ca diagonală a unui patrulater inscriptibil. Cele două triunghiuri separate de diagonala patrulaterului, constituie dreptele de eliminare la intersecția cărora se găsește C.I.R. căutat.

În cazul schemei din fig. 10. :

$$(5,8,7) \longrightarrow \Delta_1\,(5,7)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Patrulaterul} & (5,4,2) \\ [1,2,4,5] & (5,1,2) \end{array}\right\} \rightarrow (5,2)\infty \Bigg\} \rightarrow \Delta_2\,(5,7)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Patrulaterul} & (7,6,2) \\ [2,3,7,6] & (7,3,2) \end{array}\right\} \rightarrow (7,2)\infty \Bigg\}$$

Polul căutat [5, 7], apare deci ca punct de intersecție al bazei 8 cu o dreaptă care unește 2 puncte la infinit. Centrul instantaneu [5, 7] se găsește la infinit pe dreapta de bază *OC*, iar raportul de transformare între elementele 5 și 7, $i_{5,7} = +1$.

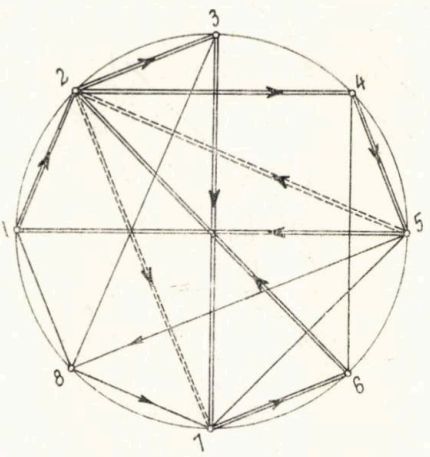


Fig. 10

În lucrarea [4] se observă că mecanismul triplei generări conține 3 mecanisme cu 8 elemente (fig. 11):

OABC amplificat cu diadele *OED* și *CGD*

CGHL amplificat cu diadele *CGB* și *LFD*

OEFL amplificat cu diadele *OAD* și *LHD*.

Prin urmare, o curbă de bielă poate fi generată de 6 mecanisme plane articulate: 3 mecanisme patrulatere *OABC*, *OEFL* și *CGHL*, (numite patrulatere ROBERTS) și 3 mecanisme cu 8 elemente, obținute prin amplificare.

Vitezele unghiulare ale elementelor care converg în articulațiile fixe ale mecanismului *OCL* sînt egale două cîte două (fig. 5.).

Această triplă egalitate a fost pînă acum menționată numai în unele cazuri:

$$\omega_1 \equiv \omega_9$$

$$\omega_3 \equiv \omega_8$$

$$\omega_4 \equiv \omega_6$$

Cu aceste observații, se poate demonstra că punctul *L* este fix. Presupunem inițial că articulațiile (8, 10) (9, 10) sînt separate și că elementele 8 și 9 sînt articulate în *L*. În mecanismul cu 8 elemente [*OABC* + *OEDGC*] centrul instantaneu (4, 6) se găsește la infinit pe dreapta $\triangle_1$ (fig. 12).

Analog în mecanismul $[OEF'L' + OADHL']$ centrul instantaneu (9, 1) se găsește la infinit pe dreapta Δ_2, iar în mecanismul $[CGH'L'' + CBDFL'']$ centrul instantaneu (8, 3) se găsește la infinit pe dreapta Δ_3 (fig. 12)

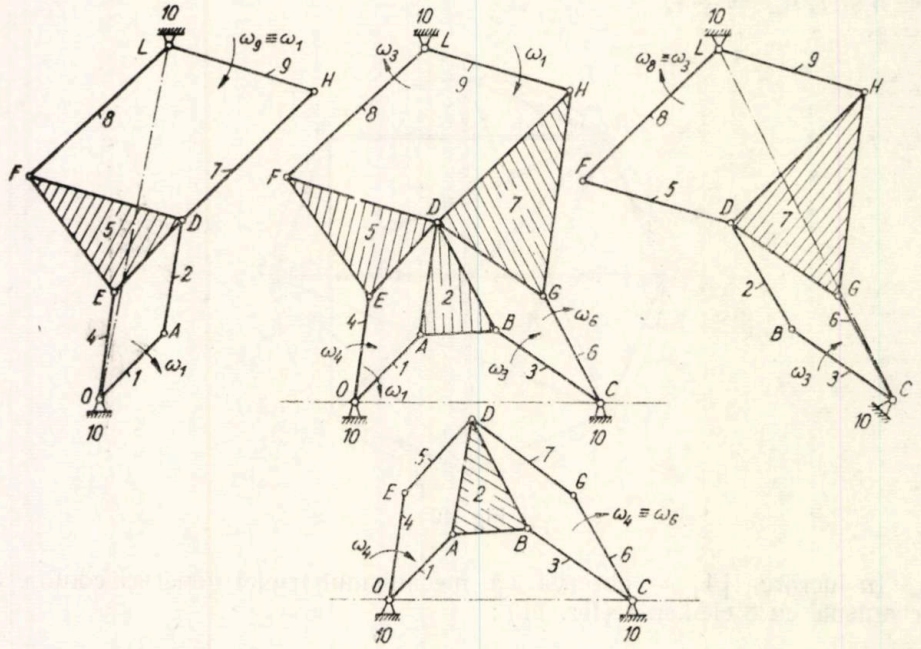


Fig. 11.

Aplicînd teorema coliniarității celor 3 C.I.R., pentru grupul de elemente (8, 9, 1) rezultă :

$$(8,9,1) \rightarrow (8,9) \quad (8,1) \quad (9,1)$$

Întrucît centrul (9, 1), conform celor enunțate anterior se găsește obligatoriu pe dreapta Δ_2, centrele (8, 9) și (8,1) se găsesc tot pe Δ_2.

Pe Δ_2 se găsesc deci următoarele centre instantanee :

$$(8,1) \quad (9,1) \quad (10,1) \quad (8,10) \quad (8,9)$$

$$\downarrow$$

$$(9,10)$$

Deci centrele instantanee (9, 10) și (8, 10) se găsesc pe Δ_2. Printr-un raționament analog, din grupul de elemente (8, 9, 3) rezultă centrele (8, 9) (8, 3) (9, 3) care se găsesc pe direcția Δ_3.

Pe Δ_3 se găsesc deci :

$$(8,3) \quad (9,3) \quad (9,10) \quad (3,10) \quad (8,9)$$

$$\downarrow$$

$$(8,10)$$

Prin urmare (9, 10) și (8, 10) se găsesc și pe Δ_3.

Întrucît (8, 9) se găsește atît pe Δ_2 cît și pe Δ_3 acestea vor fi obligate să treacă prin punctul presupus mobil L.

Dar deoarece Δ_2 și Δ_3 conțin cîte o direcție (8, 10) și (9, 10), evident că centrele instantanee (8, 10) și (9, 10) se găsesc tot în L.

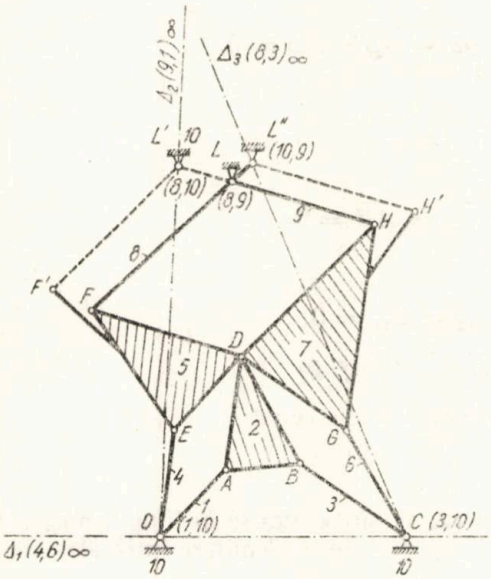


Fig. 12

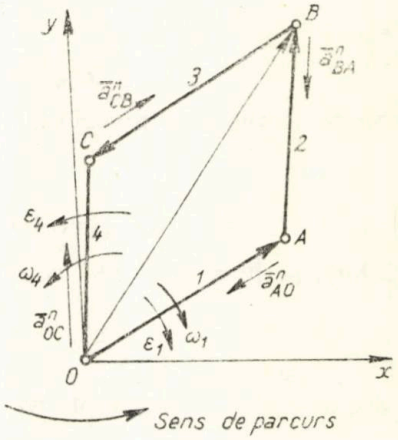


Fig. 13

Întrucît demonstrația nu a inclus parametrii cinematici sau dimensionali, punctul L este fix indiferent de poziția mecanismului, deci este un centru instantaneu permanent fix de rotație.

§ 7. Demonstrație folosind planul vitezelor rabătute.

Fie un paralelogram deformabil și un sistem rectangular cu originea în punctul O al conturului (fig. 13). Pentru a studia pozițiile relative ale rigidelor ce compun sistemul în timpul mișcării, se utilizează ecuațiile : [7]

$$\begin{aligned} \Sigma\, \bar{\omega}_{ij} &= 0 \\ \Sigma\, \bar{v}_{Aij} + \Sigma\, \bar{\omega}_{i0} \times \overline{A_i B_i} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

unde :

$\bar{v}_{Aij}$ — viteza relativă de translație pe o direcție oarecare

$\bar{\omega}_{ij}$ — rotația relativă între elementele i și j

Înlocuind rezultă :

$$\bar{\omega}_1 \times \overline{OA} + \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BC} + \bar{\omega}_4 \times \overline{CO} = 0 \qquad \boxed{\Sigma \bar{v}_{Aij} = 0}$$

$$\overline{AB} = -\overline{CO}$$

$$\overline{OA} = -\overline{BC}$$

$$(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_3) \times \overline{OA} + (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_4) \times \overline{AB} = 0.$$

Ținînd seamă de relația generală :

$$\bar{\omega}_{ij} = \bar{\omega}_{j0} + \bar{\omega}_{ij}$$

rezultă

$$\bar{\omega}_{13} \times \overline{OA} + \bar{\omega}_{24} \times \overline{AB} = 0.$$

soluția acestei ecuații vectoriale este :

$$\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{24} = 0 \qquad (2)$$

(în orice caz $\overline{OA}$; $\overline{AB} \neq 0$)

Soluția verifică sistemul (1), căci verifică ambele ecuații (1)

Concluzii :

1. elementele (1, 3) și deasemeni (2, 4) sînt conduse în timpul mișcării paralel (nu apar rotații relative), deci raportul de transmitere între ele este :

$$i_{ij} = +1$$

2. întrucît în decursul demonstrației noțiunea de element sau punct fix nu a fost folosită, punctul O servind numai ca origină a sistemului, corespondența vitezelor unghiulare devine biunivocă, indiferent de locul în mecanism al acestui contur.

Aplicînd același contur paralelogram sistemul de ecuații [7] :

$$\Sigma \bar{\varepsilon}_{ij} + \Sigma \bar{\omega}_{j0} \times \bar{\omega}_{ij} = 0$$

$$\Sigma \bar{a}^{r_n}_{Aij} + \Sigma \bar{a}^{r_t}_{Aij} + \Sigma \bar{a}^{C}_{Aij} + \Sigma \bar{\varepsilon}_{ij} \times \overline{A_i B_i} + \Sigma \bar{\omega}_{i0} \times (\bar{\omega}_{i0} \times \overline{A_i B_i}) = 0 \qquad (3)$$

și ținînd seamă că :

nu avem decît cuple de rotație

$$\begin{cases} \Sigma \bar{a}^{r_n}_{A_{ij}} = \Sigma \bar{a}^{r_t}_{A_{ij}} = 0 \\ \Sigma \bar{a}^{C}_{A_{ij}} = 0 \end{cases}$$

rezultă :

$$\begin{cases} \Sigma \bar{\varepsilon}_{ij} + \Sigma \bar{\omega}_{j0} \times \bar{\omega}_{ij} = 0 \\ \Sigma \bar{\varepsilon}_{ij} \times \overline{A_i B_i} + \Sigma \bar{\omega}_{i0} \times (\bar{\omega}_{i0} \times \overline{A_i B_i}) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Din (4) se poate dezvolta :

$$\bar{\varepsilon}_{14} \times \overline{OA} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{AB} + \bar{\varepsilon}_{32} \times \overline{BC} + \bar{\varepsilon}_{43} \times \overline{CO} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{OA}) + \\ + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{AB}) + \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{BC}) + \bar{\omega}_4 \times (\bar{\omega}_4 \times \overline{CO}) = 0$$

dar :

$$\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \overline{OA}) = -\omega_1^2 \cdot \overline{OA} = \bar{a}_{AO}^n$$

$$\bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overline{AB}) = -\omega_2^2 \cdot \overline{AB} = \bar{a}_{BA}^n$$

$$\bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \overline{BC}) = -\omega_3^2 \cdot \overline{BC} = \bar{a}_{CB}^n = -\bar{a}_{AO}^n$$

$$\bar{\omega}_4 \times (\bar{\omega}_4 \times \overline{CO}) = -\omega_4^2 \cdot \overline{CO} = \bar{a}_{OC}^n = -\bar{a}_{BA}^n$$

Deci și :

$$\Sigma \bar{\omega}_{i0} \times (\bar{\omega}_{i0} \times \overline{A_i B_i}) = 0 .$$

Rezultă prin urmare :

$$(\bar{\varepsilon}_{14} - \bar{\varepsilon}_{32}) \times \overline{OA} + (\bar{\varepsilon}_{21} - \bar{\varepsilon}_{43}) \times \overline{AB} = 0 .$$

Soluția unică a acestei ecuații vectoriale este :

$$\bar{\varepsilon}_{14} = \bar{\varepsilon}_{32} \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{43} . \tag{5}$$

Dar

$$\bar{\varepsilon}_{14} = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_4 - \bar{\omega}_4 \times \bar{\omega}_{14}$$

conform formulei generale

$$\bar{\varepsilon}_{i0} = \bar{\varepsilon}_{j0} + \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\omega}_{j0} \times \bar{\omega}_{ij}$$

unde :

$$\bar{\omega}_4 \times \bar{\omega}_{14} = 0 \quad \text{(vectorii } \bar{\omega}_4 \text{ și } \bar{\omega}_{14} \text{ colineari)}$$

$$\bar{\varepsilon}_{14} = \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_4 \tag{6}$$

analog

$$\bar{\varepsilon}_{32} = \bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_2 .$$

Ținînd seama de (6) rezultă :

$$\bar{\varepsilon}_{14} = \bar{\varepsilon}_{32} \quad \text{sau} \quad \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_4 = \bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_2 . \tag{7}$$

Analog rezultă din (5) :

$$\bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{43} \quad \text{sau} \quad \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_4 - \bar{\varepsilon}_3 . \tag{8}$$

Soluția ecuației vectoriale devine deci :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 + \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_4 = \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 . \end{cases} \tag{9}$$

Adică :

$$\bar{\varepsilon}_1 \equiv \bar{\varepsilon}_3 \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_2 \equiv \bar{\varepsilon}_4 .$$

Considerînd un mecanism de triplă generare (fig. 14), acesta se compune din trei contururi de paralelograme : *OADE*, *CBDG* și *LFDH*. Apar, conform demonstrației anterioare, egalitățile evidente :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{\omega}_9 \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_9 \\ \bar{\omega}_3 &= \bar{\omega}_8 \quad ; \quad \bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_8 \\ \bar{\omega}_4 &= \bar{\omega}_6 \qquad \bar{\varepsilon}_4 = \bar{\varepsilon}_6 \end{aligned} \tag{10}$$

precum și legăturile cinematice care duc la apariția acestor egalități :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_5 = \omega_9 \\ \omega_3 &= \omega_7 = \omega_8 \\ \omega_4 &= \omega_2 = \omega_6 . \end{aligned} \tag{11}$$

Se construiește, pentru mecanismul din (fig. 14), poligonul vitezelor rabătute la o scară arbitrară $k_v = \left[\frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}\right]$ conform ecuațiilor vectoriale :

$$\frac{\overrightarrow{v_B}}{//BC} = \overrightarrow{v_A} + \frac{\overrightarrow{v_{BA}}}{//AB} \quad ; \quad \frac{\overrightarrow{v_E}}{//DE} = \overrightarrow{v_D} + \frac{\overrightarrow{v_{ED}}}{//DE} \quad ; \quad \frac{\overrightarrow{v_G}}{//CG} = \overrightarrow{v_D} + \frac{\overrightarrow{v_{GD}}}{//DG}$$

Omologul punctului D se află folosind teorema asemănării :

$$\Delta ABD \sim \Delta abd$$

cu raportul complex de asemănare :

$$k = \omega_2 \cdot i \cdot = \omega_2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \omega_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

Vitezele punctelor H și F se află deasemeni prin asemănare.
În planul mecanismului există directa asemănare între triunghiurile :

$$\Delta ABD \sim \Delta EDF \sim \Delta DGH .$$

Considerînd un sistem de coordonate complexe cu origina în punctul D. (fig. 13) și notînd afixele :

$$A(z_1) \quad B(z_2) \quad E(z_3) \quad G(z_4) \quad H(z_5) \quad F(z_6) .$$

se poate scrie :

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ z_3 & 0 & z_6 \\ 0 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Conform teoremei asemănării, evident că :

$$\Delta abd \sim \Delta edf \sim \Delta dgh \quad \text{(fig. 15 a)}. \tag{13}$$

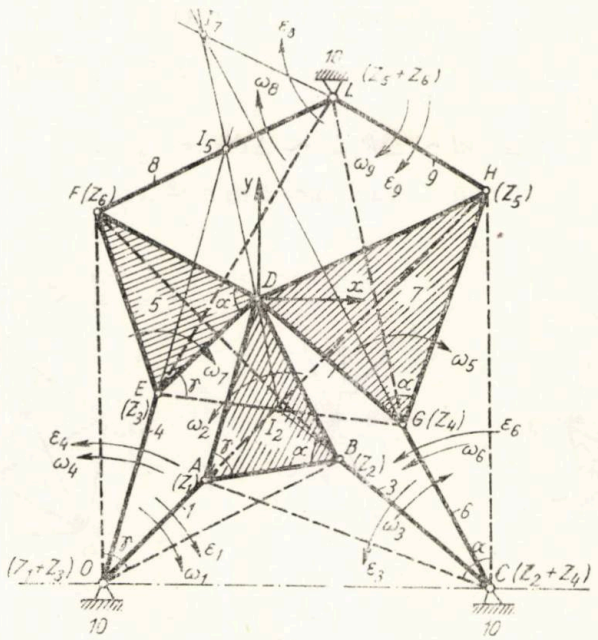


Fig. 14

sau :

$$\begin{vmatrix} z'_1 & z'_2 & 0 \\ z'_3 & 0 & z'_6 \\ 0 & z'_4 & z'_5 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Relația (14) reprezintă relația (12) transpusă în planul vitezelor, prin derivare. Noii origini, situată în „d" îi corespund afixele derivate :

$$a(z'_1) \quad b(z'_2) \quad d(0) \quad e(z'_3) \quad g(z'_4) \quad h(z'_5) \quad f(z'_6).$$

Operînd asupra determinantului (14) rezultă :

$$\begin{vmatrix} z'_1 + z'_3 & z'_2 & z'_6 \\ z'_3 & z'_4 & z'_5 + z'_6 \\ z'_1 & z'_2 + z'_4 & z'_5 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Determinantul (15) indică directa asemănare a triunghiurilor

$$\Delta P_v bf \sim \Delta egl \sim \Delta a P_v h.$$

Evident că :

$$(z'_1 + z'_3) \text{ se află în } P_v \text{ căci } \overline{v_0} = 0$$

$$(z'_2 + z'_4) \text{ se află în } P_v \text{ căci } \overline{v_c} = 0$$

Trebuie să demonstrăm că și $(z'_5 + z'_6)$ adică $\overline{v_L}$ se află în P_v.
Din (14) și (15) rezultă că :

$$\Delta abd \sim \Delta P_v bf \sim \Delta edf \sim \Delta egl$$

$$\Delta abd \sim \Delta aP_v h \sim \Delta dgh \sim \Delta egl .$$

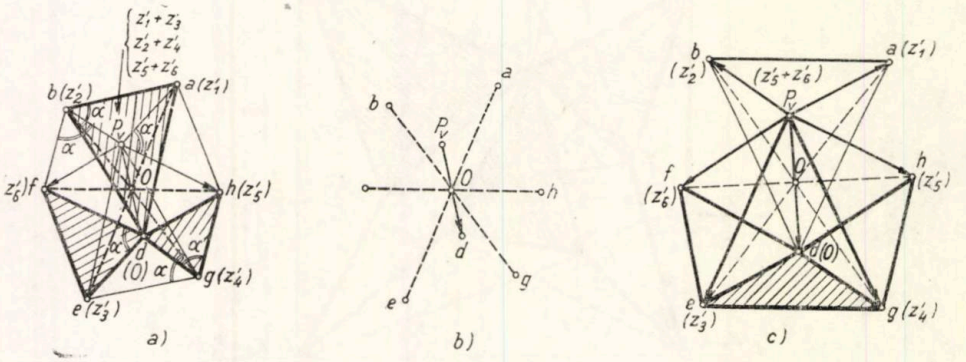


Fig. 15

Deci Δegl se poate obține din Δabd prin 3 transformări plane de poli :

$$b(z'_2) \quad f(z'_6) \quad e(z'_3) \quad \text{sau} \quad a(z'_1) \quad h(z'_5) \quad g(z'_4).$$

Din relațiile între lungimile elementelor mecanismului, rezultă :

$$\Delta P_v bf = \Delta dgh \quad [dh = P_v f]$$

$$\Delta edf = \Delta aP_v h \quad [ed = P_v a]$$

Deci transformările de poluri $b \leftrightarrow g$ $a \leftrightarrow e$ sînt identice și simetrice cu centrul de simetul în O (fig. 15 a) la $\frac{(P_v d)}{2}$ (intersecția diagonalelor paralelogramelor $P_v eda$ și $P_v bdg$).

Atunci și transformările $f \leftrightarrow h$ admit același centru de simetrie O, pentrucă sînt transformări intermediare.

Deci dreapta $(\overline{fh})$ trece prin O și evident atunci $(z'_5 + z'_6)$, adică $\overline{v_L}$ se găsește în $P\overline{v}$.

In consecință $\boxed{\overline{v_L} = 0}$ independent de parametrii numerici de poziție și deci L este un centru permanent fix de rotație.

NOTĂ. Pornind de la conturul deformabil *LFDHL* (fig. 14) ca bază de amplificare se poate face o demonstrație de sinteză cu ajutorul planului vitezelor rabătute.

Se construiesc admițînd o viteză $(P_v d)$ arbitrară, vitezele a trei contururi deformabile, după tipul de ecuație :

$$\underline{\underline{v_D}} = \underset{//FL}{\underline{v_F}} + \underset{//DF}{\underline{v_{DF}}} \quad (v_L = 0) \quad \text{(fig. 15 c)}.$$

Legătura între contururile paralelogramelor este realizată de figurile :

$$(edf)\ ,\ (dgh) \text{ și } (abd).$$

Dar

$$\Delta egd = \Delta b P_v a \ [\sphericalangle b P_v a = \sphericalangle edg \qquad ed = P_v a \text{ și } dg = P_v b].$$

ca unghiuri cu laturile paralele.

Deci

$$\boxed{\Delta abd = \Delta e P_v g .}$$

Trebuie deci găsite relațiile între triunghiurile: *edf, dhg, $eP_v g$,* pentruca vîrfurile lor să formeze un paralelogram (fig. 15 c).

Considerînd un sistem de coordonate complexe cu origina în „*d*" și notînd afixele ca în figură, dacă este realizată condiția :

$$\begin{vmatrix} z'_3 & z'_5 + z'_6 & z'_4 \\ z'_3 & z'_6 & 0 \\ 0 & z'_5 & z'_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

atunci :

$$\Delta efd \sim \Delta e P_v g \sim \Delta dhg . \qquad (17)$$

Determinantul (16) se mai poate scrie :

$$z'_3 \cdot z'_4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & z'_5 + z'_6 & 1 \\ 1 & z'_6 & 0 \\ 0 & z'_5 & 1 \end{vmatrix} = z'_3 \cdot z'_4 \cdot \Delta = 0 .$$

La acest determinant linia 1 este o consecință a celorlalte două, deci :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & z'_5 + z'_6 & 1 \\ 1 & z'_6 & 0 \\ 0 & z'_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și relația (17) este demonstrată.

Figurile invariabile de legătură trebuie deci să fie triunghiuri directe asemenea :

$$\boxed{\Delta ABD \sim \Delta EDF \sim \Delta DGH}$$

§ 8. Demonstrație prin teorema celor trei C.I.R. *

§ 8.1. Folosind teorema celor trei C.I.R. pornind de la centrele permanente mobile de rotație se va căuta determinarea C.I.R. (8, 10) și C.I.R. (9, 10). Plecînd de la mecanismul patrulater (de bază) *OABC*, luînd în planul bielei *AB* un punct, *D* și amplificînd mecanismul cu diade se obțin celelalte două mecanisme (*OEFL* și *CGHL*) care descriu aceeași curbă de bielă (traiectoria punctului *D*).

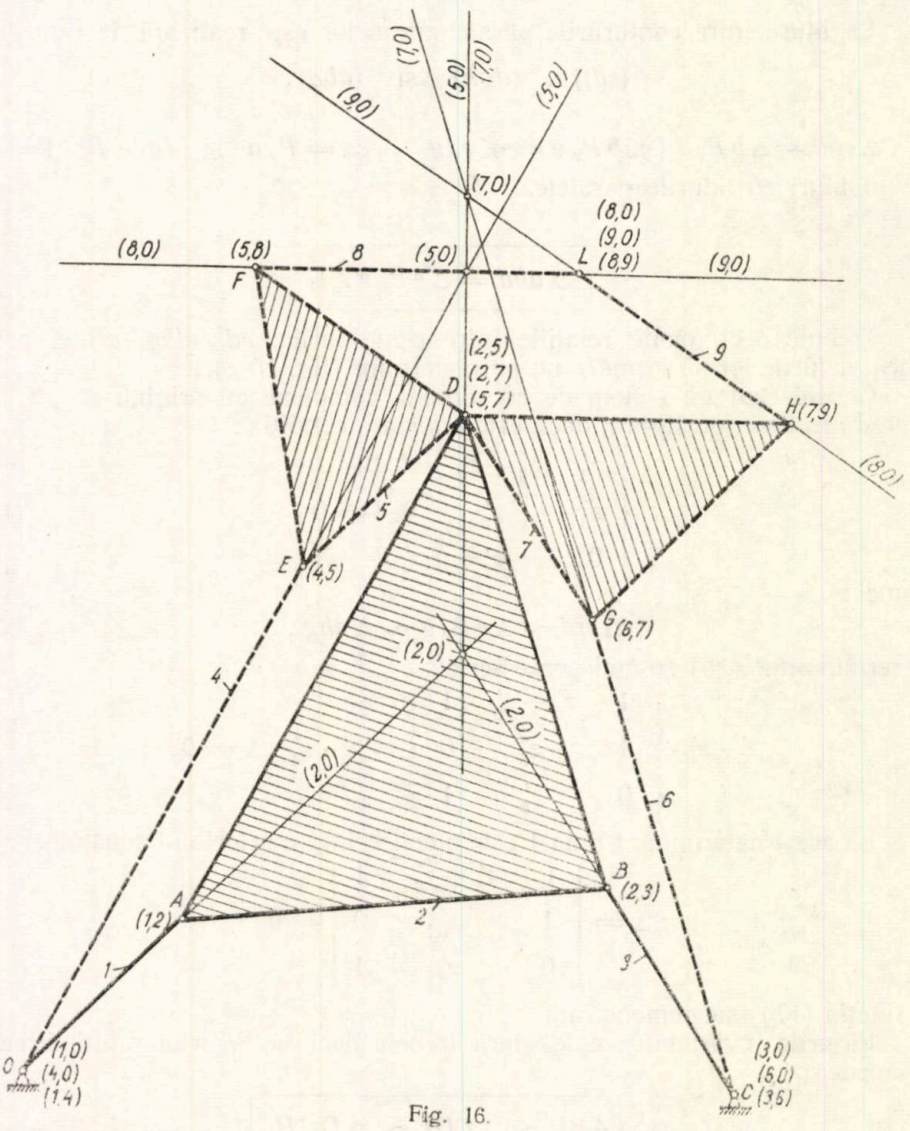


Fig. 16.

* În fig. 16, 17 și 18 elementul fix (10) este notat cu 0 (zero).

Mecanismul în ansamblu este acum compus din 10 elemente :
Numărul total de C.I.R. va fi :

$$N_{\text{C. I. R.}} = \frac{n \cdot e}{2}$$

în care :

e — numărul total de elemente ;
n — numărul de elemente mobile $= e-1$;
Făcînd înlocuirile rezultă :

$$N = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ C.I.R.}$$

care pot fi scrise sub forma :

[1, 10]	(2, 10)	[3, 10]	[4, 10]	(5, 10)	[6, 10]	(7, 10)	{8, 10}	{9, 10}
	[1, 2]	(1, 3)	[1, 4]	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)	(1, 9)
		[2, 3]	(2, 4)	[2, 5]	(2, 6)	[2, 7]	(2, 8)	(2, 9)
			(3, 4)	(3, 5)	[3, 6]	(3, 7)	(3, 8)	(3, 9)
				[4, 5]	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)	(4, 9)
					(5, 6)	[5, 7]	[5, 8]	(5, 9)
						[6, 7]	(6, 8)	(6, 9)
							(7, 8)	[7, 9]
								[8, 9]

Se cunosc de la început 16 centre permanente fixe și mobile de rotație (paranteza [ ]) și se cere determinarea C.I.R. (8, 10) și C.I.R. (9, 10).
Luînd C.I.R. două cîte două rezultă :

1) Din : $(1,10)\ (1,2) \rightarrow (2,10)$
$(3,10)\ (2,3) \rightarrow (1,3)$

2) Din : $(6,10)\ (6,7) \rightarrow (7,10)$
$(2,10)\ (2,7) \rightarrow (?,6)$

3) Din : (7, 9) (7, 10) rezultă dreapta Δ (9,10) $(\overline{LH})$

4) Din : $(4,10)\ (4,5) \rightarrow (5,10)$
$(2,10)\ (2,5) \rightarrow (4,2)$

5) Din : (5, 10) și (5, 8) rezultă dreapta Δ (8, 10) ($\overline{FL}$).

Cunoscînd acum dreptele pe care se află C.I.R. (8, 10) și C.I.R. (9, 10) intersecția lor determină C.I.R. (8,9).

Dacă acum :

6) Se unește C.I.R. (8,9) cu (8, 10) rezultă dreapta Δ' (9,10) ($\overline{FL}$).

7) Deasemenea C.I.R. (8, 9) și (9, 10) determină dreapta Δ' (8, 10) ($\overline{LH}$).

Dreptele obținute : Δ (8, 10) (*dr* $\overline{FL}$) și Δ' (8, 10) (*dr* $\overline{LH}$) sînt concurente în punctul L :, iar Δ (9, 10) (*dr* $\overline{LH}$) și Δ' (9, 10 (*dr* $\overline{LF}$) sînt concurente deasemeni în L.

Prin urmare rezultă că :

C.I.R. (8, 10), C.I.R. (9, 10) și C.I.R. (8, 9) se găsesc în punctul „L" ; rezultă deci că articulația „L" fiind fixă se poate lega la bază.

§ *8.2. Observație*

C.I.R. (7, 10) și C.I.R. (5, 10) cad pe dreptele $\overline{LH}$ respectiv $\overline{FL}$ se demonstrează acest lucru prin geometria analitică și prin teorema celor trei C.I.R.

Se admite că C.I.R. (7, 10) nu este situat pe dreapta $\overline{LH}$, iar C.I.R. (5, 10) deasemeni nu este situat pe dreapta $\overline{FL}$

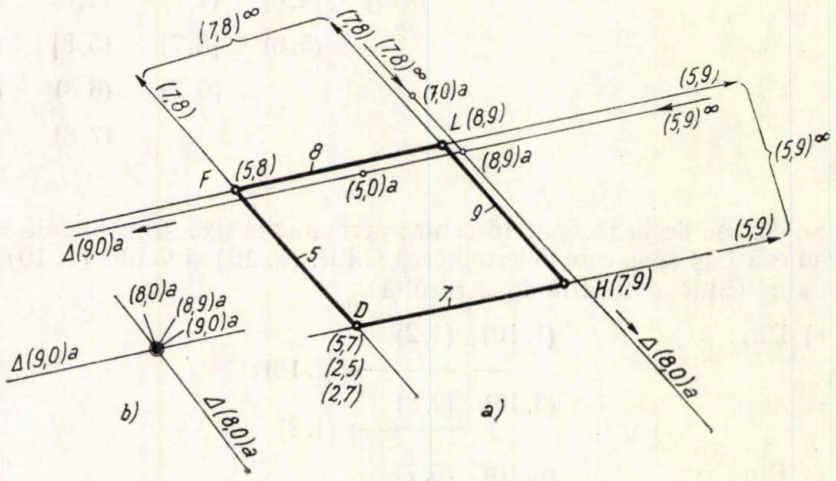


Fig. 17

Pe baza construcției (amplificării mecanismului de bază) din condiția de paralelism între elemente egalitatea între vitezele unghiulare (§ 7 pag. 44 formulele (11)) :

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_9 \\ \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_7 = \bar{\omega}_8 \end{cases} \qquad (\bar{\omega}_1 \neq \bar{\omega}_3)$$

În concluzie sînt deci situate la infinit următoarele C.I.R. :

C.I.R. $(5, 9)^{\infty}$ și C.I.R. $(8, 7)^{\infty}$

Din grupa de elemente 10, 7, 8 și 9 se iau combinații de cîte trei elemente.

a) Astfel din combinația (10, 5, 9) se obține conform teoremei celor trei C.I.R. :

$$(5, 10) \quad (5, 9)^{\infty} \text{ și } (9, 10)$$

Unind C.I.R. $(5, 10)_a$ cu $(5, 9)^{\infty}$ rezultă $\Delta\,(9, 10)_a \parallel \overline{FL}$ (indicele „a" înseamnă aparent — admis)

b) Din combinația (10, 7, 8) cele trei C.I.R. sînt :

$$(7, 10) \quad (7, 8)^{\infty} \text{ și } (8, 10)$$

Unind C.I.R. $(7, 10)_a$ cu C.I.R. $(7,8)^{\infty}$ rezultă $\Delta\,(8, 10)_a \parallel \overline{LH}$.

c) În sfîrșit din combinația (10, 8, 9) cele trei C.I.R. sînt :

(8, 10) (8, 9) și (9, 10) (fig. 17 b) (coliniare) confundate.

Dar C.I.R. $(8, 10)_a$ se află pe dreapta $\Delta\,(8, 10)_a$ iar C.I.R. $(9, 10)_a$ pe dreapta $\Delta\,(9, 10)_a$; în consecință C.I.R. $(8,9)_a$ se află la intersecția celor două drepte $\Delta\,(8, 10)_a$ și $\Delta\,(9, 10)_a$.

Deci C.I.R. $(8,9)_a$ — admițînd că C.I.R. (5,10) și C.I.R. (7, 10) nu cad pe dreapta $\overline{FL}$ respectiv $\overline{LH}$ — se află la intersecția celor două drepte aparente $\Delta\,(8, 10)_a$ respectiv $\Delta\,(9, 10)_a$.

Dar cum C.I.R. (8, 9) rezultă precis la intersecția dreptelor $\overline{FL}$ cu $\overline{LH}$ rezultă că $(8, 9)_a$ nu poate fi decît în L confundat cu C.I.R. (8, 9).

Dacă C.I.R. $(8, 9)_a$ coincide cu C.I.R. (8, 9) rezultă că C.I.R. (5, 10) și C.I.R. (7, 10) nu se pot afla de cît pe dreptele $\overline{FL}$ respectiv $\overline{LH}$.

Acest lucru se poate demonstra și pe cale analitică însă ea este mult mai lungă, ecuațiile rezultate fiind foarte complicate și necesitînd un volum mare de lucru :

Concluzie :

Dacă C.I.R. ale elementelor 8, respectiv 9 față de baza 10 coincid cu centrul permanent de rotație (8, 9) (articulația L) rezultă că aceasta poate fi legată la bază, apărînd astfel cele trei mecanisme patrulatere care generează aceeași curbă de bielă (traiectoria punctului D).

§ 8.3. *Metoda analitică*

Se va demonstra că dreapta $\overline{ID}$ [dreapta C.I.R. (5, 10)] intersectează dreapta $\overline{OE}$ [dreapta C.I.R. (5, 10)], în punctul S (C.I.R. 5, 10) situat pe dreapta FL.

1) Se consideră ecuațiile sub forma cea mai generală a dreptelor :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad \overline{OA}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad \overline{AB}$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \qquad \overline{BC}$$

cu origina sistemului în D (0, 0).

2) Coordonatele punctului I C.I.R (2, 10) se află la intersecția dreptelor $\overline{OA}$ și $\overline{BC}$

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \end{cases}$$

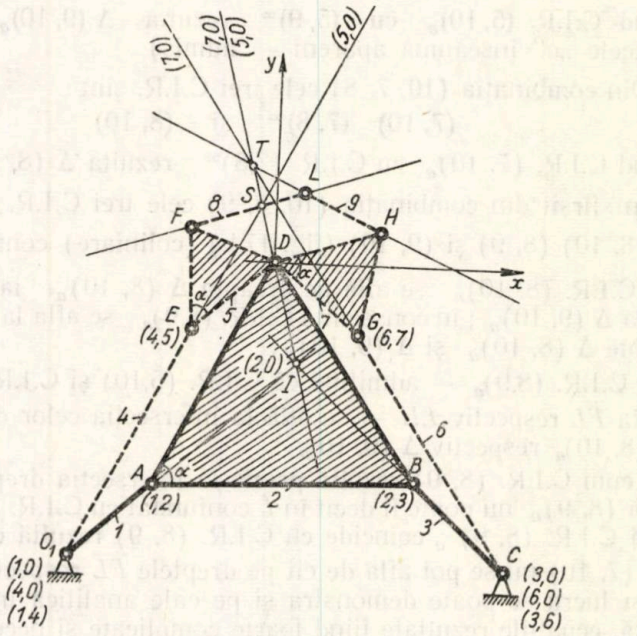


Fig. 18

Rezolvînd sistemul se găsesc coordonatele punctului I:

$$x_I = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \qquad y_I = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_3 & -C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

sau:

$$I\left(\frac{B_1 C_3 - C_1 B_3}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \; ; \; \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{A_1 B_3 - A_3 B_1}\right)$$

3) Ecuația dreptei $\overline{ID}$ este de forma:

$$\frac{y - y_D}{y_I - y_D} = \frac{x - x_D}{x_I - x_D} \quad \text{unde} \quad \begin{matrix} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{matrix} \quad \text{deci:}$$

$$\frac{y}{\frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{A_1 B_3 - A_3 B_1}} = \frac{x}{\frac{B_1 C_3 - B_3 C_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1}} \rightarrow \boxed{y = x \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{B_1 C_3 - B_3 C_1}}$$

4) Coordonatele punctului A se află la intersecția dreptelor $\overline{OA}$ și $\overline{AB}$

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Rezultă :

$$x_A = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

$$y_A = \frac{\begin{matrix} A_1 - C_1 \\ A_2 - C_2 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$$

deci :

$$A\left(\frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \; ; \; \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right)$$

5) Ecuația dreptei AD este de forma :

$$\frac{y - y_D}{y_A - y_D} = \frac{x - x_D}{x_A - x_D} \quad \text{unde} \quad \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y}{\dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}} = \frac{x}{\dfrac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}} \rightarrow \boxed{y = x \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}}$$

Coeficientul unghiular al dreptei AD este :

$$m_{AD} = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}. \tag{18}$$

6) Ecuația dreptei OE este de forma :

$$y = m_{OE}\, x + n$$

unde :

n — ordonata la origine ;

$m_{OE} = m_{AD}$ — deoarece dreptele OE și AD sînt paralele.

Se obține deci :

$$\boxed{y = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}\, x + n}$$

7) Ecuația dreptei DH este de forma :

$$y = m_{DN}\, x .$$

Coeficientul unghiular al dreptei DH se deduce după cum urmează :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_{DH} - m_{DG}}{1 + m_{DH} \cdot m_{DG}}$$

dar

$$m_{DG} = m_{BC} = -\frac{A_3}{B_3}$$

rezultă deci :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_{DH} + \dfrac{A_3}{B_3}}{1 - m_{DH}\dfrac{A_3}{B_3}} .$$

Din asemănarea triunghiurilor : $\Delta\ ADB \sim \Delta\ \Delta DHG$ se poate scrie :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_{AD} \cdot m_{AB}}{1 + m_{AD} \cdot m_{AB}} \qquad \text{unde :} \quad m_{AD} = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}$$

$$m_{AB} = -\frac{A_2}{B_2}$$

Înlocuind rezultă :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1} + \dfrac{A_2}{B_2}}{1 - \dfrac{A_2}{B_2} \cdot \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}}$$

Unghiul $\widehat{DAB} = \widehat{HDG}$. Egalînd cele două expresii ale lui tg α se obține :

$$\frac{m_{DH} + \dfrac{A_3}{B_3}}{1 - m_{DH}\dfrac{A_3}{B_3}} = \frac{\dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1} + \dfrac{A_2}{B_2}}{1 - \dfrac{A_2}{B_2} \cdot \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}}$$

Făcînd calculele rezultă :

$$m_{DH} = \frac{\dfrac{A_2}{B_2} - \dfrac{A_3}{B_3} + \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}\left(1 + \dfrac{A_2 A_3}{B_2 B_3}\right)}{1 + \dfrac{A_2 A_3}{B_2 B_3} - \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}\left(\dfrac{A_2}{B_2} - \dfrac{A_3}{B_3}\right)} \qquad (19).$$

Deci ecuația dreptei DH este :

$$\boxed{y = m_{DH}\, x}$$

unde n_{DH} este dat de (19).

8) Ecuația dreptei $\overline{FL}$ este de forma :

$$y = m_{FL}\, x + n'.$$

Dar dreapta FL este paralelă cu dreapta DH (din paralelogramul $DFLH$).

Rezultă deci :

$$m_{FL} = m_{DH}$$

iar n' este ordonata la origine.

Ecuația dreptei FL va fi :

$$\boxed{y = m_{DH}\, x + n'}$$

9) Ecuațiile celor trei drepte (ID, OE și FL) sînt :

$$\begin{cases} y = m_{ID}\, x \\ y = m_{AD}\, x + n \\ y = m_{DH}\, x + n' \end{cases}$$

în care :

$$m_{ID} = \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{B_1 C_3 - B_3 C_1} \tag{20}.$$

$$m_{AD} = m_{OE} = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1} \tag{21}.$$

$$m_{DH} = m_{FL} = \frac{\dfrac{A_2}{B_2} - \dfrac{A_3}{B_3} + \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}\left(1 + \dfrac{A_2 A_3}{B_2 B_3}\right)}{1 + \dfrac{A_2 A_3}{B_2 B_3} - \dfrac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}\left(\dfrac{A_2}{B_2} - \dfrac{A_3}{B_3}\right)} \tag{22}.$$

Ecuațiile de mai sus pot fi scrise sub forma :

$$\begin{cases} m_{ID}\, x - y = 0 \\ m_{AD}\, x - y + n = 0 \\ m_{DH}\, x - y + n' = 0 \end{cases}$$

Condițiile ca trei drepte să fie concurenta este ca determinantul format de coeficienți să fie zero, adică :

$$\begin{vmatrix} m_{ID} & -1 & 0 \\ m_{AD} & -1 & n \\ u_{DH} & -1 & n' \end{vmatrix} = -m_{ID} \cdot n' - m_{DH} \cdot n + m_{ID} \cdot n + m_{AD} \cdot n' =$$
$$= n'(m_{AD} - m_{ID}) - n(m_{DH} - m_{ID}).$$

Această expresie este satisfăcută în următoarele cazuri :

$$n'(m_{AD} - m_{ID}) - n(m_{DH} - m_{ID}) = 0$$

1) $n' = 0$ și $n = 0$

2) $\begin{cases} m_{AD} - m_{ID} = 0 \\ m_{DH} - m_{ID} = 0 \end{cases}$

3) Pentru orice $n' = n \dfrac{m_{DH} - m_{ID}}{m_{AD} - m_{ID}}$.

Catedra de teoria mecanismelor.
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Artobolevski I. I.:* Teoria mecanismelor și a mașinilor (L. Rusă) Moscova — 1953, pag. 373—375.
2. *Bloch:* Angenäherte Synthese von Mechanismen Verlag Technik — Berlin — 1951.
3. *Hein K.:* Angewandte Getriebelehre Hannover — Darmstadt 1961.
4. *Hein K.:* Erzeugung von Parallel — Koppelbewegungen mit Anwendung in der Landtechnik. — Grundlagen der Landtechnik, Heft 20/1964.
5. *Kojevnikov S. N.:* Teoria mecanismelor și a mașinilor (L. rusă) — Moscova 1954, pag. 144—145.
6. * * *: Structura și cinematica mecanismelor. Ed. tehnică, București, 1959 — pag. 491 și următoarele.
7. *Voinea R., Atanasiu M.:* Metode analitice noi în teoria mecanismelor — Ed. tehnică, București 1964.
8. *Vilcovici V. Bălan Șt., Voinea R.* Mecanica teoretică, Ed. tehnică 1963, București.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

CENTRALE ELECTRICE

C.Z.: 62.001.24: 621.311.25: 621.039

MÉTHODE DE CALCUL TECHNIQUE-ÉCONOMIQUE POUR DÉTERMINER LE TYPE OPTIMUM DE CENTRALE ÉLECTRIQUE NUCLÉAIRE ET LA COMPÉTITIVITÉ ENTRE LES CENTRALES ÉLECTRIQUES NUCLÉAIRES ET LES CENTRALES CLASSIQUES *

C. DINCULESCU, N. DANILĂ, C. WLEZEK

Chap. I. Introduction.

1.1. *Situation de l'énergétique nucléaire dans le monde*

L'accroissement vertigineux des quantités d'énergie consommées dans les dernières décennies soulève des problèmes toujours plus difficiles en ce qui concerne les possibilités de recouvrement en énergie des besoins des consommateurs.

Ce fait a déterminé que, parallèlement au perfectionnement des installations énergétiques classiques et à l'accroissement de leur économicité, on a fait appel dans une plus large mesure à d'autres sources d'énergie.

Parmi celles-ci, dans le stade actuel de la science et de la technique, c'est l'énergie nucléaire qui présente la plus grande perspective.

Dans les dernières six années, la technique nucléaire a pris un essor particulier, réussissant à dépasser l'étape expérimentale et à entrer dans la phase industrielle.

Par rapport à 1958, quand la puissance installée dans les centrales nucléaires (CN) était de 185 MWe, en septembre 1964 il y avait en fonction dans le monde 46 centrales nucléaires totalisant environ 3 600 MWe, en construction d'autres 24 centrales totalisant environ 6 000 MWe et en projet 10 centrales totalisant 3 600 MWe.

On considère que jusqu'en 1970, la puissance installée dans les centrales nucléaires sera d'environ 20 000—25 000 MWe, jusqu'en 1980 elle atteindra environ 150 000 MWe, et on apprécie pour l'année 2 000 que 50% de l'énergie électrique produite dans le monde sera d'origine nucléaire.

---

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" de Bucarest, 28—30 mai 1965.

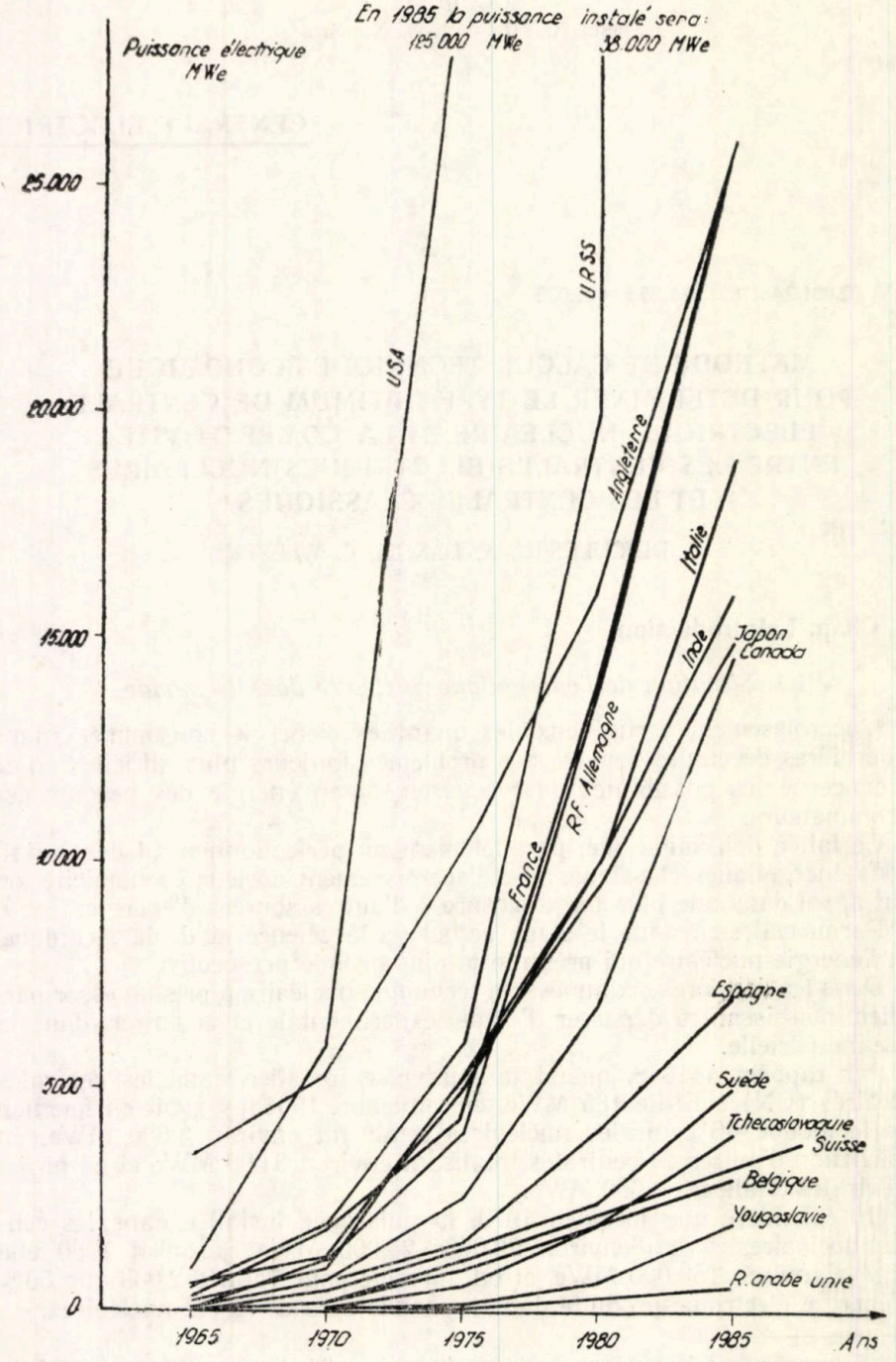


Fig. 1. Programmes nucléaires nationaux dans divers pays

La situation des programmes nucléaires nationaux est présentée dans la fig. 1.

De l'examen de la situation existante dans le monde, on constate que tous les pays, plus ou moins développés économiquement, avec ou sans réserves de combustible classique, se préoccupent que les centrales nucléaires contribuent substantiellement dans les étapes futures à équilibrer leurs balances d'énergie.

1.1.1. *Types de réacteurs énergétiques*

Les types de réacteurs qui peuvent être pris en considération actuellement pour équiper les centrales nucléaires peuvent être groupés dans les filières suivantes :

a) *La filière uranium naturel — gaz — graphite,* représentée par les réacteurs GCR (Gas Cooled Reactor — Réacteur refroidi à gaz) de type Magnox. Ces réacteurs utilisent : uranium naturel comme combustible, bioxyde de charbon pour refroidissement et graphite comme modérateur. Le degré moyen de combustion du combustible est de 3 000 ... 3 500 MWj/t (24 GWh/t énergie électrique). Les éléments de combustible sont enrobés dans des gaines confectionnées du magnox (alliage de magnésium) qui resistent jusqu'aux températures de 420°C. Les réacteurs GCR on été développés sourtout en Angleterre et en France.

De ce type de réacteur, il y a en fonction, construction et projection environ 30 réacteurs qui totalisent une puissance de plus de 7 000 MWe.

Grâce au grand nombre d'unités construites, le type Magnox a atteint un degré élevé de perfectionnement, mais il s'est prouvé plafonné comme performances par la limite relative réduite de la température admise pour les éléments de combustible.

Cela a conduit à la nécessité d'étudier certains nouveaux types, comme le réacteur AGR (Advanced Gas Cooled Reactor-Réacteur avancé refroidi à gaz) ou le réacteur HTGR (High Temperature Gas Cooled Reactor-Réacteur refroidi à gaz de haute température) le dernier permettant l'élévation de la température des gaz de refroidissement jusqu'à 800—1 000°C. Avec ces températures l'on peut obtenir de la vapeur avec les mêmes paramètres comme ceux utilisés couramment dans les centrales classiques (environ 140—170 ata et 535—565°C).

Les réacteurs AGR et HTGR utilisent pour combustible l'uranium légèrement enrichi, ce qui conduit à un plus grand degré moyen de combustion, de 12.000 MWj/t (115 GWh/t — énergie électrique) et même 18.000 MWj/t. Les réacteurs AGR et HTGR représentent l'étape suivante de développement de la filière uranium-gaz-graphite, type Magnox.

b) *La filière uranium enrichi — eau naturelle — eau naturelle* est représentée en U.R.S.S. par les réacteurs VVER (Vodo-Vodianoi-energheticeskii reactor — Réacteur énergétique eau — eau) et en U.S.A. par les réacteurs BWR et PWR (Boiling Water Reactor — Réacteur à eau en ébullition et Pressurized Water Reactor — Réacteur à eau sous pression). Ces réacteurs utilisent de l'uranium enrichi comme combustible et de l'eau légère (naturelle) comme modérateur et agent de refroidissement.

Le degré moyen de combustion du combustible varie entre 15 000—100 000 MWj/t (respectivement 120—800 GWh/t — énergie électrique), en fonction du degré d'enrichissement.

De ces types de réacteurs il y a en fonction 13 unités avec une puissance totale d'environ 1 500 MWe.

Ces types de réacteurs ont été dévelloppés en URSS et USA, grâce à l'existence des installations d'enrichissement de l'uranium, réalisées à des fins militaires. L'adoption de ces types impose l'utilisation de l'uranium enrichi pour lequel sont nécessaires des installations complexes et coûteuses. De plus, ces types ont un cycle du combustible plus compliqué, nécessitant des installations spéciales pour le traitement du combustible irradié, en vue de séparer le plutonium et l'uranium non brûlé.

c) *La filière uranium naturel — eau lourde — eau lourde,* est représentée par les réacteurs BHWR et PHWR (Boiling Heavy Water Reactor — Réacteur à eau lourde en ébullition et Pressurized Heavy Water Reactor — Réacteur à eau lourde sous pression). Ces réacteurs utilisent l'uranium naturel comme combustible et l'eau lourde comme modérateur et agent de refroidissement. Le remplacement de l'eau légère (naturelle) avec l'eau lourde (D_2O) a permis l'augmentation du degré de combustion de l'uranium naturel jusqu'à 10 000 MWj/t (80 GWh/t — énergie électrique) par la combustion complète autant de l'uranium que du plutonium produit dans le réacteur. En même temps on a simplifié le cycle de combustible par l'élimination de la nécessité du traitement du combustible irradié, puisque le plutonium formé se brûle dans le réacteur. Outre les avantages énoncés plus haut, un autre avantage consiste dans l'utilisation de l'uranium naturel. Les réacteurs à eau lourde ont été construits spécialement au Canada et en Suède.

*
* *

Outre les réacteurs mentionés plus haut (GCR, AGR, HTGR, VVER, BWR, PWR, HWR) qui représentent le stade actuel de développement de l'énergétique nucléaire, dans l'avenir il faut aussi prendre en considération d'autres types de réacteurs, comme les réacteurs FBR (Fast Breeder Reactor — Réacteur rapide reproducteur), ceux à liquides organiques, etc.

Du point de vue de l'utilisation du combustible nucléaire, les réacteurs à neutrons rapides (FBR) présentent des avantages évidents en comparaison avec les réacteurs thermiques, puisqu'ils ont un coefficient de reproduction du combustible surunitaire. Actuellement, leur utilisation à échelle industrielle est empêchée par une serie de problèmes techniques encore non résolus. Mais on suppose qu'après 1980 ce type de réacteur sera le réacteur de base de l''énergétique nucléaire.

1.1.2. *Puissance des unités*

Tous les types de réacteurs présentent une gamme très large de puissances. Les puissances unitaires maxima sont actuellement de l'ordre 350 ... 500 MWe et l'on prévoit de construire des unités de puissances grandes et très grandes, parvenant dans l'étape 1968—1970 à des unités de 800

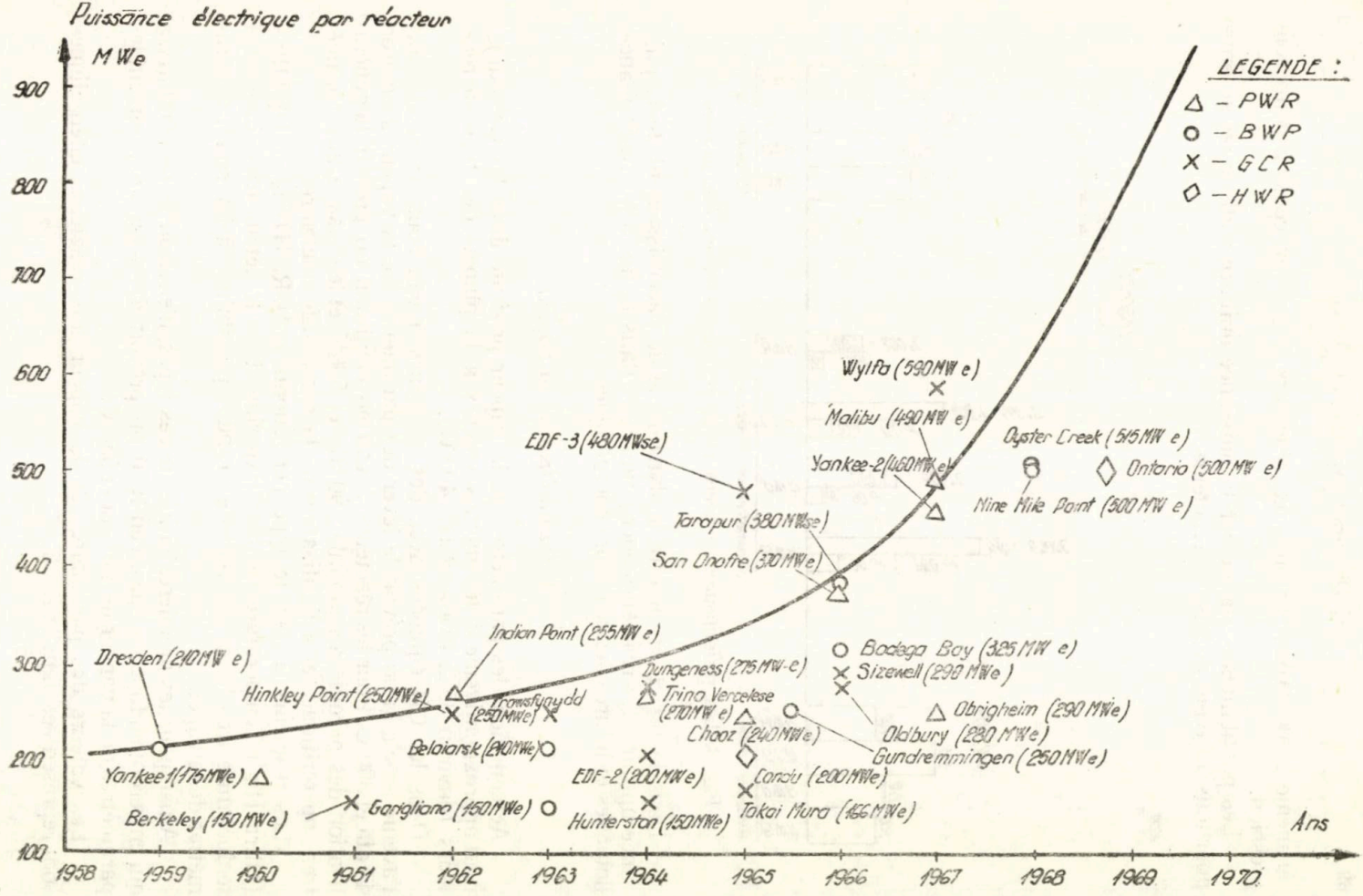


Fig. 2. Accroissement de la puissance unitaire des réacteurs énergétiques

ou même 1 000 MWe, surtout aux réacteurs à gaz et ceux à eau sous pression.

Les possibilités à augmenter la puissance unitaire sont de même ordre pour tous les types de base de réacteurs.

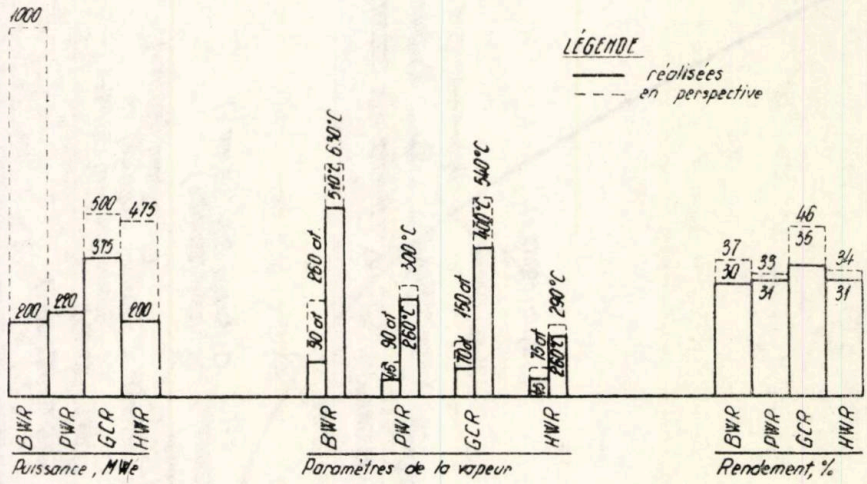


Fig. 3. Les performances actuelles et futures des réacteurs énergétiques

Dans la fig. 2, on montre la dynamique de l'accroissement de la puissance unitaire des réacteurs énergétiques, et dans la fig. 3 les performances actuelles et futures des réacteurs énergétiques.

1.1.3. *Paramètres de la vapeur*

Actuellement les paramètres de la vapeur produite dans les CN atteignent approximativement les mêmes valeurs à la plupart des types de réacteurs (environ 35 ... 40 ata, 250 ... 400°C).

Dans les CN équipées avec des réacteurs à eau sous pression, dans l'avenir prochain on prévoit le lever des paramètres de la vapeur à environ 45 ata et 300°C. Pour les réacteurs à eau en ébullition on prévoit la généralisation des paramètres atteints : 90 ata et 500°C et le passage aux paramètres supercritiques et à l'utilisation de la surchauffe nucléaire.

Les réacteurs à gaz de type perfectionné : AGR, HTGR et UHTREX (Ultra High Temperature Reactor Experiment — Réacteur Expérimental à température très haute) offrent de grandes possibilités à hausser les paramétres de la vapeur.

Ainsi, pour les premières unités de ces types, d'environ 500—1 000 MWe qui entreront en fonction jusqu'en 1970 on prévoit d'obtenir couramment les paramètres de la vapeur de 140 ata et 538°C.

Les valeurs des paramètres de la vapeur aux réacteurs énergétiques sont représentées dans la fig. 3.

1.1.4. *Rendements thermiques des centrales nucléaires*

Les rendements thermiques nets de la CN ont des valeurs courantes de 25 ... 30%.

La tendance dans l'avenir est l'élévation du rendement thermique net atteignant des valeurs de 35—37% pour les réacteurs PWR et BWR et des valeurs de 42—46% pour les réacteurs à gaz de haute température (HTGR) et BWR avec des paramètres supercritiques.

1.1.5. *Indices économiques*

Dans la littérature de spécialité on indique une diversité de données sur les indices économiques réalisés dans les centrales nucléaires, mais l'adoption de ces données doit être faite avec beaucoup de précaution et seulement après des analyses detaillées, puisque les évaluations sont quelquefois trés subjectives et diffèrent d'un auteur à l'autre. Presque jamais on n'indique toutes les conditions de calcul, les conditions de procurer les outillages de la centrale l'équipement auquel il se réfère, les charges financières, etc.

De plus, à la réalisation pratique de la CN, dans la plupart des cas, on a dépassé les investissements antécalculés.

Pour une CN de 500 MWe l'investissement moyen spécifique est montré dans la table 1, par types de réacteurs, d'après les données de la littérature.

Table 1

Filière et type de réacteur	Investissement spécifique moyen $/kWe	Dénomination des centrales aux plus petits investissements spécifiques
U — gaz — graphite Magnox—GCR et AGR (Angleterre et France)	270—320	Wylfa — 590 MWe — 298 $/kWe EDF-4 — 480 MWe — 270 $/kWe AGR — 500 MWe — 270 $/kWe
U naturel — eau lourde — eau lourde HWR (PHWR, BHWR) (Canada et Suède)	250	PHWR — 360 MWe — 250 $/kWe (Suède) CN — 1 000 MWe — 250 $/kWe (Canada)
U enrichi — eau naturelle — eau naturelle PWR, BWR, VVER (USA et URSS)	180 *)	Oyster Creek *) — 515 MWe — 132 $/kWe Nine Mile Point *) — 500 MWe — 136 $/kWe

* Par rapport aux données du catalogue de prix de la firme „General Electric" de mois de sept. 1964, ainsi comme on le montre dans le „Journal Officiel" (France) du 19 janvier 1965, pour mettre en équivalence les investissements de la firme avec les autres de la table 1, il faut augmenter l'investissement, à environ 50 $/kWe

Dans les valeurs de la table nr. 1, l'investissement pour la première charge de combustible n'est pas compris ; il s'élève à 30 $/kWe pour les réacteurs avec U naturel et à 60 $/kWe pour les réacteurs avec U enrichi.

En relation avec les valeurs présentées antérieurement il faut faire l'observation que pour toutes les centrales nucléaires construites dans d'autres pays que ceux qui construisent l'équipement de la centrale, la valeur des investissements réalisés a dépassé jusqu'à 2 fois la valeur des investissements réalisés dans une centrale nucléaire équivalente du pays respectif. Ainsi, par exemple, la CN Tarapur de 380 MWe de l'Inde, équivalente avec la CN Oyster Creek de USA coûte 240 $/kWe, par rapport à 132 $/kWe etc.

Ayant en vue cela, pour pouvoir apprécier le cout d'une CN dans n'importe quel pays, il faut faire une comparaison entre l'investissement spécifique pour une CN et l'investissement spécifique pour les centrales thermo-électriques classiques du pays respectif.

Si l'on considère l'investissement dans une centrale thermo-électrique (CTE) nouvelle à charbon, qu'on construit dans la période 1965—1970 en France ou en Angleterre, de 130—160 $/kW, la valeur adoptée 150 $/kW, il y aura le suivant rapport entre les investissements spécifiques dans une CN et une CTE :

Table 2

La filière	Eau naturelle en ébullition— —uranium enrichi (BWR)	U naturel— —eau lourde— —eau lourde (HWR)	U — gaz — — graphite (AGR—GCR)
Rapport des investissements dans CN et CTE	1,15	1,30	1,75—2,00

La valeur des investissements spécifiques réalisés dans diverses CN est indiquée dans les diagrammes fig. 4, 5, 6.

Les prix de l'énergie électrique réalisés aux différentes centrales nucléaires, conformément aux donnés de la littérature, sans qu'on indique précisément les conditions dans lesquelles on les a calculées, sont donnés dans le diagramme fig. 7, comparativement au prix de l'énergie électrique produite par les centrales thermo-électriques classiques dans les pays respectifs.

Comme il résulte de ce diagramme, le prix de l'énergie électrique aux CN de puissances plus grandes de 500 MWe devient compétitif au prix de l'énergie électrique produite par les centrales thermo-électriques classiques, soit environ 5—7 mills/kWh.

On donne, comme exemple, dans la table 3, les valeurs du prix de revient de l'énergie électrique produite dans quelques centrales nucléaires.

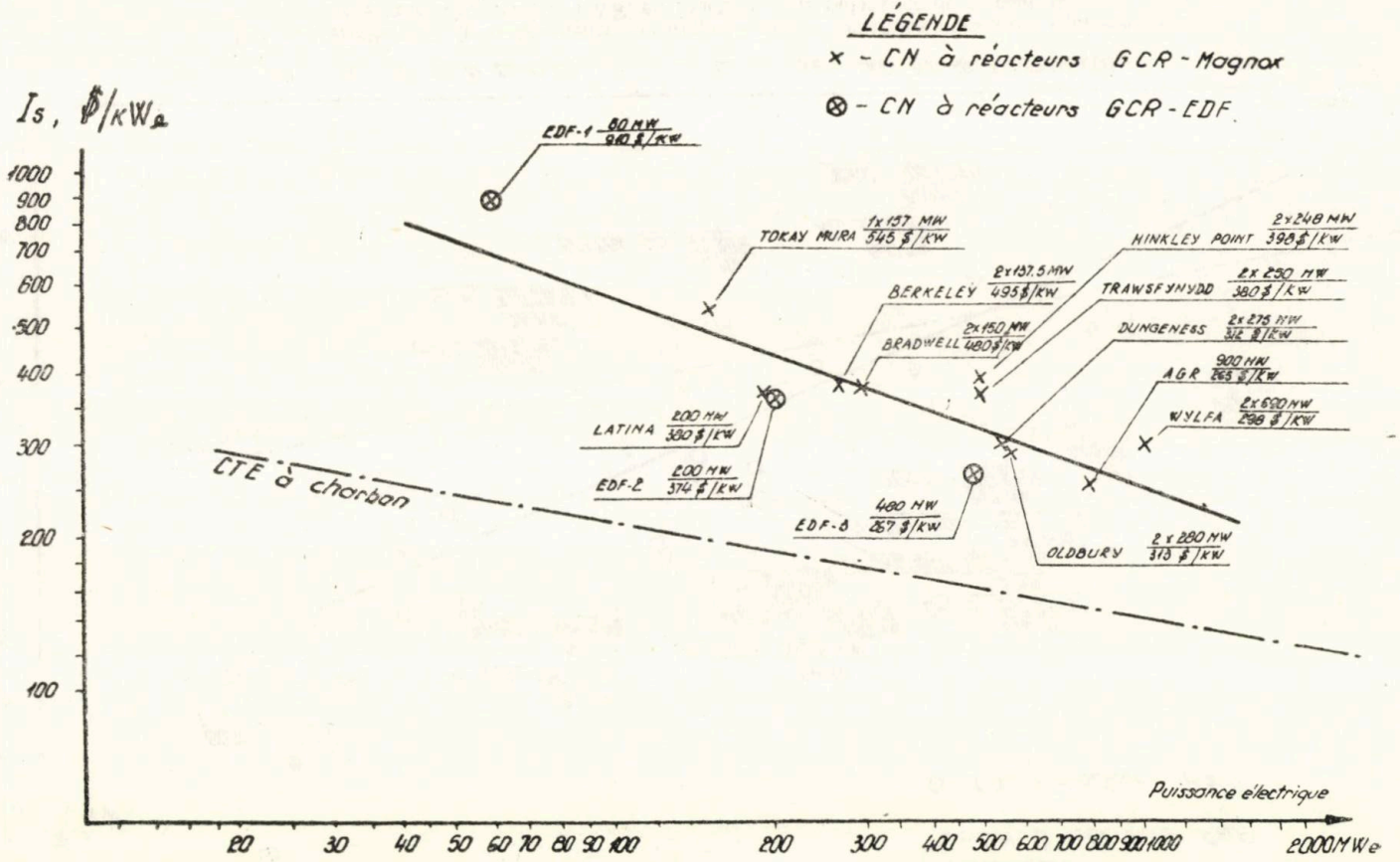


Fig. 4. Variation des investissements spécifiques dans les centrales nucléaires équipées avec des réacteurs GCR et AGR, en fonction de la puissance de la centrale

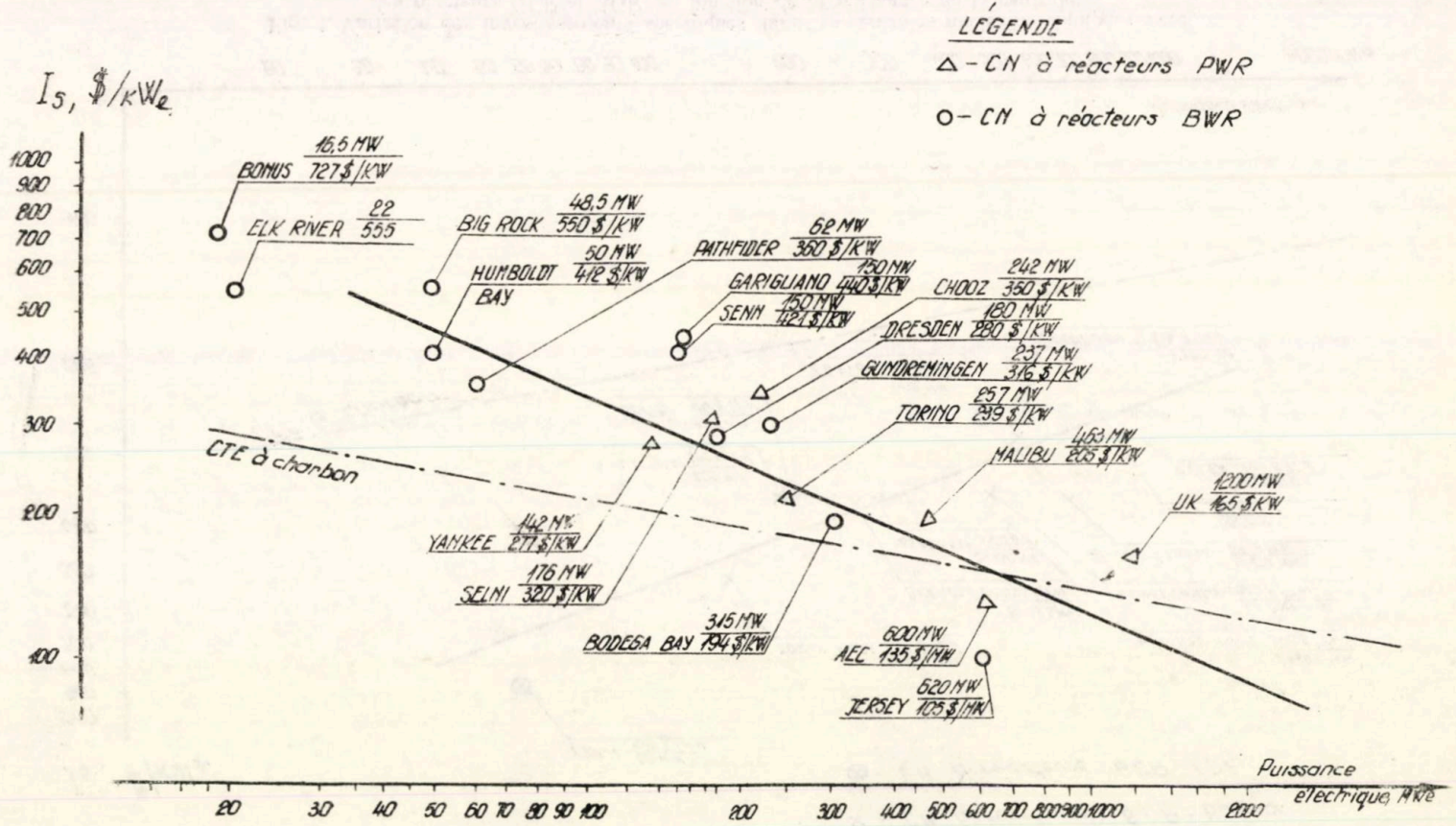


Fig. 5. Variation des investissements spécifiques dans les centrales nucléaires équipées avec des réacteurs BWR et PWR, en fonction de la puissance de la centrale

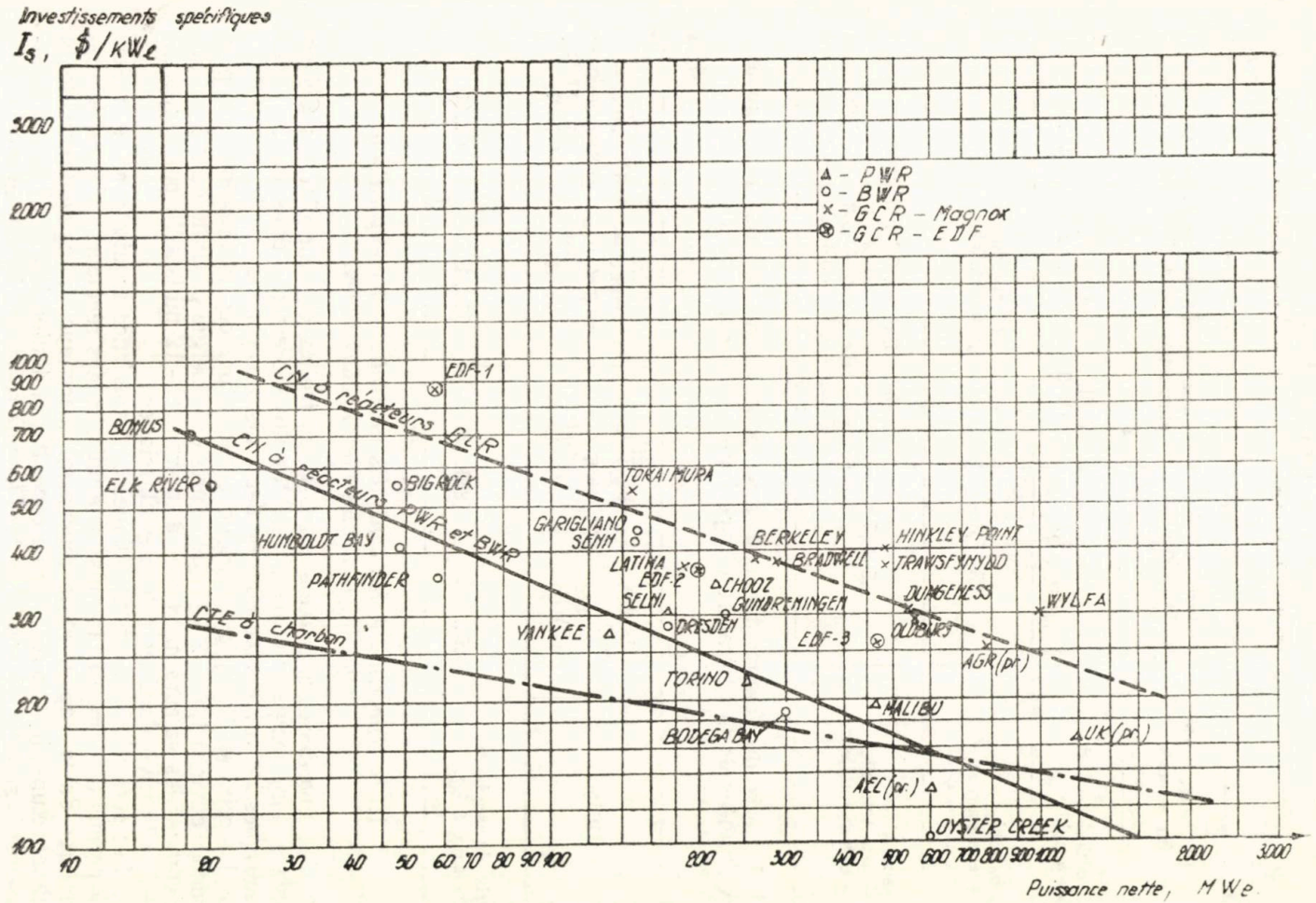


Fig. 6. Variation des investissements spécifiques dans les centrales nucléaires équipées avec des réacteurs BWR, PWR et GCR, en fontion de la puissance de la centrale

Table 3

Filière et type du réacteur	Prix moyen de l'énergie mills/kWh.	Dénomination des centrales avec les plus petits prix de l'énergie électrique
U naturel — gaz — — graphite	7,0—7,7	Wylfa — 7,7 mills/kWh. EDF-3 — 3,5 ... 7,2 mills/kWh.
U naturel — — eau lourde — — eau lourde	4,5—5,8	Projet Suède et Canada ... 4,1 ... 5,8 mills/kWh.
U enrichi — — eau naturelle — — eau naturelle	4,5—5,5	Bodega Bay — 5,8 mills/kWh. Malibu — 5,0 mills/kWh. Nine Mile Point — 4,53 mills/kWh. Oyster Creek — 3,8 mills/kWh.

Le prix du combustible nucléaire, pour chaque filière, conformément aux données de la littérature de spécialité, est montré dans la table 4.

Table 4

Filière	Filière U enrichi — eau — eau (BWR)	Filière U enrichi — — gaz — — graphite (AGR)	Filière U naturel — — gaz — — graphite (GCR)	Filière U naturel — — eau lourde — — eau lourde (HWR)
Prix du combustible nucléaire $/kg.	400 ... 500	250 ... 300	35 ... 45	50 ... 90

1.1.6. *Opportunité des centrales nucléaires en comparaison avec les centrales thermo-électriques.*

Les investissements dans les CN construites et dans d'autres CN en construction, comparativement avec les investissements dans les centrales électriques à charbon sont environ deux fois plus grands.

Le prix de l'énergie électrique produite par ces installations est plus grand d'environ 1,5 — 2 fois que le prix de l'énergie produite dans les CTE, atteignant les valeurs moyennes d'environ 9 — 12 mills/kWh par rapport à 5—7 mills/kWh dans les centrales classiques.

Les perfectionnements techniques et l'expérience acquise avec ces unités ont permis d'augmenter la puissance unitaire des réacteurs, d'élever les paramètres de la vapeur et le rendement thermique. L'augmentation de la puissance unitaire des réacteurs a conduit à la diminution sensible des investissements spécifiques pour tous les types de réacteurs, beaucoup plus accentuée qu'aux centrales classiques.

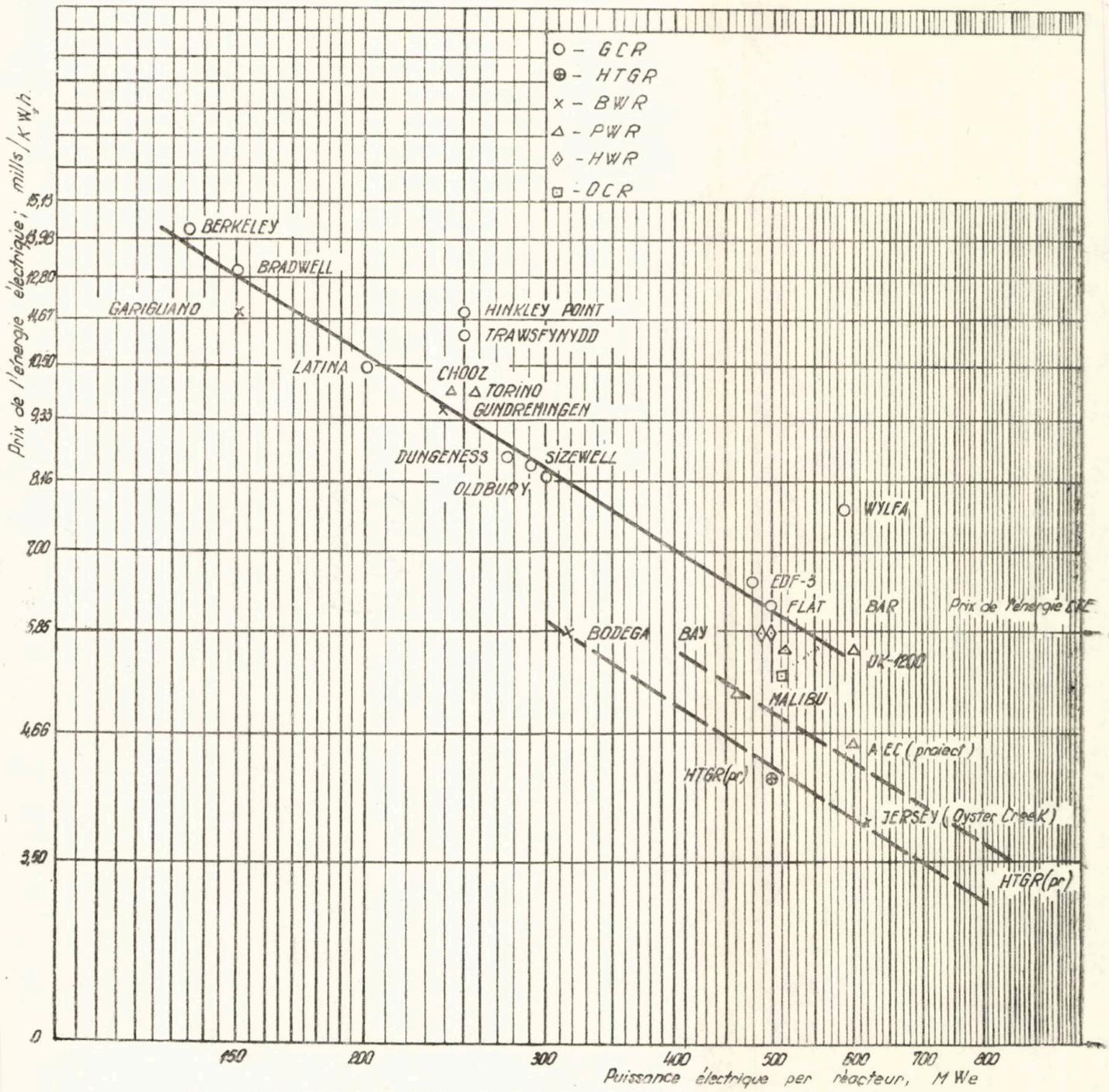


Fig. 7. Variation du prix de l'énergie électrique (mills/kWh) en fonction de la puissance de la centrale

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

Pour les grandes unités (500 MWe) qu'on construit ou qu'on va construire l'on remarque le rapprochement des valeurs d'investissements dans les CN aux valeurs réalisées dans les CTE.

Pour le prix de revient de l'énergie électrique produite dans une CN de grande puissance on prévoit qu'il soit plus petit que dans la CTE à charbon.

La réalisation des réacteurs de puissances unitaires très grandes, la diminution du prix de revient des éléments de combustible comme résultat des perfectionnements techniques, l'extension de l'usure morale de la CN de 20 ans à 30 ans, même dans l'hypothèse de la diminution du coût du combustible classique, conduisent à la conclusion que les centrales nucléaires deviennent compétitives avec les centrales thermo-électriques classiques à partir de 1968—1970, quand ces grandes unités entreront en service. On peut affirmer que dans les régions déficitaires en combustible classique, ou avec le combustible classique à un prix élevé, les centrales nucléaires sont dès à présent plus économiques que les centrales classiques dans l'hypothèse de l'existence, des ressources de combustible nucléaire ou de sa procuration à un prix qui ne dépasse pas les valeurs actuelles.

Entre les réacteurs énergétiques pris en considération, les types BWR, HWR et AGR conduisent au meilleurs indices techniques-économiques pour certaines conditions données spécifiques aux pays respectifs (USA, Angleterre, etc).

Chap. II. — Détermination du type optimum de centrale nucléaire pour certaines conditions données.

La détermination du type optimum de CN pour certaines conditions données, comme il serait par exemple le cas des conditions spécifiques d'un certain pays, se fait à base d'un calcul complexe technique — économique comparatif entre les variantes de l'installation de CN équipées à réacteurs de divers types et la variante de l'installation d'une centrale thermo — électrique classique équivalente. Dans ce calcul, on part de la prémise que le type optimum de CN, et par conséquent aussi de réacteur énergétique, c'est celui qui assure à produire l'énergie électrique à un prix de revient compétitif avec celui de l'énergie produite dans les centrales thermo-électriques classiques, pour des puissances et conditions de sûreté et de fonction équivalentes.

On fait la comparaison des variantes en analysant du point de vue technique — économique les possibilités de construire des centrales nucléaires et des centrales classiques, en tenant compte du spécifique de chacune.

De même, il faut tenir compte tant des conditions techniques et économiques locales où on doit faire fonctionner la centrale, que des conditions de fourniture de l'équipement. Dans le cadre des conditions locales le plus grand poids est présenté par le prix du combustible classique et les investissements des installations classiques de référence, la durée d'utilisation de la puissance installée, les conditions d'emplacement, la courbe de charge journalière, etc. Dans le cadre des conditions de fourniture, il intéresse les

conditions de livraison et la valeur de la fourniture, la cote d'import, les possibilités de l'industrie du pays respectif de participer aux fournitures, etc.

Dans l'appréciation de l'opportunité, d'un certain type de réacteur, un élément important est formé par le moyen et les conditions d'assurer la base de combustible, tant pour les centrales nucléaires que pour les centrales thermo-électriques classiques de référence (surtout le prix du combustible classique).

L'opportunité doit être analysée pour chaque cas à part, les conclusions établies pour une situation ne pouvant être considérées comme générales. De plus, les conditions d'opportunité, établies pour telle région ne peuvent être appliquées identiquement dans une autre région, puisque les prix peuvent beaucoup différer, de même les possibilités de procurer l'outillage et le combustible, les investissements et les frais pour les centrales de référence, etc.

Le choix du type optimum de centrale nucléaire dépend, outre de la base de prix et des prémises initiales de calcul, mais aussi de la méthodologie de calcul adoptée.

Actuellement, dans divers pays, il y a plusieurs méthodes de calcul concernant le choix du type optimum de réacteur énergétique et de centrale nucléaire, ou d'analyse de la compétitivité entre les centrales nucléaires et les centrales classiques. La majorité de ces méthodes analysent le problème en des limites restreintes, en le réduisant à la concurrence entre le prix de l'énergie électrique produite dans une centrale nucléaire et le prix de l'énergie électrique produite dans une centrale thermo — électrique classique de puissance équivalente.

Dans ce qui suit on propose une méthode de calcul pour le choix du type optimum de réacteur énergétique et de centrale nucléaire, ainsi que pour l'analyse des limites de compétitivité des centrales nucléaires avec les centrales classiques (thermo-électriques ou hydro-électriques), méthode où le problème est envisagé dans l'ensemble, au niveau de l'économie nationale, et où l'on tient compte des conditions de fonctionnement de la centrale dans le cadre du système énergétique, ainsi que la manière de résoudre les problèmes connexes liés avec les installations des centrales nucléaires.

2.1. — Méthode de calcul pour la détermination du type optimum de centrale nucléaire.

La méthode proposée dans ce qui suit est basée sur le critérium des dépenses annuelles de calcul „Z" minimales. Conformément à cette méthode, dans le cas de la comparaison de plusieurs solutions pour la construction des centrales électriques équipées de réacteurs de différents types, entre elles, ou de la comparaison de centrales nucléaires avec les centrales classiques, la solution la plus indiquée du point de vue économique est considérée la solution à laquelle correspondent les dépenses annuelles de calcul „Z" minimales.

Cette méthode donne la possibilité de comparer du point de vue technique — économique un grand nombre de solutions qui diffèrent entre elles en ce qui concerne les dépenses annuelles, en final et dans les étapes intermédiaires, ainsi que les investissements en total et comme échelonnement

en temps, pouvant avoir des termes de mise en service partiellement et finalement différents. La formule générale qui exprime les dépenses annuelles de calcul „Z" pour une solution quelconque „s" apportée à équivalence aux autres solutions avec lesquelles elle se compare, est :

$$Z^{(s)} = C^{(s)} + C^{(s)E} + p\left[\sum_{1}^{n^{(s)}-r^{(s)}} i \cdot I_{r^{(s)}+i} \cdot (p+1)^{q-r^{(s)}-i} + \right.$$

$$\left. + I_q^{(s)E} - \sum_{1}^{q-t^{(s)}} i\,(v-C)^{(s)}_{t^{(s)}+i} \cdot (p+1)^{q-t^{(s)}-i}\right] \qquad (1)$$

dans laquelle :

$Z^{(s)}$ — les dépenses annuelles de calcul pour la solution (s) considérée [lei/an] ;

$C^{(s)}$ — les dépenses annuelles effectives au profil final, pour la solution (s), [lei/an] ;

$C^{(s)E}$ — les dépenses annuelles pour équivaloir l'énergie électrique et la chaleur livrées pour les différentes solutions considérées ;

p — le coefficient normé d'efficacité économique pour la branche énergétique, [an^{-1}] ;

$I^{(s)}_{r^{(s)}+i}$ — l'investissement de l'année $r^{(s)}+i$, pour la solution (s) [lei]

Ce terme comprend tant l'investissement pour l'installation énergétique proprement — ditte, que les investissements correspondants dans les branches adjacentes (extraction et transport du combustible) qui auront aussi un échelonnement jusqu'à la date de la fin des travaux dans la solution respective.

$I_q^{(s)E}$ — investissements nécessaires pour équivaloir la puissance, ainsi que les investissements adjacents correspondants à la production supplimentaire d'énergie électrique, résultés de l'équivalence, [lei] ;

$(v-C)^{(s)}_{t^{(s)}+i}$ — le revenu net dans la solution (s) pour chacune des années suivantes à l'année de mise en service $t^{(s)}$ [lei]. La mise en service est considérée à la fin de l'année $t^{(s)}$.
Les dépenses annuelles d'exploitation (C) comprendent : l'amortissement, la consommation de matières premières et de combustible, les salaires, les dépenses générales etc. ci-inclus la consommation technologique dans les centrales et les réseaux respectifs.

q — le nombre d'années, mesuré entre le début des travaux dans la solution qui commence le plus tôt et l'année du profil final de la solution avec le terme d'exécution le plus long (l'année de report des investissements et les dépenses annuelles).

Comme année de report on considère l'année où les diverses solutions peuvent être reportées aux situations comparables, c'est-à-dire les investissements sont réalisés intégralement dans toutes les solutions, et les dépenses annuelles après cette année, dans toute la durée d'exploitation ne subissent plus de modifications importantes.

$r^{(s)}$ — le nombre d'années mesuré entre le début des travaux dans la solution qui commence le plus tôt et l'année du commencement des travaux dans la solution (s) considérée ;

$n^{(s)}$ — le nombre d'années, mesuré entre le début des travaux, dans la solution qui commence le plus tôt et la fin des travaux dans la solution (s) considérée ;

$l^{(s)}$ — le nombre d'années mesuré entre le début des travaux dans la solution qui commence le plus tôt, et la mise en service partielle dans la solution (s) considérée.

Graphiquement, les éléments marqués plus haut sont présentés dans la fig. 8.

Pour illustrer la méthode on a remplacé dans la formule (1) les données des tables 2, 3, 4 et on a effectué les calculs en obtenant les résultats présentés graphiquement dans la fig. 9, par des rectangles correspondant à chaque type de réacteur et de centrale nucléaire.

On interprète le diagramme de la fig. 9 dans le sens que, pour un cas particulier correspondant aux hypothèses adoptées initialement, les réacteurs HWR présentent les dépenses annuelles de calcul „Z" les plus réduites. Les réacteurs BWR ainsi que les réacteurs à gaz GCR et AGR ont des dépenses annuelles de calcul plus grandes.

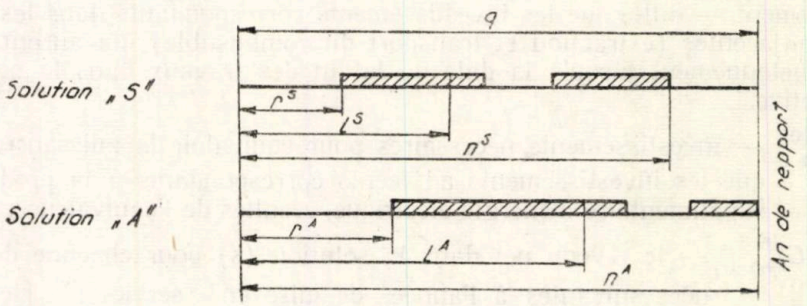


Fig. 8. Représentation graphique des termes de la formule de „Z"

Dans le cas où l'on fait valoriser le plutonium produit dans le réacteur, la valeur des dépenses annuelles de calcul diminue à l'avantage des centrales nucléaires qui produisent du plutonium (BWR, GCR, AGR).

La méthode porposée permet d'effectuer aussi une comparaison entre les centrales nucléaires et les centrales classiques.

En vue de la comparaison des centrales nucléaires avec les centrales classiques, il est nécessaire de calculer la valeur des dépenses annuelles de calcul „Z" dans les centrales classiques. Pour étudier le domaine de com-

pétitivité, les calculs ont été exécutés pour plusieurs valeurs des investissements dans les centrales nucléaires et classiques et aussi pour plusieurs valeurs du prix du combustible classique (5, 10, 20, 30, $/t.c.c.).

Pour les centrales classiques les valeurs de „Z" se présentent graphiquement dans la fig. 10 sous la forme des courbes 1 et 2, en fonction du prix du combustible classique, courbes qui correspondent respectivement à l'hypothèse d'un investissement minime et à un investissement maxime dans

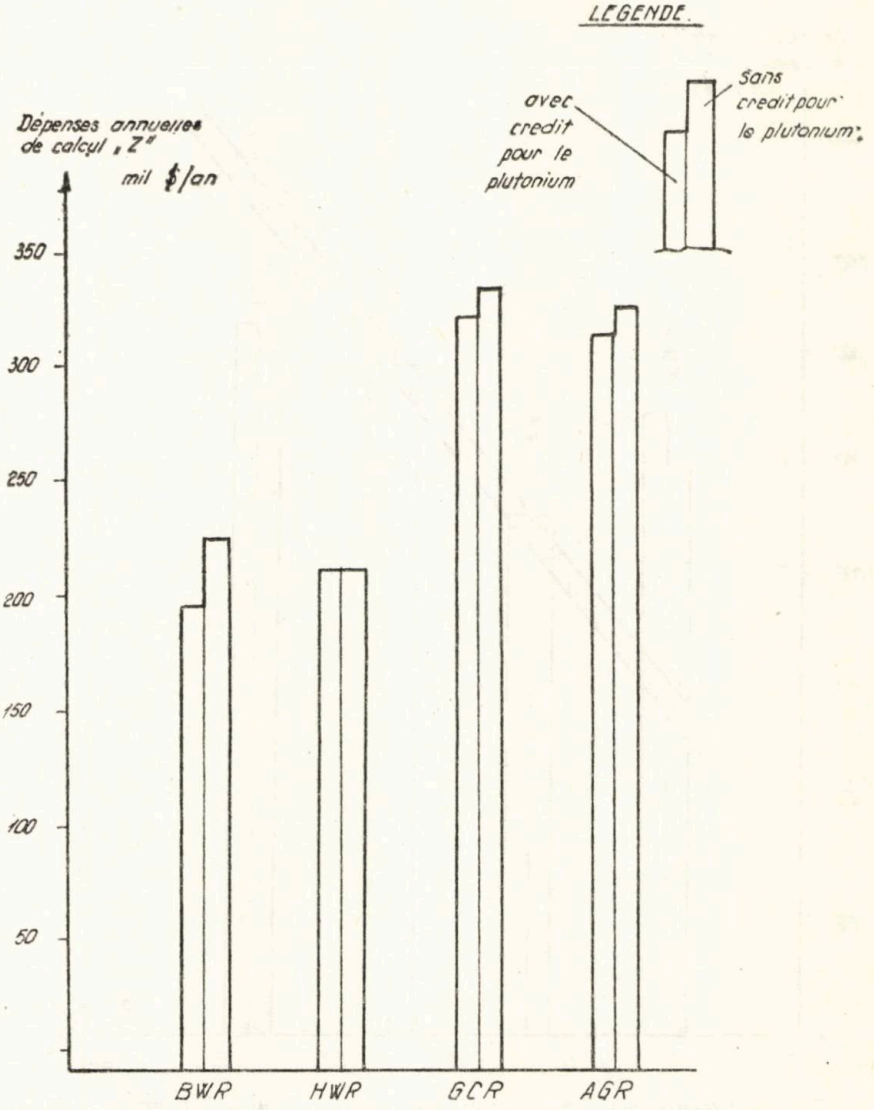


Fig. 9. Comparaison des dépenses annuelles de calcul „Z" pour CN équipées avec réacteurs BWR, HWR, GCR, AGR

les centrales classiques. Les valeurs de „Z" pour les centrales nucléaires sont représentées par les rectangles de la fig. 9 transposés dans la fig. 10.

L'interprétation des diagrammes de la fig. 10 montre que, par exemple, dans le cas du prix du combustible classique de 5 $/t.c.c. les dépenses annuelles de calcul „Z" dans les centrales classiques sont plus réduites qu'à tout autre type de centrale nucléaire et donc les centrales nucléaires ne sont pas économiques par rapport aux centrales classiques.

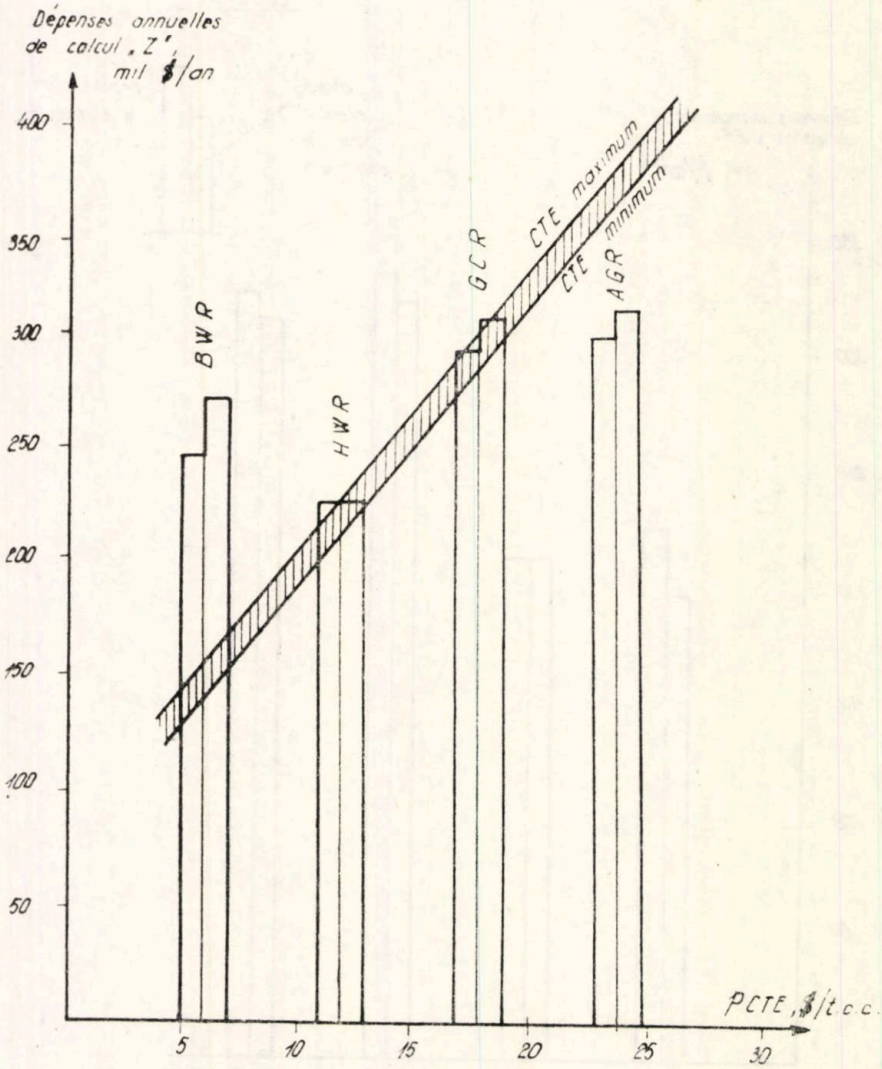


Fig. 10. Comparaison des dépenses annuelles de calcul „Z" réalisées dans les centrales nucléaires et les centrales thermo-électriques classiques, fonctionnant avec des combustibles de différents coûts

Dans le cas du combustible classique aux valeurs plus élevées (environ 10$ /t.c.c.), certains types de réacteurs deviennent compétitives aux centrales classiques, les dépenses annuelles de calcul „Z" dans le cas des centrales nucléaires et des centrales classiques devenant comparables.

Aux prix du combustible classique de 20—30 $/t.c.c. on constate que presque tous les types de réacteurs deviennent compétitifs aux centrales classiques.

2.2. — Application de la méthode pour pouvoir être résolue à l'aide de la calculatrice électronique

Pour effectuer les calculs techniques — économiques en général et surtout dans l'énérgétique nucléaire, où la grande variation des données économiques et le grand nombre de facteurs qui interviennent imposent l'examen d'un grand nombre de variantes, avec beaucoup de variables, la comparaison des solutions par la méthode des variantes devient difficile et laborieuse et par conséquent on cherche l'obtention de quelques expressions mathématiques analytiques qui puissent être programmées à la calculatrice électronique.

Dans ce qui suit on indique la manière d'application de la méthode ci-dessue pour la calculatrice électronique.

Comme on l'a montré, pour qu'une centrale nucléaire soit compétitive avec une centrale thermo-électrique classique, il faut que :

$$Z_{CN} = Z_{CTE}$$

En remplaçant dans l'égalité de plus haut l'expression mathématique de Z_{CN} et Z_{CTE} de la formule (1) et faisant expliciter les expressions des dépenses annuelles dans la CN ou CTE, des investissements et des autres éléments, on obtient une expression simplifiée générale de la forme :

$$(B_{CN} \cdot p_{CN} - B_{CTE} \cdot p_{CTE}) + P\,(b_{CN} - b_{CTE}) + (N_{CN} \cdot S_{CN} - N_{CTE} \cdot S_{CTE}) + a_{CN} \cdot I_{CN} \cdot C - a_{CTE} \cdot I_{CTE} \cdot D + p\,(A - B) = 0\,. \qquad (3)$$

où :

B_{CN} et B_{CTE} — la consommation annuelle de combustible dans la centrale nucléaire et dans la centrale classique ;

p_{CN} et p_{CTE} — le prix du combustible nucléaire et du combustible classique ;

P — puissance de la centrale ;

b_{CN} et b_{CTE} — coefficient qui tient compte des dépenses d'entretien dans la centrale nucléaire et dans la centrale classique ;

N_{CN} et N_{CTE} — le nombre de personnel dans la centrale nucléaire et dans la centrale classique ;

S_{CN} et S_{CTE} — le salaire moyen annuel du personnel dans la centrale nucléaire et dans la centrale classique ;

a_{CN} et a_{CTE} — le coefficient d'amortissement pour la centrale nucléaire et la centrale classique ;

I_{CN} et I_{CTE} — l'investissement dans la centrale nucléaire et dans la centrale classique ;

A, B, C et D — des expressions mathématiques de calcul qui tiennent compte de la durée de construction de la centrale, du mode de financement, des équivalences etc.

Dans l'équation 3, en faisant tous les calculs et les remplacements on peut obtenir, selon les nécessités, l'expression des investissements dans les centrales nucléaires I_{CN} ou le prix du combustible nucléaire p_{CN} en fonction de tous les autres éléments indiqués plus haut, pour les situations de compétitivité entre la CN et la CTE.

L'expression synthétique des investissements dans les centrales nucléaires ou du prix du combustible nucléaire est la suivante :

$$I_{CN} \cdot X + p_{CN} \cdot Y + W = 0 \qquad (4$$

d'où l'on peut déduire la formule synthétique de I_{CN} et p_{CN} :

$$I_{CN} = -\frac{W + Y \cdot p_{CN}}{X} \qquad (5)$$

$$p_{CN} = -\frac{W + X \cdot I_{CN}}{Y} \qquad (6)$$

où : X, Y, et W sont des expressions complexes de calcul qui comprennent tous les termes montrés dans la formule (3).

La rédaction des calculs de ces expressions et leur exécution à la calculatrice électronique a permis de rédiger certains diagrammes d'après la forme indiquée dans la fig. 11.

La manière de rédiger le programme pour la calculatrice électronique, comme aussi le commentaire des résultats feront le thème d'un autre ouvrage.

Dans la fig. 11, les courbes représentent le lieu géométrique, des valeurs des dépenses annuelles de calcul pour lesquelles les centrales nucléaires deviennent compétitives avec les centrales classiques et permettent de déterminer immédiatement la manière de varier les conditions de compétitivité entre les centrales nucléaires et les centrales classiques, en cas du changement des indices économiques (investissements dans les centrales et prix de revient du combustible). Pour chaque type de réacteur il est tracé une courbe par l'intermède de laquelle on peut déterminer la valeur de l'investissement spécifique dans la centrale nucléaire pour laquelle elle devient compétitive avec une centrale thermo — électrique classique. Dans la fig. 11, la variation a été représentée en fonction du prix du combustible classique utilisé, en considérant qu'on réalise la centrale classique à deux valeurs d'investissements (125 $/kW et 250 $/kW). Le prix du combustible nucléaire correspond pour chaque type de réacteur aux valeurs indiquées dans la table 4. Par exemple si une centrale nucléaire se réalise avec un investissement spécifique qui dépasse la valeur indiquée dans la diagramme (le point „*b*" [$/kW]) pour un certain investissement dans la centrale classique et un certain prix de revient du combustible classique (le point „*a*"

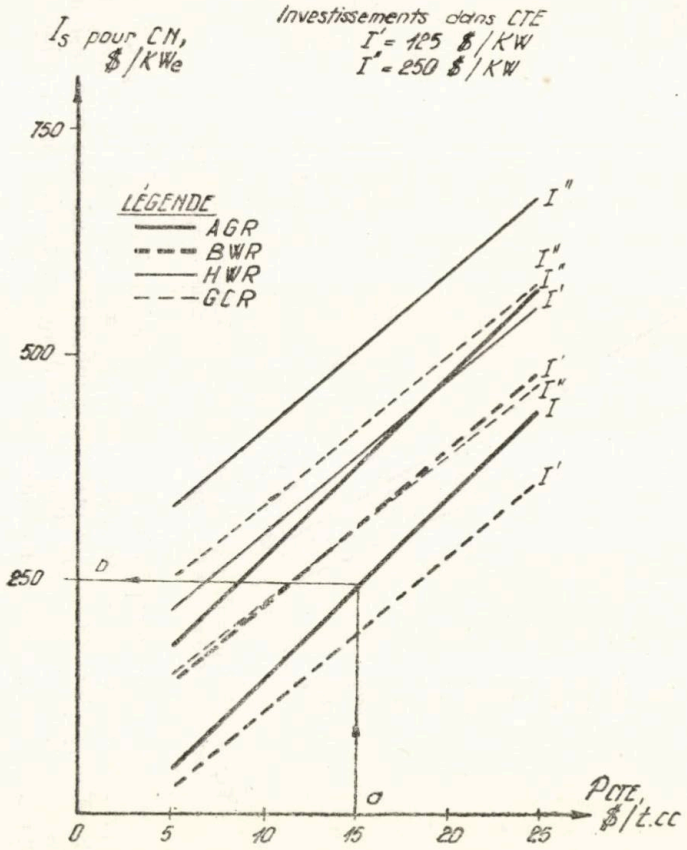


Fig. 11. Variation de l'investissement dans une CN en fonction du prix du combustible classique aux conditions de competitivité

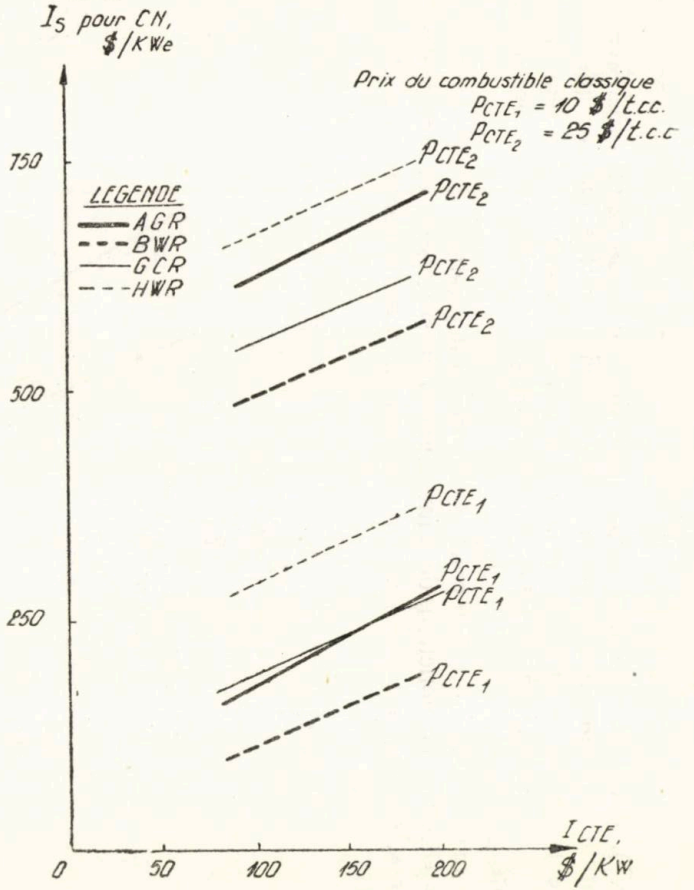


Fig. 12. Variation de l'investissement spécifique dans une CN en fonction de l'investissement spécifique dans les centrales thermo-électriques classiques aux conditions de compétitivité

[$/t.c.c.]), il résulte que la centrale nucléaire n'est pas compétitive avec la centrale classique considérée. La compétitivité croît à mesure que la centrale nucléaire analysée se peut réaliser à un investissement plus diminué que la valeur „*b*" résultée du diagramme et diminue à mesure que l'investissement croît.

De manière similaire l'on peut représenter la dépendance des conditions de compétitivité en fonction de l'investissement spécifique des centrales classiques, en adoptant quelques valeurs pour le prix du combustible classique (fig. 12).

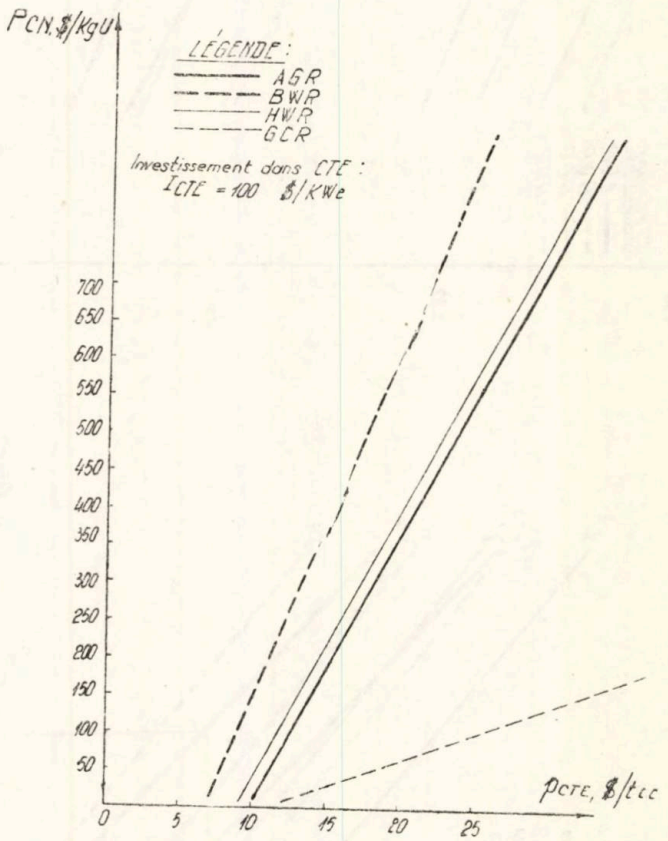


Fig. 13. Variation du prix du combustible nucléaire en fonction du prix du combustible classique aux conditions de compétitivité

Les conditions de compétitivité peuvent être étudiées aussi du point de vue du prix du combustible nucléaire. Dans la fig. 13 on représente graphiquement la dépendance entre le prix du combustible nucléaire et classique dans les conditions de la réalisation des centrales nucléaires et classiques, pour certaines valeurs d'investissements.

De manière correspondante on peut étudier les conditions de compétitivité en fonction de n'importe quelle variable qui entre dans cette analyse (le prix de revient du combustible classique, le prix de revient du combustible nucléaire, l'investissement dans la centrale classique, l'investissement dans la centrale nucléaire etc.).

* * *

Dans ce qui precède on a proposé une méthodologie de calcul technique-économique, basée sur le critérium des dépenses annuelles de calcul „Z" minimales, pour déterminer le type optimum de centrale nucléaire, la position économique relative entre les centrales nucléaires et les centrales clasisiques ainsi que leurs conditions de compétitivité.

Par rapport à d'autres méthodes de calcul indiquées dans la littérature de spécialité pour déterminer le type optimum de centrale nucléaire et de la concurrence entre celles-ci et les centrales classiques, la méthode proposé présente l'avantage d'analyser le problème, intégré dans l'ensemble de l'économie nationale.

De plus, on a établi des expressions mathématiques analytiques qui, résolues à l'aide de la calculatrice électronique, permettent d'examiner un grand nombre de solutions, encadrant le problème dans des limites très larges.

La chaire de centrales électriques
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. * * * — Second Chance — Britain — Nuclear Engineering — November 1964.
2. * * * — Second Sight — Geneva — Nuclear Engineering — November 1964.
3. * * * — The Anti-Programme and The second Nuclear Power Programme — Nuclear Engineering — May 1964.
4. * * * — Neuester Entwicklungstand der kernkraftwerke — Elektrotechnik und Maschinenbau nr. 22 und 23—1964.
5. *K. Fucs* — Perspectivî razvitia iadernoi energetiki — Atomnaia Tehnika za rubejom nr. 1—1965.
6. * * * — Iadernaia energhetika capitalisticeskih stran v 1964 godu — Atomnaia Tehnica za rubejom nr. 1—1965.
7. * * * — Pazvitie energheticescovo reactorostroenia. — Atomnaia Tehnica za rubejom nr. 1—1965.
8. * * * — Perspectives et problemes du dévéloppement de l'énergie nucléaire en France — Journal Officiel de la République Française — 19 Janvier 1965.
9. * * * — Economiceskie haracteristiki energheticeskih reactorov SŞA. — Atomnaia tehnica za rubejom nr. 12—1964.

10. * * * — Analiz stoimosti energhii iadernîh ustanovok. — Atomnaia tehnica za rubejom nr. 12—1964.

11. * * * — Preiskurant ţen na atomnîe elektrostanţii. — Atomnaia tehnica za rubejom nr. 2—1965.

12. *J. Gaussens* — L'économie à la Conference de Geneve 1964. — Energie Nucléaire, vol. 6, nr. 8—1964.

13. *G. E. Issues* — Nuclear Power Plant Price List. — Nucleonics nr. 11—1964.

14. *L. Geller, J. Hagerton, S. Stoller* — Analysing Power Costs for Nuclear Plants — Nucleonics nr. 7—1964.

15. * * * — Instructions pour l'élaboration des calculs comparatifs techniques-économiques concernant des installations de production et transport d'énergie électrique et de chaleur sous forme de vapeur et eau chaude — Ministère de l'Energie Electrique nr. 129—1961.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

TERMOTEHNICĂ

C. Z. :621—154 : 533 : 621.51

INFLUENȚA FRONTIERELOR ASUPRA SCURGERII PRIN REȚELELE DE PROFILE DE MICĂ ALUNGIRE ALE TURBO-MAȘINILOR AXIALE *

C. GUȚĂ

Studiului aerodinamic al scurgerii prin rețele de profile de mică alungire îi sînt consacrate în ultimul timp multe lucrări. Necesitatea acestor cercetări este justificată de tendința ce se conturează în prezent, în multe țări, de a se crea instalații de turbine cu gaze de mare putere. Asupra paletajului acestor turbine acționează forțe însemnate, provenite din scurgerea gazelor prin rețeaua de profile. Acesta este și motivul pentru care se tinde spre realizarea de palete de mică alungire (care se obțin pe baza micșorării lungimii paletelor, sau a măririi corzii), capabile să preia solicitări considerabile.

Micșorarea înălțimii paletelor ridică o altă problemă destul de complicată, aceea a limitei pînă la care putem coborî, cu alte cuvinte : care trebuie să fie lungimea minimă a paletelor pentru ca pierderile ce au loc la extremitățile acestora, în stratul limită, să nu se răsfrîngă negativ asupra caracteristicilor paletajului dat (vezi [1]).

Un studiu sistematic asupra paletajelor de mică alungire l-a făcut Ekkert B. (vezi [2]), care păstrînd înălțimea paletelor (h) constantă, variază alungirea pe seama creșterii corzii profilelor (b), ajungînd pînă la alungiri $\bar{h} = \frac{h}{b} \simeq 0{,}22$.

Paletajele obținute de Ekkert B. aplicînd legea de profilare a circulației constante ($\Gamma = 2\pi C_u r = \text{const}$), au un grad de trapezoidalitate (raportul între mărimea corzii la butuc și la periferie) destul de mare. În prezent, în actualitate, este folosirea altor legi de profilare printre care aceea care ține seama de pierderea de energie la traversarea curentului prin paletaj și mai ales în zonele de capăt unde interacțiunea dintre stratul limită format pe palete și pereții înconjurători și scurgerile secundare extremale este deosebit de intensă.

Metoda de profilare cu considerarea pierderilor de energie, după cît este cunoscut autorului, a fost elaborată de Becnev V. S. în lucrarea [3]. —

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

Metoda amintită se referă însă la paletele de alungire mai mare decît unitatea, pe cînd în cazul paletelor de mică alungire, aceasta are valori cuprinse între 0,20 și 1,0.

Într-o lucrare precedentă, executată la Institutul Bauman din Moscova, a fost extinsă metoda de profilare cu considerarea pierderilor de energie la

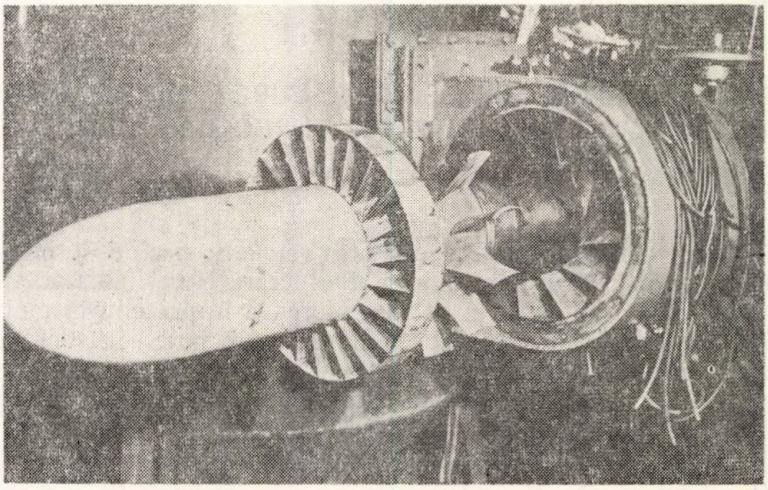


Fig. 1

palete de mică alungire ($h=0,35$), obținînd rezultate experimentale (vezi [1]) care pledează pentru aplicarea acestor paletaje în practica construcției de turbine cu gaze de mare putere.

În prezenta lucrare ne propunem să studiem stratul limită ce ia naștere la periferia secțiunii de trecere a curentului, pentru a determina grosimea acestuia în dreptul fiecărei trepte active a turbomașinilor axiale.

Aceasta permite să se cunoască condițiile concrete de funcționare ale fiecărei trepte și în consecință să se asigure o profilare mai rațională.

Studiul interacțiunii stratului limită format pe paletele în rotație și pe carcasa turbomașinii (vezi fig. 1) este o problemă extrem de complexă din punct de vedere matematic.

În rezolvarea problemei vom distinge trei etape și anume:

I. *Determinarea parametrilor stratului limită pe partea profilată, inițială a butucului.*

II. *Idem pentru partea cilindrică a butucului.*

III. *Determinarea parametrilor stratului limită pe suprafața periferică (de rază* r_e*).*

Pentru aceasta vom admite următoarele ipoteze:

1. Lungimea paletelor diferitelor trepte active ale compresorului este constantă, cu alte cuvinte, frontierele părții de trecere a curentului sînt suprafețe cilindrice, concentrice.

2. În sistemul de axe din fig. 2 grosimea stratului limită format pe suprafața exterioară este egală cu aceea a stratului limită format pe butuc. Aceasta revine la a neglija influența curburii și a formei suprafeței (concavă, convexă) în planul transversal care conține axa *or*.

3. În afara stratului limită, mișcarea este axial-simetrică (admitem că numărul de palete al fiecărei trepte este par) și potențială.

4. Presiunea statică este constantă pe înălțimea *h*, a canalului, inclusiv pe înălțimea stratului limită.

5. Regimul de mișcare este staționar.

I. *Determinarea parametrilor stratului limită pe porțiunea carenată a butucului.*

Parametrii caracteristici ai stratului limită sînt:

a. Grosimea δ, măsurată pe normala la suprafața considerată, pînă cînd viteza în stratul limită reprezintă 99% din cea a curentului.

b. Grosimea convențională (δ^*) determinată de relația (36).

c. Grosimea pierderilor de impuls (δ^{**}) determinată de relația (33).

d. Grosimea pierderilor de energie (δ^{***}) determinată de relația (34).

e. Componentele vitezei după axele de coordonate alese.

f. Frecarea fluidului în mișcare, cu pereții înconjurători.

Ecuațiile de mișcare în stratul limită [5], conform fig. 2, sînt:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial (ur)}{\partial x}+\frac{\partial (vr)}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Ecuațiile (1) și (2) trebuie să satisfacă următoarele condiții pe frontieră.

1. La $y=0$, $u=v=0$. (3)

2. La $y\to\infty$; $u\to U_\infty$, viteza în nucleul curentului.

În cazul de față integrarea este mai ușor de efectuat, dacă în locul componentelor vitezei în ecuația (1) se introduce funcția de curent (vezi [6]), conform relațiilor :

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{4}$$

$$v = -\frac{1}{r}\frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\psi}{r}\frac{dr}{dx}\right).$$

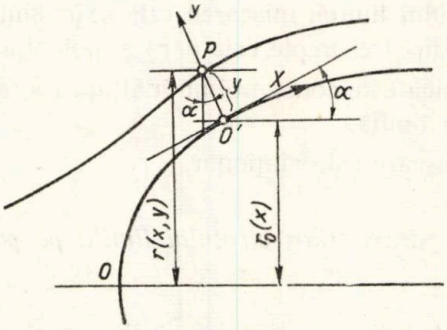


Fig. 2

La granița exterioară a stratului limită, mișcarea fiind potențială este valabilă ecuația lui Bernoulli, care sub formă diferențială se scrie :

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5}$$

Se verifică ușor că relațiile (4) verifică ecuația de continuitate (2).
Înlocuind relațiile (4) și (5) în ecuația de mișcare (1) vom obține :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma x} + \frac{\psi}{r}\frac{dr}{dx}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{6}$$

Metoda de rezolvare a ecuației (6) constă în transformarea acesteia într-un număr corespunzător de ecuații diferențiale ordinare în funcție de precizia ce vrem să obținem.

Astfel pentru raza secțiunii transversale, conform figurii 2, vom avea :

$$r(x, y) = r_0(x) + y\cos\alpha \tag{7}$$

unde :

$$r_0(x) = r_1 x + r_3 x^3 + r_5 x^5 + \ldots \tag{8}$$

În mod analog se ia o dezvoltare pentru viteza curentului :

$$U(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \ldots \tag{9}$$

și pentru funcția de curent:

$$\psi(x, y) = \psi_1 x + \psi_3 x^3 + \psi_5 x^5 + \dots \tag{10}$$

unde

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\nu}{2u_1}}\, u_1 f_1(\varepsilon)\ ;\ \psi_3 = 2u_3 \sqrt{\frac{\nu}{2u_1}} f_3(\varepsilon)\ ;\ \psi_5 = 3u_5 \sqrt{\frac{\nu}{2u_1}} f_5(\varepsilon) \tag{11}$$

sînt funcții coeficient:

ε fiind un parametru, legat de y prin relația:

$$\varepsilon = y \sqrt{\frac{2u_1}{\nu}}. \tag{12}$$

În relația (7) putem lua $y \simeq 0$ întrucît grosimea stratului limită este neglijabilă în raport cu raza secțiunii transversale considerate. Prin urmare în calculele ce vor urma vom folosi relația (8).

Folosind relațiile (8)÷(12) vom obține pentru derivatele parțiale din ecuația (6):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1 x \frac{df_1}{d\varepsilon} + 2u_3 x^3 \frac{df_3}{d\varepsilon} + 3u_5 x^5 \frac{df_5}{d\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = u_1 \frac{df_1}{d\varepsilon} + 6u_3 x^2 \frac{df_3}{d\varepsilon} + 15u_5 x^4 \frac{df_5}{d\varepsilon} + \dots$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\nu}{2u_1}} \left[u_1 f_1 + 6u_3 x^2 f_3 + 15u_5 x^4 f_5 + \dots\right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2u_1}{\nu}} \left[u_1 x \frac{d^2 f_1}{d\varepsilon^2} + 2u_3 x^3 \frac{d^2 f_3}{d\varepsilon^2} + 3u_5 x^5 \frac{d^2 f_5}{d\varepsilon^2} + \dots\right]$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{2u_1}{\nu} \left[u_1 x \frac{d^3 f_1}{d\varepsilon^3} + 2u_3 x^5 \frac{d^3 f_3}{d\varepsilon^3} + 3u_5 x^5 \frac{d^3 f_5}{d\varepsilon^3} + \dots\right]$$

$$U \frac{dU}{dx} = (u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots)(u_1 + 3u_3 x^2 + 5u_5 x^4 + \dots)$$

$$\frac{dr_0}{dx} = r_1 + 3r_3 x^2 + 5r_5 x^4 + \dots$$

Pentru ca funcțiile — coeficient (11) să nu depindă de parametrii r_1 $r_3, r_5 \dots u_1, u_3, u_5 \dots$, care definesc problema particulară dată, le vom scrie (vezi [5]) sub forma:

$$f_3 = g_3 + \frac{r_3 u_1}{r_1 u_3} h_3$$

$$f_5 = g_5 + \frac{r_5 u_1}{r_1 u_5} h_5 + \frac{r_3 u_3}{r_1 u_5} j_5 + \frac{u_3^2}{u_1 u_5} k_5 + \frac{r_3^2 u_1}{r_1^2 u_5} q_5. \tag{14}$$

Înlocuind relațiile (13) și (14) în ecuația (6), după ce egalăm coeficienții lui x de același grad, obținem următoarele ecuații diferențiale ordinare.

$$\frac{d^3 f}{d\varepsilon^3} + f_1 \frac{d^2 f_1}{d\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df_1}{d\varepsilon}\right)^2 - 1\right] \tag{15}$$

$$\frac{d^3 g_3}{d\varepsilon^3} + f_1 \frac{d^2 g_3}{d\varepsilon^2} - 2\frac{df_1}{d\varepsilon}\frac{dg_3}{d\varepsilon} + 2 g_3 \frac{d^2 f_1}{d\varepsilon^2} = -1 \tag{16}$$

$$\frac{d^3 h_3}{d\varepsilon^3} + f_1 \frac{d^2 h_3}{d\varepsilon^2} - 2\frac{df_1}{d\varepsilon}\frac{dh_3}{d\varepsilon} + 2 h_3 \frac{d^2 f_1}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} f_1 \frac{d^2 f_1}{d\varepsilon^2}. \tag{17}$$

Ecuația (15) este neliniară și cu coeficienți variabili. Valorile funcției $df_1/d\varepsilon$ rezultate din integrarea numerică sînt reprezentate în fig. 3.

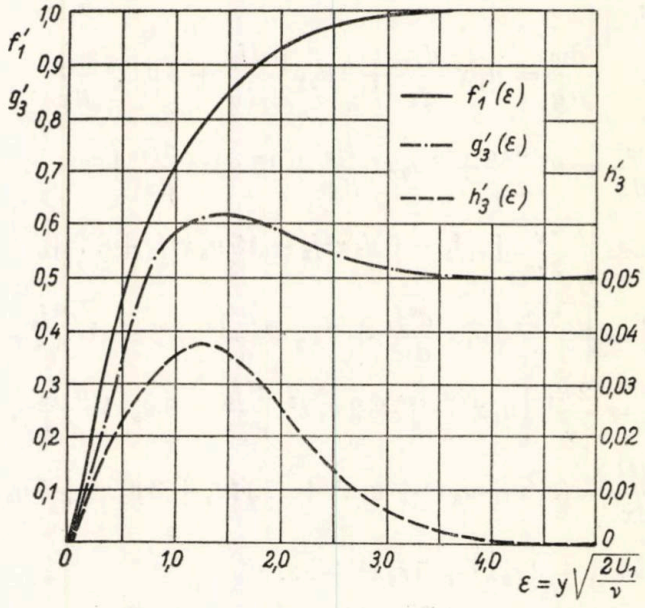


Fig. 3

Se observă că ultimele două ecuații sînt lineare însă au tot coeficienți variabili.

În calculul grosimii stratului limită pe noi ne interesează numai valoarea derivatelor prime în raport cu ε, care, sînt reprezentate în fig. 3 și 4.

Funcțiile $dg_5/d\varepsilon \ldots dq_5/d\varepsilon$ rezultă din rezolvarea unor ecuații diferențiale similare cu (16) și (17), care se obțin tot din ecuația (6).

Din fig. 3 și 4 se vede că avînd cunoscută valoarea parametrului ε, putem deduce imediat funcțiile $df_1/d\varepsilon \ldots dq_5/d\varepsilon$ și determina în acest fel funcțiile coeficient din relația (10) care ne dă funcția de curent. Tot de aici deducem și condițiile la limită pentru aceste funcții și anume:

a) Pentru $\varepsilon = 0$, toate funcțiile au valoarea zero.

b) Pentru $\varepsilon \to \infty$ (practic pentru $\varepsilon > 4{,}5$), avem valorile asimptotice:

$$f'_{1\varepsilon}(\infty) = 1{,}0 \; ; \; g'_{3\varepsilon}(\infty) \simeq 1/2 \; ; \; h'_{3\varepsilon}(\infty) \simeq 0$$

$$g'_{5\varepsilon}(\infty) \simeq \frac{1}{3} \; ; \; h'_{5\varepsilon}(\infty) = j'_{5\varepsilon}(\infty) = \ldots = q'_{5\varepsilon}(\infty) = 0 \qquad (18)$$

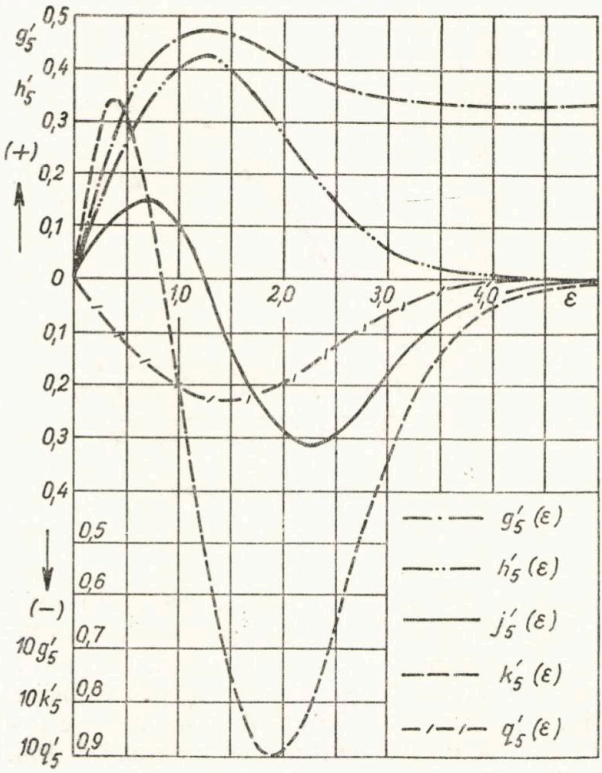


Fig. 4

În cazul corpului fuziform din fig. 1, (care reprezintă o parte a instalației experimentale pentru paletaje circulare statice, pe care s-au făcut măsurători în stratul limită *), viteza curentului (vezi formula (9)) dacă ne vom limita numai la primii trei termeni are următoarea expresie:

$$U(x) = 3{,}746\,x - 5{,}2 \cdot 10^{-3}\,x^3 - 0{,}21 \cdot 10^{-5}\,x^5 . \qquad (19)$$

*) Instalația aparține Catedrei de Turbine cu aburi și gaze a Institutului Bauman din Moscova.

Formula (19) are valabilitate numai pe partea concavă a carenei, pînă la $x = 20$ cm. (x măsurîndu-se ca în fig. 2).

O expresie similară cu (19) deducem și pentru raza secțiunii transversale (vezi formula (8)):

$$r_0(x) = 0{,}49\,x - 0{,}143 \cdot 10^{-3}\,x^3 - 0{,}06 \cdot 10^{-5}\,x^5. \qquad (20)$$

Coeficienții $u_1, u_3, u_5, r_1, r_3, r_5$ din relațiile (19) și (20) au fost deduși din condiția ca funcțiile respective să treacă prin trei puncte date în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 20$. Se vede că în origina axelor avem: $u(0) = 0$ și $r_0(0) = 0$.

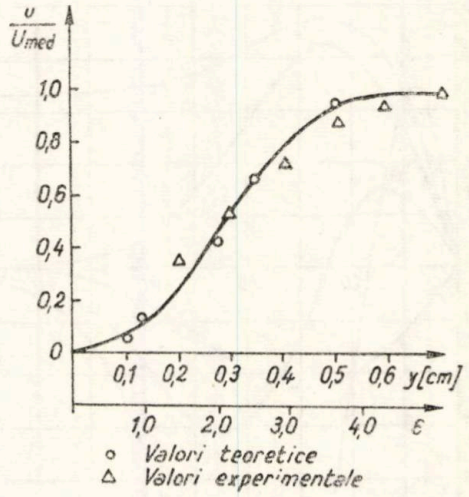


Fig. 5.

Folosind relațiile (11) ÷ (14) putem deduce profilul vitezelor în stratul limită. În fig. 5 este reprezentat profilul vitezelor în stratul limită în secțiunea de trecere de la partea carenată la cea cilindrică. Grosimea stratului limită convențional este considerată aceea care corespunde valorii raportului $u/U = 0{,}99$ care din fig. 5 rezultă $\delta = 5{,}5$ mm. Această valoare poate fi folosită la rîndul său drept condiție inițială pentru determinarea grosimii stratului limită pe partea cilindrică a butucului (carenajului).

II. *Determinarea parametrilor stratului limită pe partea cilindrică a butucului*

Partea cilindrică a butucului la compresoarele axiale, cu mai multe trepte este destul de lungă, fapt ce conduce la o creștere substanțială a grosimii stratului limită. Aceasta înseamnă că în formula (7), termenul $y \cos \alpha$ (unde $\cos \alpha \simeq 1$) devine comparabil cu r_0. Prin urmare nu se mai poate neglija și vom lua:

$$r = r_0 + y. \qquad (21)$$

În baza ipotezelor inițiale, pe partea cilindrică sînt îndeplinite condițiile :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dr_0}{dx} = 0 \tag{22}$$

rezultînd conform relației (5) iar ecuațiile (1) și (2) devin :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial y} = 0 \tag{24}$$

Introducînd funcția de curent ψ (x, r) putem exprima componentele vitezei după axele de coordonate, astfel :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{iar} \quad v = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{25}$$

relații ce transformă ecuația de continuitate (24) în identitate.

Așa cum recomandă [6] soluția ecuației (23) poate fi căutată sub forma unei serii asimptotice :

$$\psi \simeq \nu x f(\varepsilon, \zeta) \tag{26}$$

unde

$$f(\varepsilon, \zeta) = f_0(\varepsilon) + \frac{1}{\zeta} f_1(\varepsilon) + \frac{1}{\zeta^2} f_2(\varepsilon) + \ldots$$

iar

$$\varepsilon = \frac{U_0 r^2}{4 \nu x} = e^{-\zeta}. \tag{27}$$

Componentele vitezei (25) se obțin prin derivare corespunzătoare în (26) și ținînd seama că :

$$x \frac{\partial f(\varepsilon, \zeta)}{\partial x} = x \frac{\partial f(\varepsilon, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial f(\varepsilon, \zeta)}{\partial \zeta}. \tag{28}$$

Înlocuind relațiile obținute în (23) și egalînd coeficienții de același grad ai parametrului ζ vom obține un sistem de ecuații diferențiale, cu coeficienți variabili, de forma :

$$\varepsilon \frac{d^3 f_k}{d\varepsilon^3} + \frac{d^2 f_k}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} f_i \frac{d^2 f_{k-1}}{d\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} i \left(f_i \frac{d^2 f_{k-i-1}}{d\varepsilon^2} - \frac{df_i}{d\varepsilon} \frac{df_{k-i-1}}{d\varepsilon} \right) \tag{29}$$

Cu ajutorul sistemului (29) se pot determina funcțiile $f_0(\varepsilon)$, $f_1(\varepsilon)$, $f_2(\varepsilon)$ etc. din relația (26), luînd în mod corespunzător $k = 0, 1, 2 \ldots$ respectiv $i = 0, 1, 2 \ldots k - 1$ și rezolvînd ecuațiile diferențiale ce se obțin.

Astfel deducem :

$$f_0(\varepsilon) = 2\varepsilon \; ; \; f_1(\varepsilon) = 2[\varepsilon\, Ei(-\varepsilon) + e^{-\varepsilon} - 1]$$
$$f_2(\varepsilon) = (1{,}154 \ln \varepsilon - 8{,}18)\,\varepsilon . \tag{30}$$

Cu acestea folosind și relațiile (25) putem scrie expresiile componentelor vitezei în stratul limită :

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2}\left[f'_0(\varepsilon) + \frac{1}{\zeta} f'_1(\varepsilon) + \frac{1}{\zeta^2} f'_2(\varepsilon) + \ldots\right] \tag{31}$$

$$v = \frac{\nu}{r}\left[\varepsilon f'_\varepsilon(\varepsilon, \zeta) - f(\varepsilon, \zeta) - f'_\zeta(\varepsilon, \zeta)\right]. \tag{32}$$

Formulele (31) și (32) pot fi folosite pentru determinarea componentelor vitezei în stratul limită, într-o secțiune oarecare în lungul părții de trecere, sau dîndu-se cîteva valori lui x (respectiv lui ε și ζ) putem calcula grosimea stratului limită (δ), obținînd legea de variație

$$\delta = f(x).$$

Avînd funcția u/U definită de (31) se poate determina grosimea pierderilor prin impuls, sau a pierderilor de energie cu formulele bine cunoscute din teoria stratului limită :

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\, r\, dy \tag{33}$$

$$\delta^{***} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right)\frac{u}{U}\, r\, dy . \tag{34}$$

Formula (34) folosește pentru determinarea pierderilor de energie în stratul limită de care se poate ține seama în profilarea paletajelor turbomașinilor axiale (vezi [2], [1]).

III. *Determinarea parametrilor stratului limită format pe periferia concavă a părții de trecere.*

Din fig. 1 se poate constata complexitatea mișcării fluidului în apropierea extremităților paletelor, unde are loc interacțiunea stratului limită de pe paletele aparatului director sau paletajului mobil cu cel format pe carcasa mașinii. Faptul că la extremitatea paletelor există în afară de scurgerea de bază a fluidului și scurgeri secundare, datorate lungimii finite a paletelor și a jocului radial inerent între palete și carcasă, dă scurgerii rezultante un caracter turbulent.

În cele ce urmează, ca și în cazul precedent, vom neglija îngrămădirea liniilor de curent la traversarea canalului dintre două palete. Aceasta revine la a neglija grosimea paletelor, lucru admis adesea în calcule, considerîndu-se profilul redus la scheletul său.

Următorul pas în aprecierea influienței pe care o are stratul limită format pe pereți sau palete asupra caracteristicilor rețelei de profile ar fi considerarea desimii relative a paletelor.

Neglijarea desimii relative a paletelor nu mai este posibilă în cazul studierii caracterului spațial al scurgerii (vezi [7]).

Folosind binecunoscuta relație integrală a lui Karman (a se vedea [5], [6], [8]) se poate scrie ecuația diferențială a grosimii stratului limită la periferie sub forma :

$$\frac{d\delta_e^{**}}{dx} + (2\delta_e^{**} + \delta_e^{*})\frac{d(\ln \bar{U})}{dx} = r\frac{\tau_e}{\varrho U^2} \tag{35}$$

unde — δ_e^{**} are semnificația indicată mai înainte [formula (33)], însă considerată la periferie

— $\delta_e^{*} = \int_0^{\delta}\left(1 - \frac{u}{U}\right) r\,dy$ așa numita grosime de comprimare (36)

— τ_e — este tensiunea de frecare.

— ϱ densitatea agentului de lucru în kgf s^2/m^4

$r = r_e - y$ este raza curentă, r_e raza exterioară a părții de trecere, iar y distanța măsurată pe normală în interiorul stratului limită (vezi fig. 6).

$\bar{U} = \frac{u}{U_0}$ este raportul între valoarea curentă (la distanță x) a componentei axiale a vitezei (U) iar U_0 viteza în curentul neperturbat, la începutul părții cilindrice.

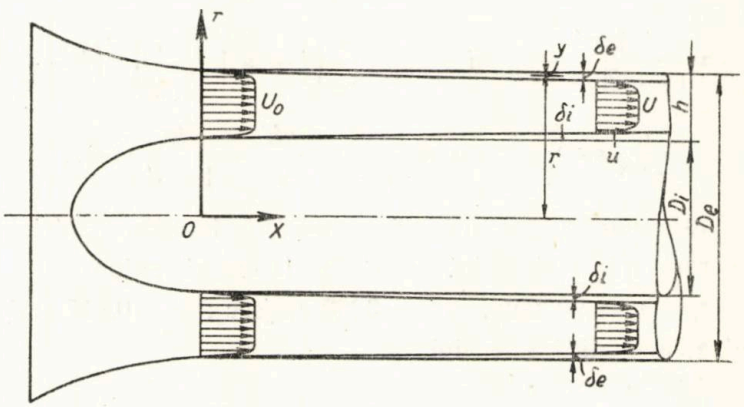


Fig. 6

Integrînd ecuația (35), care după efectuarea unor transformări simple devine cu variabile separabile, deducem :

$$\frac{x}{h} = (1-\bar{d})\left[\int_0^{\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2}} \frac{d\left(\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2}\right)}{\frac{\tau_e}{\varrho U^2}} + \int_0^{\ln \bar{U}} \left(2\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2} + \frac{\delta_e^{*}}{r_e^2}\right)\frac{d(\ln \bar{U})}{\frac{\tau_e}{\varrho U^2}}\right] \tag{37}$$

unde $\bar{d} = r_i/r_e$ este raportul dintre raza butucului și a carcasei. În cazul studiat $\bar{d} = 110/200 = 0{,}55$

În mod analog se deduce legea de variație a vitezei în stratul limită [8] la periferie (U_e) și a funcțiilor $\frac{\delta_e^*}{r_e^2}$, $\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2}$, $\frac{\delta_e}{r_e}$ care intervin direct sau indirect în (37).

Astfel avem :

$$\frac{U_e}{U} = 1 + \frac{1}{z_e}\left[\ln\frac{1-\sqrt{1-\frac{y}{r_e}}}{1+\sqrt{1-\frac{y}{r_e}}} - \ln\frac{1-\sqrt{1-\frac{\delta_e}{r_e}}}{1+\sqrt{1-\frac{\delta_e}{r_e}}}\right] \tag{38}$$

$$\frac{\delta_e^*}{r_e^2} = \frac{1}{z_e}\left[1{,}333 - \sqrt{1-\frac{\delta_e}{r_e}} - 0{,}333\sqrt{\left(1-\frac{\delta_e}{r_e}\right)^3}\right] \tag{39}$$

$$\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2} = \frac{\delta_e^*}{r_e^2} + \frac{1}{z_e^2}\left[5{,}33\ln\frac{1+\sqrt{1-\frac{\delta_e}{r_e}}}{2} + 0{,}667\,\frac{\delta_e}{r_e}\right] \tag{40}$$

iar :

$$\frac{\delta_e}{r_e} = \frac{4A_e e^{z_e}}{(1+A_e e^{z_e})^2} \quad \text{și} \quad A_e = \frac{\alpha}{\eta_e}\left(1+\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta_e}}\right)^{-2}\left(1-\frac{\alpha}{\eta_e}\right)^{k\eta_e} \tag{41}$$

$$\frac{\tau_e}{\varrho U^2} = \frac{k^2}{z_e^2} \; ; \quad \eta_e = \frac{k}{1-\bar{d}}\,\frac{uh}{\nu} = \frac{k}{1-\bar{d}}\,\bar{u}R_{eh} \tag{42}$$

R_{eh} este numărul lui Reynolds referitor la înălțimea paletelor.

În lucrarea [1] sînt arătate condițiile de experimentare

$h = r_e - r_i = 90$ mm, $U_0 = 3200$ cm/sec ; $\nu = 0{,}145$ cm²/sec

vîscozitatea cinematică a aerului.

Rezultă : $R_{eh} = 2{,}0 \cdot 10^5$

Măsurarea componentelor vitezei (modul, direcție etc) s-a făcut începînd cu 1 mm de la periferie și pînă la lo mm (din mm în mm) cu sonda arătată în [1]. Pentru butuc valorile experimentale sînt arătate în fig. 5.

În relația (41) $\alpha = 0{,}392$ iar $k = 11{,}5$ sînt niște constante care nu depind de numărul Reynolds sau curbura suprafeței.

Luîndu-se z_e ca parametru și folosind relațiile (38) ÷ (42), integrarea grafică a relației (37) nu mai prezintă dificultăți.

Calculele se conduc prin aproximații succesive. Vom observa mai întîi că distribuția de viteze pe înălțimea canalului de trecere este uniformă $(1{,}0 \leqslant \bar{U} \leqslant 1{,}2)$. Aceasta înseamnă că putem admite în primă aproximație $\bar{U} = 1{,}0$ ceea ce face ca a doua integrală din relația (37) să se anuleze.

Prima integrală din (37) se rezolvă grafic construind funcția $\frac{z_e^2}{K^2} = f_1\left(\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2}\right)$ pentru diferite valori ale parametrului z_e [vezi formula (42)].

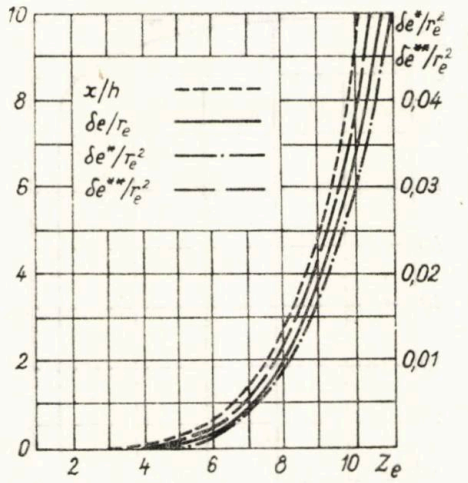


Fig. 7

În fig. 7 sînt reprezentate relațiile (37), (39) ÷ (41) în primă aproximație. În aproximația următoare vom lua $\bar{U} = 1{,}2$: a doua integrală — din (37) ne mai fiind nulă, vom reprezenta funcția primitivă.

$$\frac{z_e^2}{K^2}\left(2\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2} + \frac{\delta_e^{*}}{r_e^2}\right) = f_e[\ln \bar{U}(z_e)]. \qquad (43)$$

Integrarea relației (37) în a doua aproximație, cu considerarea precedentei (43), duce la diferențe infime.

Relația (38) poate fi folosită pentru determinarea distribuției vitezei în stratul limită (pentru diferite valori ale lui y). În fig. 8 este reprezentată această distribuție atît la periferie ($h > 70$ mm) cît și la butuc ($h < 15$ mm).

Influența frontierelor este pusă în evidență în fig. 7 și 8. Astfel, dacă menținem abscisa x și micșorăm înălțimea paletelor h (ceea ce înseamnă micșorarea alungirii relative $\bar{h} = \frac{h}{b}$) se observă că valoarea raportului $\frac{x}{h}$ crește, atrăgînd după sine creșterea valorilor parametrului z_e. În același

timp, prin creșterea lui z_e crește raportul $\frac{\delta_e}{r_e}$, adică grosimea stratului limită.

Aceeași alură o au și curbele $\frac{\delta_e^*}{r_e^2}$, $\frac{\delta_e^{**}}{r_e^2}$, $\frac{\delta_e^{***}}{r_e^2}$.

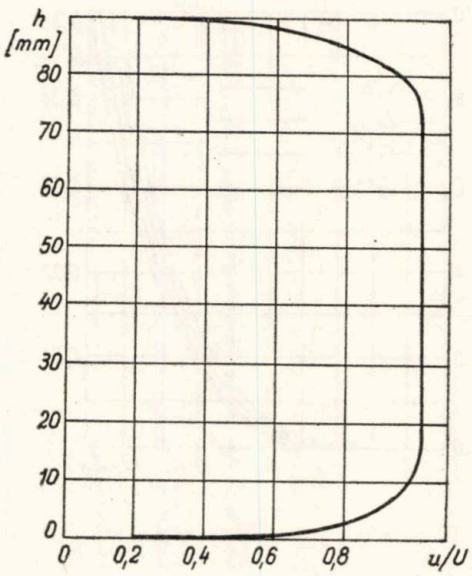


Fig. 8

În cazul turbomașinilor axiale, echipate cu paletaje de mică alungire, raportul $\frac{x}{h}$ poate varia în limite destul de largi și anume $\frac{x}{h} = 5—30$.

Curbele din fig. 7 pot fi extinse pînă la asemenea valori ale lui $\frac{x}{h}$, permițînd determinarea grosimii pierderilor de impuls (δ_e^{**}) și a pierderilor de energie (δ_e^{***}), necesare pentru calculul paletajelor.

Remarcăm că atît metoda folosită pentru determinarea grosimii stratului limită la butuc [formulele (31) ÷ (34)], cît și formulele (39) ÷ (41), deduse pentru periferie, scot în evidență influența curburii frontierelor părții de trecere. Se observă că grosimea stratului limită crește pe măsură ce curbura suprafeței respective scade.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *C. Guță* — Cercetarea experimentală a paletajului compresorului axial, profilat cu considerarea pierderilor de energie Bul. I.P.B. Nr. 2/1964.

2. *B. Ekkert* — Ocevîe i țentrobejnîe compressorî, Moscova, Maşghiz, 1959.

3. *V. S. Becnev* — Issledovanie obtecania compressornîh reşetoc pri malom udlinenii lopatoc Teploenergetica, 1961 nr. 1.

4. *M Yasuhara* — Axisymmetric Viscous Flow Past Verg Slender Badies of Revolution Journal of the Aerospace Sciences nr. 6/1962.

5. *H. Schlihting* — Boundary Layer Theory New-York, Karlsruhe 1960.

6. *L. G. Loițianschi* — Teoria stratului limită Fizmatghiz, Moscova, 1962.

7. *Ja. A. Sirotkin* — Rascet osesimmetricinogo vihrevogo potoca neviazcoi jidcosti v osevîh turbomaşinah Izv. Acad. de Ştiințe a URSS, Mehanica i maşinostroenia 1961, nr. 2.

8. *A. S. Ghinevschi, E. E. Solodchin* — Aerodinamiceschie haracteristichi, nacialnogo uciastca trubî colțevogo secenia pri turbulentnom tecenii v pogranicinom sloe., Promîşlennaia aerodinamica, Oboronghiz, 1959, nr. 12.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

MAȘINI-UNELTE

C. Z. : 621.65/69 : 621 — 82 : 621.9

STUDIUL TEORETIC ȘI EXPERIMENTAL AL DEBITULUI POMPELOR CU ROȚI DINȚATE *

AUREL OPREAN

Pompele cu roți dințate au o utilizare largă în construcția de mașini. Acestea sînt folosite pentru o gamă largă de debite și presiuni începînd cu sistemele de alimentare sau răcire mergînd pînă la utilizarea lor în circuitele de acționare la presele hidraulice, mașinile unelte, mașinile agricole, mașinile auto etc.

Cu toate că pînă în prezent s-au făcut multe studii asupra pompelor cu roți dințate au rămas încă de elucidat o serie de probleme legate de calculele, funcționarea și exploatarea acestor pompe în special în cazurile cînd acestea se folosesc la presiuni ridicate în sistemele de acționare a diverselor mașini.

Lucrarea de față are ca scop studiul pierderilor volumice în vederea folosirii acestor pompe în sistemele hidraulice de acționare a lanțurilor cinematice ale mașinilor unelte, unde variația de debit în timp are o mare importanță. Variația de debit duce la variația vitezei organului acționat, ceea ce influențează negativ calitatea suprafeței prelucrate, durabilitatea sculelor așchietoare și productivitatea mașinii.

În studiul de față s-a plecat de la relația cunoscută :

$$\Delta Q = Q_T - Q_R \qquad (1)$$

adică de la determinarea pierderilor volumice globale din pompă ca diferență dintre debitul teoretic și cel real din pompă.

Se propune o metodă de calcul indirectă deoarece determinarea pierderilor volumice cu relațiile matematice cunoscute pînă în prezent, relații deduse din ecuațiile generale ale lui Navier-Stokes legea lui Newton și aplicate la pompele cu roți dințate, dau erori mari peste 100%.

După cum se va vedea în cele ce urmează metoda propusă permite determinarea debitului teoretic și apoi a celui real, cu o bună precizie de calcul, și în consecință și pierderile volumice vor fi apropiate de cele efective din pompă.

Lucrare comunicată la sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 28—30 mai 1965.

I. Calculul debitului teoretic — Q_T

Trecînd la determinarea debitului teoretic arătăm că deşi la ora actuală există un mare număr de relaţii de calcul a debitului teoretic, la pompele cu roţi dinţate, datorită faptului că aceste relaţii duc la erori de calcul care merg pînă la $\pm 20....40\%$ a fost necesară elaborarea unei noi formule de calcul care să dea erori mai mici care să satisfacă exigenţele actuale.

Pentru determinarea debitului teoretic s-a folosit metoda „echivalenţei".

La o rotaţie a roţii conducătoare cu unghiul $d\varphi$ se consumă un lucru mecanic $Md\varphi$ care imprimă lichidului de lucru o energie pdq, prin urmare dacă excludem pierderile, putem scrie

$$pdq = Md\varphi$$

sau

$$dq = \frac{1}{p} Md\varphi . \tag{2}$$

Pentru determinarea momentului M se foloseşte schema de calcul de la fig. 1 în care conturul complex al danturii pe care acţionează presiunea de refulare p a fost înlocuit cu patru suprafeţe plane de lăţimea roţii b şi lungimea reprezentată prin segmentele AO_1 ; O_1C ; CO_2 ; O_2B şi cu rezultante

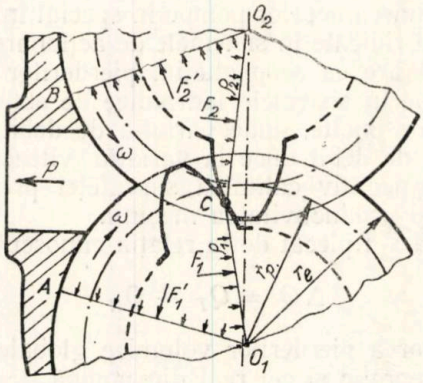


Fig. 1.

F_1 ; F'_1 ; F_2 ; F'_2 perpendiculare pe aceste plane. Această înlocuire se face pe baza unei teoreme cunoscute din mecanică care spune că : rezultanta proiecţiilor forţelor de presiune pe o suprafaţă oarecare este egală cu produsul dintre presiune şi proiecţia acestei suprafeţe pe un plan perpendicular pe rezultantă.

În consecinţă putem scrie :

$$M = F'_1 \frac{r_e}{2} - F_1 \frac{\varrho_1}{2} + F'_2 \frac{r_e}{2} - F_2 \frac{\varrho_2}{2} . \tag{3}$$

Înlocuind forțele cu produsul dintre presiune și proiecția suprafețelor pe planele de mai sus obținem:

$$M = pbr_e \frac{r_e}{2} - pb\,\varrho_1 \frac{\varrho_1}{2} + pbr_e \frac{r_e}{2} - pb\,\varrho_2 \frac{\varrho_2}{2} = \frac{pb}{2}(2r_e^2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2) \quad (4)$$

b fiind lățimea roților dințate.

Determinarea lui ϱ_1 și ϱ_2 se poate face din paralelogramul $O_1AO_2CO_1$ din fig. 2, știind că suma patratelor diagonalelor este egală cu suma patratelor tuturor laturilor, astfel:

$$(2r_p)^2 + (2x)^2 = 2\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2$$

sau

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = 2(r_p^2 + x^2) \quad (5)$$

deci înlocuind $\varrho_1^2 + \varrho_2^2$ în relația M obținem:

$$M = pb(r_e^2 - r_p^2 - x^2). \quad (6)$$

Înlocuind valoarea lui M din formula (6) în relația (2) obținem expresia generală a volumului elementar corespunzător unei rotații $d\varphi$:

$$dq = b(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,d\varphi. \quad (7)$$

În relația (7) variabila independentă este x, deci pentru a putea integra expresia (7) trebuie omogenizată. Acest lucru se realizează prin înlocuirea valorii lui $d\varphi$ în funcție de x, adică se va face legătura între rotația rotorului pompei și deplasarea punctului de contact în lungul liniei de angrenare. Conform fig. 3 se poate scrie:

$$K_1P - K_1e = -x = r_b \operatorname{tg}\alpha - r_b\varphi = r_b(\operatorname{tg}\alpha - \varphi). \quad (8)$$

Segmentul K_1e și arcul K_1a sînt egale datorită proprietății evolventei ae, de aceea s-a înlocuit $K_1e = r_b\varphi$.

Relația (8) se mai poate scrie:

$$x = r_b(\varphi - \operatorname{tg}\alpha) \quad (9)$$

$$dx = r_b\,d\varphi. \quad (10)$$

Înlocuind $d\varphi = \frac{dx}{r_b}$; $b = \lambda m$; $r_b = \frac{mz\cos\alpha_0}{2}$ în relația (7) se obține:

$$dq = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx. \quad (11)$$

În fig. 2 se vede că o pereche de dinți aflați în angrenare încep să refuleze din punctul A; pe măsura deplasării punctului de contact în lungul liniei de angrenare AC debitul crește devenind maximum în punctul P, după

care scade pînă în punctul în care intră în angrenare perechea următoare de dinți, care la rîndul lor încep procesul de refulare. Datorită faptului că gradul de acoperire este în general supraunitar, înseamnă că o anumită cantitate de lichid corespunzătoare segmentului BC, adică $l-p_b$, este izolată de camera de refulare (de perechea de dinți care intră în angrenare, înainte ca perechea precedentă să desangreneze), este vorba de cantitatea haşurată

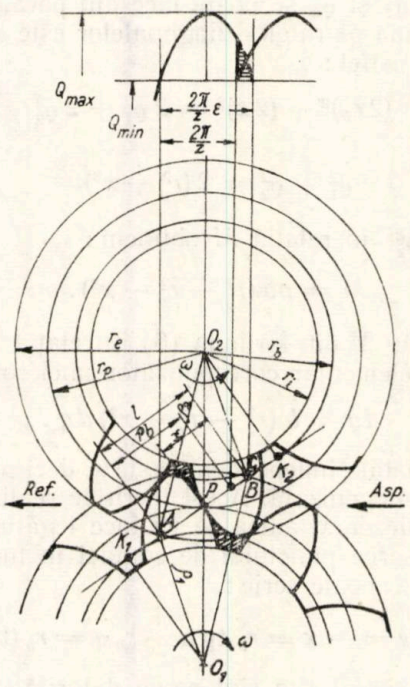


Fig. 2.

orizontal în fig. 2 sus. Acest volum poate fi recuperat sau nu, în funcție de construcția pompei. Lichidul izolat în cauză denumit „lichid strivit" în afară de faptul că diminuează debitul pompei, duce şi la o funcționare defectuoasă a pompei dacă nu se iau măsuri speciale la construcția pompei. Avînd în vedere fenomenul „lichidului strivit", în cele ce urmează se studiază cele două cazuri de recuperare şi nerecuperare a acestuia.

A) Cazul de nerecuperare a lichidului strivit

In această situație cantitatea de lichid la care ne-am referit este sustrasă din camera de refulare şi dirijată prin canale laterale în camera de aspirație. Analiza se va referi la cazul frecvent întîlnit şi anume pompa cu rotori cilindrici cu dinți drepți şi un anumit joc lateral între dinți.

Pornind de la expresia 11 și conform fig. 2 se determină debitul unei perechi de dinți prin integrarea lui dq din care se scade volumul corespunzător astfel :

$$q_{pd} = 2\int_0^{\frac{l}{2}} dq - \int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dq = \frac{4\lambda}{z\cos\alpha_0}\int_0^{\frac{l}{2}} (r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx -$$

$$- \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left\{ l(r_e^2 - r_p^2) - \frac{l^3}{12} - \right.$$

$$\left. - (r_e^2 - r_p^2)\,(l - p_b) + \frac{1}{3}\left[\frac{l^3}{8} - \left(p_b - \frac{l}{2}\right)^3\right]\right\} \qquad (12)$$

După unele simplificări și regrupări se ajunge la expresia :

$$q_{p.d.} = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left[(r_e^2 - r_p^2)\,p_b - \frac{1}{3}\,p_b^3 + p_b^2\,\frac{l}{2} - p_b\,\frac{l^2}{4}\right]. \qquad (13)$$

Pentru a aduce expresia (13) la o formă mai accesibilă calculelor obișnuite se vor înlocui valorile lui r_e, r_p, p_b și l astfel :

a) *Pentru danturile corijate cu corijare unghiulară*

$$r_e = \frac{m\,(z + 2 + 2\,\xi)}{2}\ ;\quad r_p = \frac{m\,(z + 2\,\xi)}{2}\ ;\quad p_b = p'\cos\alpha = p\cos\alpha_0$$

$$l = \pi\, m\, \varepsilon\cos\alpha\ ;\quad \cos\alpha = \cos\alpha_0\,\frac{A_0}{A} \quad \text{sau} \quad \cos\alpha = \cos\alpha_0\,\frac{z}{(z + 2\,\xi)}$$

prin această înlocuire se obține

$$q_{pd} = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left\{\left[\frac{m^2(z + 2 + 2\,\xi)^2}{4} - \frac{m^2(z + 2\,\xi)^2}{4}\right]\pi\, m\cos\alpha_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\,\pi^3 m^3\cos^3\alpha_0 + \frac{\pi^3 m^3\,\varepsilon\cos^2\alpha_0\cos\alpha}{2} - \frac{\pi^3 m^3\,\varepsilon^2\cos\alpha_0\cos^2\alpha}{4}\right\} =$$

$$= \frac{2\pi\lambda m^3}{z}\left\{z + 1 + 2\,\xi - \pi^2\cos^2\alpha_0\left[\frac{\varepsilon^2}{4}\,\frac{z^2}{(z + 2\,\xi)^2} - \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{z}{(z + 2\,\xi)} + \frac{1}{3}\right]\right\} \qquad (14)$$

Dacă în expresia (14) se notează

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\,\frac{z^2}{(z + 2\,\xi)^2} - \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{z}{(z + 2\,\xi)} + \frac{1}{3} = \psi_{\varepsilon z}$$

$$\pi^2\cos^2\alpha_0 = K_{\pi\alpha} \quad \text{și} \quad z + 1 + 2\,\xi = \varphi_{z\xi}\ ,$$

iar volumul refulat de o pereche de dinți $q_{p.d}$ se înmulțește cu z, se obține expresia debitului specific teoretic al pompei cu roți dințate în forma :

$$q_t = 2\pi\lambda m^3 (\varphi_{z\xi} - K_{\pi\alpha}\psi_{\varepsilon z}). \tag{15}$$

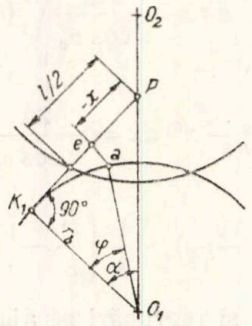


Fig. 3.

b) *Pentru dantura necorijată*

Înlocuind în expresia (14) pe $\xi = 0$ se obține

$$q'_{pd} = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left\{\left[\frac{m^2(z+2)^2}{4} - \frac{m^2 z^2}{4}\right]\pi m\cos\alpha_0 - \frac{1}{3}\pi^3 m^3\cos^3\alpha_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^3 m^3 \varepsilon\cos^3\alpha_0}{2} - \frac{\pi^3 m^3 \varepsilon^2\cos^3\alpha_0}{4} = \right.$$

$$= \frac{2\pi\lambda m^3}{z}\left[z + 1 - \pi^2\cos^2\alpha_0\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]. \tag{16}$$

Debitul specific teoretic la pompele cu danturi necorijate se poate deci scrie, avînd în vedere notațiile indicate mai sus, astfel :

$$q_t = 2\pi\lambda m^3 (\varphi_z - K_{\pi\alpha}\psi_\varepsilon). \tag{17}$$

B) **Cazul de recuperare al lichidului „strivit"**

Pentru a lămuri fenomenul de recuperare recurgem la fig. (4) de unde se poate constata că datorită faptului că $p_b < l$ (adică $\varepsilon > 1$) perechea de dinți 1 și 1' intră în angrenare în punctul S_1 înainte ca perechea de dinți 2 2' să iasă din angrenare (punctul S_2). Ca urmare lichidul din spațiul haşurat va fi izolat complet de camera de refulare și în momentul imediat următor va fi înapoiat în camera de aspirație, dacă pompa nu este prevăzută cu canale laterale care în momentul izolării acestui lichid să-l dirijeze în camera de refulare. Problema execuției acestor canale este de așa manieră încît să facă legătura cu lichidul izolat exact în momentul intrării în contact a dinților 1 și 1' în punctul S_1 este dificilă. Pentru acest motiv la care se mai

adaugă și existența unui „spațiu mort" specific pompelor cu roți dințate, recuperarea nu poate fi integrală.

Din fig. (4) și (5) se vede că în momentul intrării în angrenare a dinților 1 și 1', cantitatea de lichid cuprins în spațiul haşurat este maximă și corespunde ordonatei q'_{max} (fig. 5). După rotirea roții motoare z_1 cu unghiul β (fig. 4) adică cînd punctul de contact S_1 se deplasează în punctul

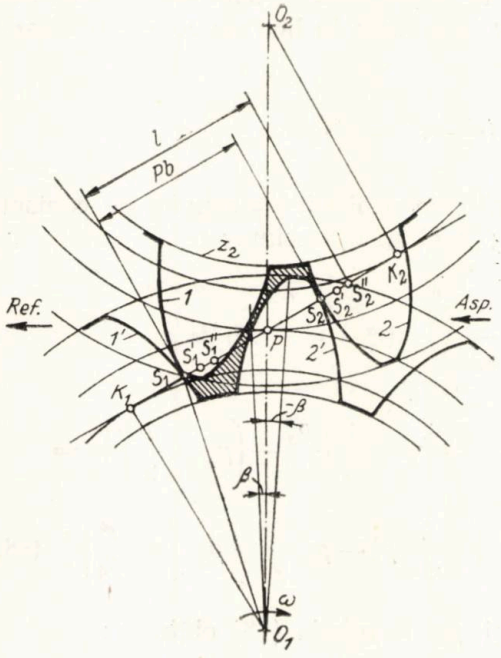


Fig. 4.

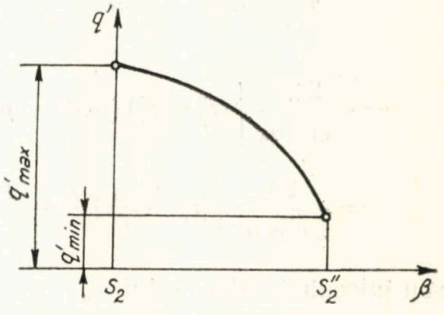


Fig. 5.

S'_1 iar S_2 în S'_2 cantitatea de debit inițială q'_{max} se micșorează pînă la valoarea q'_{min} datorită dislocării cantității de lichid $q'_{max} - q'_{min}$ de către dintele 1 al roții conduse z_2. In consecință, volumul de lichid $q' = q'_{max} - q'_{min}$ este cantitatea maximă recuperabilă în cazul unei dirijări corespunzătoare prin canalele susmenționate. Dislocarea volumului maxim posibil are loc în poziția corespunzătoare unghiului de rotire β și anume cînd dintele 1 al roții z_2 și dintele 2' al roții z_1 sînt dispuși simetric față de axa O_1O_2.

Cantitatea q'_{min} rămasă în spațiul izolat, după rotirea în continuare a roții motoare z_1 pînă cînd punctele de contact ocupă pozițiile S''_1 și S''_2 nu poate fi recuperată în nici un fel, aceasta corespunzînd „spațiului mort" al pompei cu roți dințate.

Construcția canalelor de recuperare trebuie să asigure atît comunicarea între spațiul izolat și camera de refulare în momentul în care intră în con-

tact dinții 1 și 1', cît și întreruperea acestei legături în momentul în care cantitatea $q'_{max} - q'_{min}$ a fost dislocată.

Din analiza amănunțită a acestui fenomen de recuperare reiese caracterul continuității refulării chiar după intrarea în contact a perechii de dinți 1 și 1', schimbîndu-se doar direcția de refulare a acestui volum de lichid suplimentar. Caracterul de variație al acestui volum suplimentar este exponențial și poate fi determinat prin integrarea în limitele corespunzătoare a expresiei.

$$dq = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx.$$

Limitele de integrare corespunzătoare deplasării punctului de contact din S_2 pînă la S'_2 sînt $p_b - l/2$; $p_b/2$ în consecință :

$$q' = q'_{max} - q'_{min} = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{p_b}{2}}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left\{(r_e^2 - r_p^2)(p_b/2 - p_b + l/2) - \frac{1}{3}\left[\frac{p_b^3}{8} - \left(p_b - \frac{l}{2}\right)^3\right]\right\} =$$

$$= \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left[(r_e^2 - r_p^2)\left(\frac{l}{2} - \frac{p_b}{2}\right) + \frac{7}{24}p_b^3 - p_b^2\frac{l}{2} + p_b\frac{l^2}{4} - \frac{l^3}{24}\right] \qquad (18)$$

sau înlocuind valorile lui r_e, r_p, și p_b în relația (18) obținem :

a) *pentru danturi corijate*

$$q' = \frac{2\lambda}{z\cos\alpha_0}\left\{\left[\frac{m^2(z+2+2\xi)^2}{4} - \frac{m^2(z+2\xi)^2}{4}\right]\left(\frac{\pi}{2}m\varepsilon\cos\alpha_0\frac{z}{(z+2\xi)} - \frac{\pi}{2}m\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\cos\alpha_0 + \frac{7}{24}\pi^3 m^3\cos^3\alpha_0 - \frac{1}{2}\pi^3 m^2\varepsilon\cos^3\alpha_0\frac{z}{(z+2\xi)} + \frac{1}{4}\pi^3 m^3\varepsilon^2\cos^3\alpha_0\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{z^2}{(z+2\xi)^2} - \frac{1}{24}\pi^3\varepsilon^3 m^3\cos^3\alpha_0\frac{z^3}{(z+2\xi)^3} = \frac{2\pi\lambda m^3}{z}\right\}(z+1+2\xi)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{z}{z+2\xi}\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) - \pi^2\cos^2\alpha_0\left[\frac{\varepsilon^3}{24}\frac{z^3}{(z+2\xi)^3} - \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{z^2}{(z+2\xi)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2}\frac{z}{(z+2\xi)} - \frac{7}{24}\right] \qquad (19)$$

Înmulțind expresia (19) cu z pentru a determina debitul suplimentar pentru o rotație și notînd :

$$\frac{z}{z+2\xi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}-1=\delta_{\varepsilon z}$$

$$\frac{\varepsilon^3}{24}\cdot\frac{z^3}{(z+2\xi)^3}-\frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{z^2}{(z+2\xi)^2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{z}{z+2\xi}-\frac{7}{24}=\gamma_{z\varepsilon}$$

menținînd și notațiile din relația (15) obținem în final :

$$q'_t=2\pi\lambda m^3(\varphi_{z\xi}\,\delta_{z\varepsilon}-K_{\pi\alpha}\,\gamma_{z\varepsilon}). \tag{20}$$

Pentru determinarea finală a debitului specific teoretic în cazul recuperării lichidului *„strivit"* la pompele cu danturi corijate este necesar a se însuma cele două debite q_t și q'_t obținîndu-se :

$$q_c=q_t+q'_t=2\pi\lambda m^3(\varphi_{z\xi}-K_{\pi\alpha}\,\psi_{z\varepsilon})+2\pi\lambda m^3(\varphi_{z\xi}\,\delta_{z\varepsilon}-K_{\pi\alpha}\,\gamma_{z\varepsilon})=$$
$$=2\pi\lambda m^3[\varphi_{z\xi}(1+\delta_{z\varepsilon})-K_{\pi\alpha}(\psi_{z\varepsilon}+\gamma_{z\varepsilon}). \tag{21}$$

b) *Pentru danturi necorijate*

Debitul de lichid suplimentar pentru acest caz se poate obține prin înlocuirea lui $\xi=0$ în expresia (19)

$$q'_t=\frac{2\pi\lambda m^3}{z}\left[(z+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}-1\right)-\pi^2\cos^2\alpha_0\left(\frac{\varepsilon^3}{24}-\frac{\varepsilon^2}{4}+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{7}{24}\right)\right]$$

sau

$$q'_t=2\pi\lambda m^3(\varphi_z\,\delta_\varepsilon-K_{\pi\alpha}\gamma_\varepsilon). \tag{22}$$

Debitul specific teoretic în cazul danturii necorijate se exprimă :

$$q_n=q_t+q'_t=2\pi\lambda m^3[\varphi_z(1+\delta_\varepsilon)-K_{\pi\alpha}(\psi_\varepsilon+\gamma_\varepsilon)]. \tag{23}$$

C) **Calculul debitului teoretic specific pentru cazul danturilor înclinate.**

În ultima vreme au început să apară o serie de pompe cu roți dințate cu danturi înclinate. Motivele pentru care încep să se folosească sînt legate de avantajele pe care aceste angrenaje le prezintă față de cele cu dinți drepți în privința funcționării, uzurii, zgomotului și pulsației.

a) *Determinarea debitului specific teoretic la pompele cu dantură înclinată corijată în cazul nerecuperării „lichidului strivit".*

Se pornește de la relația (12) la care se adaugă influența înclinării danturii :

$$q_{d.\,i.\,n.}=\left[\frac{2}{r_b}\int_0^{\frac{l}{2}}(r_e^2-r_p^2-x^2)\,dx-\frac{1}{r_b}\int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}(r_e^2-r_p^2-x^2)\,dx\right]\int_0^b da \tag{24}$$

înlocuind $da = \frac{dy}{\cos\beta}$; $\frac{1}{\cos\beta} = \chi$ unde β înclinația danturii obținem :

$$q_{d.i.n.} = \frac{1}{r_b \cos\beta}\left[2\int_0^{\frac{l}{2}}\int_0^{b}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx\,dy - \int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_0^{b}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx\,dy = \right.$$

$$= 2\pi m^2 \frac{b}{\cos\beta}(\varphi_{z\xi} - K_{\pi\alpha}\psi_{z\varepsilon}) = 2\pi\lambda m^3 \chi\ (\varphi_{z\xi} - K_{\pi\alpha}\psi_{\varepsilon z}). \qquad (25)$$

b) *Determinarea debitului specific teoretic în cazul danturilor înclinate necorijate.*

Se poate scrie în conformitate cu relația 17 astfel :

$$q'_{d.i.n.} = 2\pi\lambda m^3 \chi\,(\varphi_z - K_{\pi\alpha}\psi_\varepsilon). \qquad (26)$$

c) *Determinarea debitului specific teoretic la pompele cu dantură înclinată corijată în cazul recuperării „lichidului strivit".*

Se aplică relația :

$$q_{d.i.c.} = \frac{1}{r_b \cos\beta}\left[2\int_0^{\frac{l}{2}}\int_0^{b}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx\,dy - \int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_0^{b}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx\,dy + \right.$$

$$+ \int_{p_b-\frac{l}{2}}^{\frac{p_b}{2}}\int_0^{b}(r_e^2 - r_p^2 - x^2)\,dx\,dy =$$

$$= 2\pi\lambda m^3 \varkappa\,[\varphi_{z\xi}(1 + \delta_{z\varepsilon}) - K_{\pi\alpha}(\psi_{z\varepsilon} + \gamma_{z\varepsilon})]. \qquad (27)$$

d) *Determinarea debitului specific în cazul danturilor înclinate necorijate.* Se poate scrie conform cu relația 23 astfel :

$$q'_{d.i.n.} = 2\pi\lambda\varkappa\,[\varphi_z(1 + \delta_\varepsilon) - K_{\pi\alpha}(\psi_\varepsilon + \gamma_\varepsilon)]. \qquad (28)$$

D) Verificarea experimentală a calculelor analitice a debitului specific teoretic

Determinarea debitului teoretic al pompelor în cazul diverselor încercări experimentale se face în mod obișnuit la standul experimental la „presiunea zero". În cazul de față acest mod de determinare experimentală a debitului teoretic nu ne satisface din punct de vedere al preciziei, de aceea a fost nevoie de elaborarea unei instalații speciale reprezentată în fig. 6.

Pentru a determina debitul teoretic al pompei cu roți dințate pe cale experimentală cu precizia necesară, instalația experimentală trebuie să fie astfel construită încît să elimine complet orice influențe, care ar putea duce la abateri de la debitul efectiv geometric al pompei. După cum se știe, cauza

principală a pierderilor volumice în pompă este diferența de presiune între cele două camere de aspirație și refulare. Pentru a elimina această sursă de abatere de la debitul teoretic au fost prevăzuți în instalație doi cilindri 6 și 7 de diametre și înălțimi egale, care creiază o presiune egală în cele două camere a pompei 2 prin înălțimile coloanelor de lichid h_1 și h_2.

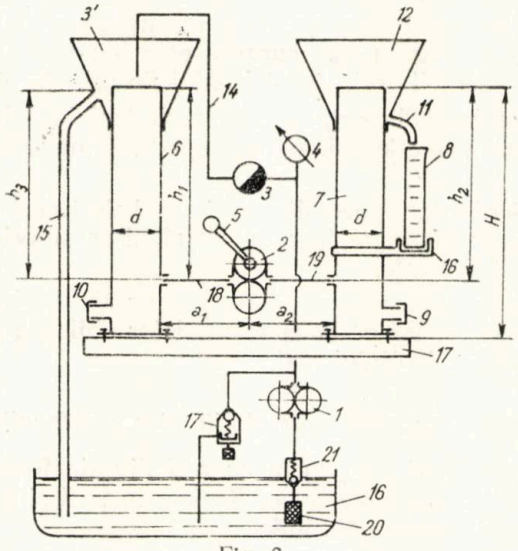


Fig. 6.

Eliminarea pierderilor la aspirație s-a făcut prin montarea pompei în poziție „înecată", iar diametrele și lungimea conductelor de aspirație 18 și refulare 19 sînt egale spre a nu avea diferențe de presiune suplimentare.

Antrenarea pompei s-a făcut manual de la maneta 5 pentru a elimina pierderile umplerii incompletă a „cupelor" pompei din cauza vîscozității lichidului și turației mari, care au loc în mod obișnuit prin antrenarea mecanică a pompei.

O problemă dificilă a fost menținerea unei coloane constante de lichid în cei doi cilindrii în tot timpul experiențelor. Pentru rezolvarea acestei probleme a fost nevoie de introducerea unui circuit hidraulic suplimentar compus din pompa 1 și droselul 3 cu care se reglează astfel debitul acestui circuit încît să compenseze volumul aspirat din cilindrul 6. Pîlnia 3 și conducta 15 servesc pentru a elimina posibilitatea creșterii coloanei de lichid peste înălțimea admisibilă H.

Lichidul refulat de pompă în cilindrul 7 este colectat în pîlnia 12 și se scurge în cilindrul gradat 8, cu care de fapt se face măsurarea debitului teoretic.

Verificarea experimentală a debitului teoretic calculat analitic efectuată la un număr de cîteva pompe cu roți dințate cu dantură dreaptă și înclinată a demonstrat o înaltă precizie de calcul a formulelor propuse, eroarea de calcul fiind sub 1%.

II. Calculul debitului real — Q_R

Pînă în prezent nu a fost studiat în suficientă măsură regimul de curgere prin „fantele labirint" ale pompelor cu roți dințate, în condițiile unor variații mari de presiune pe întreaga circumferință a roților, așa că pierderile care depind în foarte mare măsură de acest factor nu au putut fi precizate, în plus relațiile prezentate în literatura de specialitate, sînt deduse în ipoteza că regimul de curgere este laminar și că pierderile au loc în mod independent fie prin jocul frontal fie prin jocul radial.

În realitate regimul de curgere este turbulent iar pierderile au loc în mod simultan prin ambele jocuri, așa că separarea lor artificială nu coincide cu realitatea.

Calcularea pierderilor concomitent prin ambele jocuri (frontal și radial) duce la complicații foarte mari, lucru ce i-a făcut pe autorii care s-au ocupat cu aceste calcule să renunțe.

Avînd în vedere cele arătate, ne-am propus să studiem pe cale experimentală aceste pierderi, iar pe baza rezultatelor obținute să stabilim relații matematice de calcul a debitului real.

a) *Stabilirea parametrilor de studiu și a construcției pompei.*

Din mai multe tipuri de pompe cu roți dințate folosite în acționarea hidraulică a mașinilor-unelte ce se construiesc în țară și în străinătate, s-au ales două tipuri mai frecvent întîlnite.

Astfel s-a ales o pompă cu jocuri fixe și o pompă cu compensator automat al jocurilor frontale fig. 7.

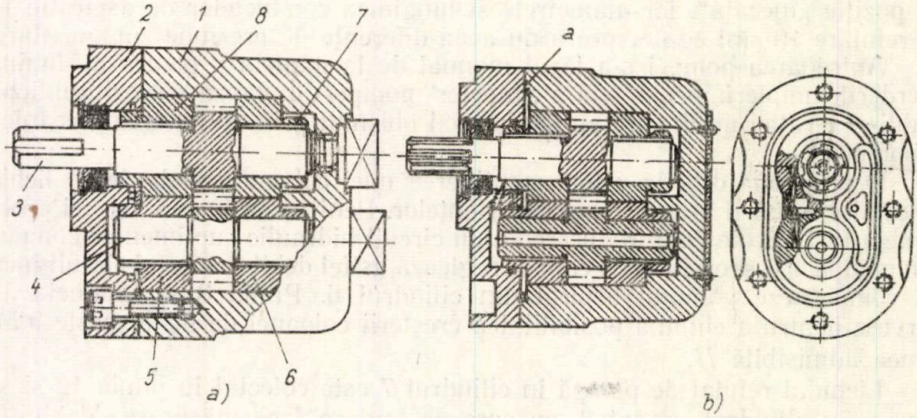


Fig. 7.

Piesele componente ale pompelor experimentale au fost selecționate cu minuțiozitate încadrîndu-se în toleranțe strîns (sub 5 μm) pentru a elimina pe cît posibil deformarea rezultatelor experimentale din cauza impreciziei de execuție și montaj.

La alegerea parametrilor de studiu, s-a avut în vedere gradul influenței lor asupra pierderilor volumice.

Cei mai importanți dintre acești parametri sînt: presiunea (p), vîscozitatea lichidului de lucru (ν), jocul radial (δr) și jocul frontal (δf).

Nu s-au luat în considerație pierderile la aspirație și pierderile prin linia de contact a dinților, deoarece acești parametri au o influență mai mică decît ceilalți parametri aleși.

Pierderile de debit la aspirație au fost eliminate montîndu-se pompa la nivelul lichidului din rezervorul de alimentare (pompa înecată) iar influența contactului nelinear dintre dinți a fost redusă substanțial prin prelucrarea îngrijită a danturii prin mortezare. Viteza unghiulară a rotorilor s-a menținut constantă (1500 rot/min).

Mărimea parametrilor studiați a fost stabilită în limite mai largi față de cele întîlnite frecvent la pompele cu roți dințate folosite în acționarea hidraulică a mașinilor-unelte. Astfel: presiunea s-a ales între 10 și 63 Kgf/cm^2; vîscozitatea uleiului între 10 și 100 c St; jocul frontal între 10 și 56 μm; jocul radial între 20 și 200 μm.

b) *Instalația experimentală și aparatajul folosit.*

Instalația experimentală a fost concepută în scopul efectuării încercărilor în limitele parametrilor de studiat.

Schema acestei instalații este reprezentată în fig. 8. Ea se compune din: motorul electric 2, pompa de încercare 3, droselul 6, rezervorul de alimen-

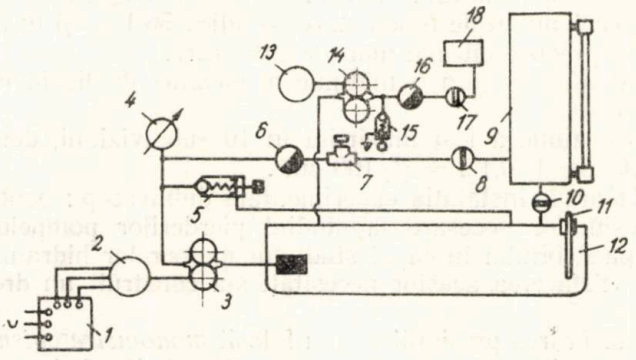


Fig. 8.

tare 12, rezervorul de măsurare al debitului 9, și aparatul de măsură al puterii 1. Pentru măsurarea presiunii din sistem este prevăzut manometrul 4, iar pentru măsurarea temperaturii lichidului este prevăzut termometrul 11.

În afară de acest circuit principal, instalația are un circuit secundar necesar schimbării lichidului din instalația experimentală, format din elementele 13, 14, 15, 16, 17, și 18.

În cele ce urmează se va prezenta pe scurt aparatajul folosit și caracteristicile acestuia.

Motorul electric principal asincron de $P = 7$ kW şi $n = 1460$ rot/min, a fost ales din considerentul asigurării unei puteri corespunzătoare presiunii maxime şi debitului pompei experimentale.

Înainte de montarea motorului electric în instalaţie, a fost determinat randamentul acestuia, lucru absolut necesar pentru cunoaşterea puterii efective consumate de pompă. Această determinare s-a făcut prin metoda frînării electromagnetice.

Măsurarea puterii consumată de pompă s-a efectuat cu ajutorul unei truse wattmetrice tip *Q W* II I cu o precizie de măsurare de 1% pentru voltmetre şi wattmetre şi 1,5% pentru ampermetre.

Referitor la pompele experimentale menţionăm că s-au utilizat două pompe prezentate în fig. 7.

Cea mai dificilă problemă care s-a pus a fost modificarea jocurilor radiale şi frontale, şi anume realizarea lor din punct de vedere tehnologic (jocuri de ordinul micronilor) şi mai ales a controlului valorilor realizate.

Pentru obţinerea jocului frontal, s-au efectuat mai multe încercări în urma cărora ne-am oprit asupra următoarei metode : montarea între capacul şi corpul pompei a unor garnituri din foiţă metalică calibrată de 10 şi 12 μm a căror grosime a fost riguros verificată la optimetru.

Pentru obţinerea jocului radial s-a adoptat metoda rectificării succesive a alezajului din corpul pompei „prin pătrundere" cu o piatră de o lăţime egală cu lăţimea rotorilor.

Ca rezervor de măsurare al debitului (9) s-a confecţionat un cilindru de 1200 mm lungime şi 230 mm diametru. Mărimea diametrului a fost aleasă ţinînd seama de două condiţii : în primul rînd de a asigura un volum necesar cel puţin pentru 1 minut de funcţionare — adică 50 l — şi în al doilea rînd de a asigura o precizie cît mai mare la măsurare.

Diametrul ales asigură o înălţime a coloanei de lichid de $\approx$ 20 mm pentru 1 litru.

Fiecare diviziune a fost împărţită în 10 subdiviziuni, deci precizia de măsurare fiind de $\pm$ 0,1 l $= \pm$ 100 cm^3.

Droselul 6 are în instalaţia experimentală dublu scop : pentru creerea în sistem a presiunilor necesare la studiul pierderilor pompelor precum şi pentru variaţia debitului în cazul studiului motoarelor hidraulice.

Pentru satisfacerea acestor necesităţi s-a construit un drosel cu fantă circulară.

Pentru măsurarea presiunilor s-au folosit *manometre obişnuite tubulare* cu diametrul 100, domeniul de măsurare 0—100 Kgf/cm^2 şi clasa de precizie 1,5.

Lichidul folosit pentru experienţe a fost ulei mineral din următoarele grupe :

a) ulei de transformator Tr 2004
b) ulei de turbină Tb 5003
c) ulei mineral 408
d) ulei mineral ×—400 care este format din 100 l ulei 410 şi 50 l ulei Tr 2004
e) ulei mineral ×—450 care este format din 50 l ulei 410 şi 100 l ulei Tr 2004

Cum s-a arătat mai sus domeniul de vîscozitate a fost ales între 10 și 100 *cSt*, adică 1,9 ÷ 14° E ceea ce înseamnă că domeniul este mult mai larg decît domeniul de vîscozitate folosit în sistemele hidraulice ale mașinilor-unelte, vîscozitate cuprinsă între 2 și 6°*E*. Cu toate că s-a avut la dispoziție un număr suficient de uleiuri, vîscozitățile acestora la temperaturile obișnuite la care s-au efectuat experiențele nu putea asigura încadrarea după o progresie geometrică a valorilor experimentale preconizate, iar în timpul experiențelor, cu toate măsurile luate, avea loc o variație de temperatură a lichidului, deci a vîscozității.

În consecință pentru a putea obține valori ale vîscozității necesare efectuării experiențelor precum și pentru cunoașterea variației vîscozității cu temperatura (necesară corectării rezultatelor experiențelor) a fost necesară analiza de laborator pentru stabilirea variației vîscozității cu temperatura $\nu = f(T)$.

Rezervorul de alimentare, termometrul și tahometrul folosite sînt cele obișnuite și nu necesită explicații suplimentare.

c) *Metoda de efectuare a experiențelor*

Scopul cercetării experimentare este de a determina influența pe care o au parametrii aleși asupra debitului real al pompei, sau în final asupra pierderilor volumice, cu măsurarea concomitentă și a consumului de putere.

După cum s-a arătat nu este posibilă separarea pierderilor volumice care au loc în pompă în funcție de diverși parametrii, deoarece aceste pierderi au loc concomitent prin toate jocurile pompei, deci între pierderi și parametrii arătați există o interdependență totală și nu se poate preciza care este valoarea absolută a pierderilor prin jocul radial sau prin cel frontal.

În consecință plecînd de la faptul real că există totuși posibilitatea de a stabili valoarea totală a pierderilor de debit în funcție de diverși parametrii (prin măsurare directă), se poate stabili gradul de influență al fiecărui parametru asupra debitului real, sau asupra pierderilor volumice.

Deci, se urmărește determinarea debitului real

$$Q_r = f(K, p, \nu, \delta_f, \delta_r). \tag{29}$$

Gradul de influență asupra debitului real a fiecăruia din parametrii relației (29) se poate stabili prin menținerea constantă a tuturor celorlalți parametrii, în timp ce se variază numai unul din ei. În acest fel se obțin:

$$\begin{aligned}
&Q_{r_1} = f_1(K_1 p) \text{ pentru } \nu = \text{const}; \ \delta_f = \text{const}; \ \delta_r = \text{const};\\
&Q_{r_2} = f_2(K_2 \nu) \text{ pentru } p = \text{const}; \ \delta_f = \text{const}; \ \delta_r = \text{const};\\
&Q_{r_3} = f_3(K_3 \delta_f) \text{ pentru } p = \text{const}; \ \delta_r = \text{const}; \ \nu = \text{const};\\
&Q_{r_4} = f_4(K_4 \delta_r) \text{ pentru } p = \text{const}; \ \delta_f = \text{const}; \ \nu = \text{const};
\end{aligned} \tag{30}$$

Numărul de experienţe total, necesar pentru studiul funcţiei (29) este mult mai mare decît pare la prima vedere, aceasta fiind în general egal cu produsul dintre numărul de experienţe pentru fiecare parametru înmulţit cu numărul parametrilor.

Adică în total au fost efectuate aproximativ 400 de experienţe fiind necesară, de exemplu, studierea comportării funcţiei $Q_{r_1} = f_1\ (K_1\ p)$ nu numai pentru ν = const, δf = const şi δr = const, ci pentru întreg domeniu de vîscozităţi, de jocuri radiale şi frontale. Acelaşi lucru s-a făcut şi pentru Q_{r_2}, Q_{r_3} şi Q_{r_4}.

Acest număr mare de experienţe este necesar pentru a stabili domeniul de valabilitate al relaţiilor matematice care vor fi deduse pe baza experienţelor efectuate.

Metoda de efectuare a experienţelor este cunoscută, precizăm numai că determinarea debitului real pentru fiecare experienţă s-a făcut prin măsurarea timpului de umplere a unui volum constant V_0 care este mai comodă şi dă o precizie mai mare decît măsurarea obişnuită a volumului într-un timp constant.

Cunoscînd volumul de ulei ($V_0 = 20$ l) şi timpul t în care a fost realizat acest volum, putem determina debitul real al pompei :

$$Q_r = \frac{V_0}{t}\ [\text{l/s}] = \frac{60\ V_0}{t}\ [\text{l/min}]\ . \tag{31}$$

d) *Prelucrarea rezultatelor experimentale*

Pe baza datelor experimentale s-au construit grafice pentru funcţiile (30) precum şi pentru alte valori intermediare din domeniul respectiv.

Se constată că în coordonate carteziene aceste funcţii reprezintă curbe cu pante negative sau pozitive.

Efectuîndu-se încercări de reprezentare a acestei funcţii în coordonate simple şi dublu logaritmice, se constată că aceste curbe pot fi liniarizate în coordonate dublu logaritmice.

Se constată din fig. 9, 10, 11, 12, că în intervalul de presiuni, jocuri şi vîscozităţi stabilite anterior, dreptele D_1, D_2, D_3, D_4 care reprezintă variaţia debitului real în funcţie de diverşi parametri sînt paralele, însemnează că întreg domeniul studiat va fi satisfăcut de o anumită relaţie matematică care va fi stabilită ulterior.

La funcţia $Q_r = f_2(\nu)$, adică variaţia debitului real cu vîscozitatea dată în fig. 10 se constată că dreptele D_1, D_2, . . . D_6 au o uşoară convergenţă (formă de evantai).

Din verificările efectuate, abaterile de la paralelism în domeniul presiunilor $16 \div 50$ Kgf/cm^2 şi a jocurilor frontale de $10 \div 40\ \mu$m nu depăşesc 3—4%, pentru valorile extreme.

Abaterile cresc sensibil înspre valorile extreme ale domeniului. Datorită acestui fapt domeniul valorilor stabilite anterior s-a îngustat, totuşi şi acest

domeniu satisface pe deplin cazurile întâlnite în construcția pompelor cu roți dințate pentru instalațiile hidraulice ale mașinilor-unelte.

De menționat este faptul că paralelismul dreptelor pentru toate cazurile s-a referit la dreptele reprezentînd valorile medii pentru fiecare parametru.

Aceste valori medii pentru cei patru parametrii sînt:

$$p = 25 \text{ Kgf/cm}^2; \quad \nu = 32 \text{ cSt}; \quad \delta_f = 32\,\mu\text{m}; \quad \delta_r = 100\,\mu\text{m}.$$

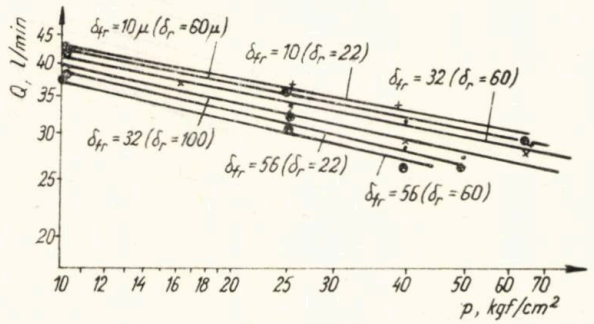


Fig. 9.

Criteriul care a stat la baza alegerii acestor valori medii a fost un criteriu statistic, bazat pe cazurile cele mai frecvente întîlnite în practica industrială, acest lucru fiind confirmat de cercetările experimentale.

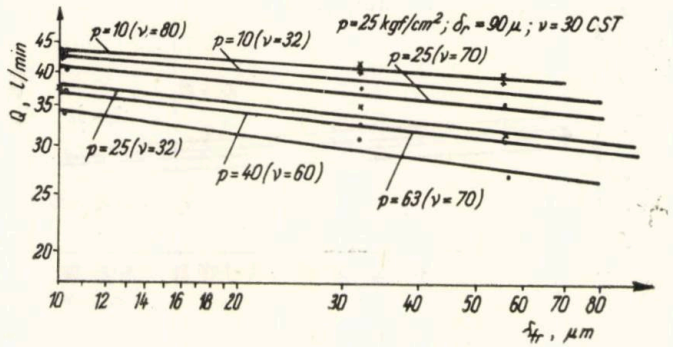


Fig. 10.

Trasarea dreptelor din fig. 9 ... 12 s-a făcut prin metoda obișnuită: metoda interpolării punctelor respective. Această metodă introduce oarecari erori față de variația reală a debitului cu diverși parametri.

Problema care s-a pus la prelucrarea rezultatelor experimentale a fost stabilirea unei relații matematico-empirice, care să reflecte cel mai bine fenomenul studiat.

Din analiza diverselor variante posibile, rezultă că pentru cazul liniarizării prin coordonate dublu logaritmice, relația matematică cea mai adecvată este o expresie de formă.

$$Q_r = K\, p^{\alpha_1}\, \nu^{\alpha_2}\, \delta_f^{\alpha_3}\, \delta_r^{\alpha_4}. \tag{32}$$

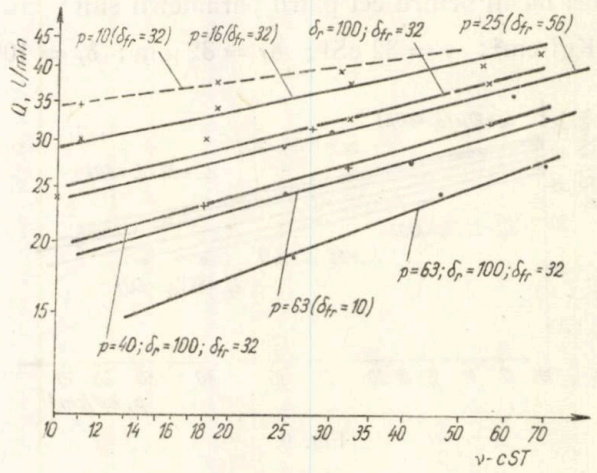


Fig. 11.

Pentru eliminarea erorilor, care au fost introduse la interpolarea rezultatelor, determinarea coeficienților și exponenților se va face prin metoda celor mai mici patrate (metoda Gauss).

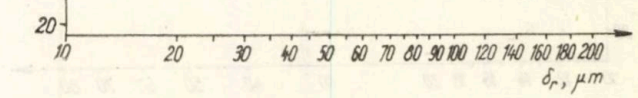


Fig. 12

1) *Determinarea coeficienților și exponenților.*

În primul rînd se logaritmează expresia 32

$$\log Q_r = \log K + \alpha_1 \log p + \alpha_2 \log \nu + \alpha_3 \log \delta_f + \alpha_4 \log \delta_r. \tag{33}$$

Pentru determinarea constantelor și exponenților se dau pe rînd valori constante termenilor trei, patru și cinci din membrul doi al expresiei, consi-

derînd variabil numai termenul doi (p). Apoi prin permutări circulare se variază sau se țin constante ceilalți termeni, obținîndu-se expresiile:

$$\begin{aligned} \log Q_{r_1} &= \log K_1 + \alpha_1 \log p \\ \log Q_{r_2} &= \log K_2 + \alpha_2 \log \nu \\ \log Q_{r_3} &= \log K_3 + \alpha_3 \log \delta_f \\ \log Q_{r_4} &= \log K_4 + \alpha_4 \log \delta_r \end{aligned} \tag{33'}$$

Aceste expresii reprezintă niște drepte de forma

$$y = a\, x^b$$

adică:

$$Q_{r_1} = K_1 p^{\alpha_1} \; ; \quad Q_{r_2} = K_2 \nu^{\alpha_2} \; ; \quad Q_{r_3} = K_3 \delta_f^{\alpha_3} \; ; \quad Q_{r_4} = K_4 \delta_r^{\alpha_4} \tag{34}$$

Pe baza rezultatelor experimentale au fost determinate valorile coeficienților K_1, K_2, K_3, K_4, și exponenților α_1, α_2, α_3, α_4, cu relațiile:

$$\begin{aligned} K_i = a_i &= \frac{\Sigma x_i^2 \, \Sigma y_i - \Sigma x_i y_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \\ \alpha_i = b_i &= \frac{n \Sigma x_i y_i - \Sigma x_i y_i}{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \end{aligned} \tag{35}$$

în care

x este log valorii parametrului variabil (p, ν, δ_r, δ_f)

y este log debitului (Q_{r_1} Q_{r_2} Q_{r_3} Q_{r_4})

n numărul valorilor pe care le ia fiecare parametru.

În urma prelucrării datelor obținute experimental cu ajutorul relațiilor de mai sus sau obținut pentru K_i și α_i următoarele valori

K_1	1,8587144	α_1	— 0,2536636
K_2	1,1553535	α_2	0,2367860
K_3	1,6963600	α_3	— 0,1178660
K_4	1,6084224	α_4	— 0,0369442

2) *Trasarea dreptelor D_1, D_2, D_3, D_4 și obținerea expresiei finale a debitului real.*

Cu valorile obținute din calculele prezentate se trasează dreptele ale căror ecuații sînt scrise în relația (33').

Cele patru drepte sînt trasate pe același grafic reprezentat cu fig. 13.

Expresia empirică a debitului real obținută pe baza experiențelor și calculelor efectuate, are forma :

$$Q_r = \frac{K\, \nu^{0,236}}{p^{0,253}\, \delta_f^{0,118}\, \delta r^{0,037}}. \tag{36}$$

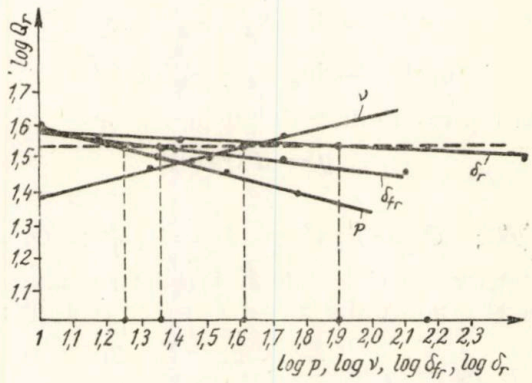


Fig. 13

Această expresie reprezintă o ecuație cu o singură necunoscută constanta K, care se determină în felul următor :

Se alege pe ordonata Q_r logaritmul unui debit real oarecare Q_r, din fig. 13 de exemplu 1,531 care reprezintă un debit real de 34 l/min. Ducîndu-se din acest punct o dreaptă paralelă cu abscisa, aceasta va întretăia dreptele p, ν, δ_f și δ_r într-un punct oarecare căruia vor corespunde în abscisă valorile p_0, ν_0, δ_{f_0}, δ_{r_0}. Înlocuind aceste valori în expresia (36) și logaritmînd se obține :

$$\log Q_r = \log K + 0{,}236 \log \nu - 0{,}253 \log p - \\ - 0{,}118 \log \delta_f - 0{,}037 \log \delta_r \tag{37}$$

sau

$$\log K = \log Q_r + 0{,}253 \log p + 0{,}118 \log \delta_f + \\ + 0{,}037 \log \delta_r - 0{,}236 \log \nu. \tag{38}$$

Înlocuind valorile concrete pentru p_0, ν_0, δ_{f_0}, δ_{r_0} se obține :

$$\log K = 1{,}531 + 0{,}253 \cdot 1{,}250 + 0{,}118 \cdot 1{,}360 + \\ + 0{,}037 \cdot 1{,}90 - 0{,}236 \cdot 1{,}610 = 1{,}69807$$

Rezultă

$K = 49{,}89666$

În final expresia debitului real va fi de forma :

$$Q_r = \frac{49{,}8966\, \nu^{0,236}}{p^{0,253} \cdot \delta_f^{0,118} \cdot \delta_r^{0,037}} \quad [l/\text{min}] \tag{39}$$

în care

ν este vîscozitatea lichidului [cSt]
p — presiunea de lucru [Kgf/cm^2]
δ_r — jocul radial al pompei [μm]
δ_f — jocul frontal al pompei [μm]

Trebuie arătat că în constanta K sînt incluși o serie de parametrii constructivi și funcționali ca : viteza constantă a rotorilor (n = 1500 rot/min) ; diametrul rotorilor 50 mm, modulul, elementele corijării etc.

Abaterile mari de la aceste valori, introduc erori în calculul efectuat pe baza relațiilor propuse.

3) *Determinarea erorilor debitului real*

Avînd în vedere faptul, că relațiile de calcul propuse au fost stabilite pe baza unor valori medii a fiecărui parametru studiat experimental, a fost necesară verificarea erorilor de calcul pe care aceste relații le dau pentru cazul valorilor minime și maxime.

Cunoscînd debitul real prin măsurare și calculînd debitul real cu ajutorul relației (39) s-au putut determina erorile de calcul ale debitului real.

A reieșit din calcul efectuat că eroarea de debit dată de relațiile propuse este sub 4% pentru domeniile de variație a parametrilor indicate mai sus, sub 10% pentru valori apropiate imediat superioare extremelor domeniilor și peste 10% pentru valori mai depărtate de extremele domeniilor de variație a parametrilor. În concluzie relația de calcul al debitului real propusă satisface cu suficientă precizie domeniul stabilit.

4) *Determinare pierderilor și a randamentului volumic al pompelor cu roți dințate.*

Debitul real, dat de pompa cu roți dințate în anumite condiții de funcționare a ei cu anumiți parametri dați, poate fi calculat cu relația (39). Avînd debitul real calculat și cunoscînd valoarea debitului teoretic al pompei determinat cu una din relațiile de calcul ale debitului teoretic a pompelor cu roți dințate se pot determina conform relației (1) pierderile de debit sau pierderile volumice astfel :

$$\Delta Q = 2\pi\lambda m^3 n (\varphi_{\xi z} - K_{\pi\alpha}\,\psi_{\varepsilon z}) - \frac{49{,}896\,\nu^{0{,}236}}{p^{0{,}253}\cdot\delta_f^{0{,}118}\cdot\delta_r^{0{,}037}} \tag{40}$$

$$\eta_v = \frac{Q_R}{Q_T} = \frac{Q_T - \Delta Q}{Q_T} = 1 - \frac{\Delta Q}{Q_T} = 1 -$$

$$- \frac{2\pi\lambda m^3 n (\varphi_{\xi z} - K_{\pi\alpha}\,\psi_{z\varepsilon}) - \dfrac{49{,}896\,\nu^{0{,}236}}{p^{0{,}253}\,\delta_f^{0{,}118}\,\delta_r^{0{,}037}}}{2\pi\lambda m^3 n (\varphi_{\xi z} - K_{\pi\alpha}\,\psi_{z\varepsilon})} \tag{41}$$

Concluzii

1. Problema determinării debitului teoretic și celui real la pompele cu roți dințate, care au început să aibă o largă utilizare în cele mai variate sisteme hidraulice de acționare și comandă, este de mare actualitate atît pentru calculul și proiectarea acestor pompe cît și pentru încercările experimentale.

2. Formulele obținute pentru calculul debitului teoretic al pompelor cu roți dințate reușesc să cuprindă toți parametrii care influențează acest debit precum și fenomenul de comportare a lichidului strivit, ceea ce a dus la obținerea unei mari precizii de calcul ($\varepsilon < 1\%$) lucru confirmat de verificările experimentale.

3. Pe baza analizei diverselor tipuri de danturi și a elementelor lor comune s-a obținut o metodă unică de calcul și o expresie generală cu ajutorul căreia se pot determina debitele teoretice pentru tipurile uzuale de pompe și pulsațiile acestor debite, momentul de răsucire și puterea pompei.

4. Relația de calcul exponențială a debitului real, elaborată pe baza unui bogat material experimental, are o precizie bună într-un domeniu suficient de larg. Pe baza ei se pot elabora diagrame sinoptice de mare utilitate pentru proiectanții de pompe.

5. Relațiile de calcul ale debitului teoretic și cele ale debitului real permit determinarea cu mare ușurință și precizie a pierderilor volumice și a randamentului volumic la pompele cu roți dințate.

Catedra de mașini-unelte și scule
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Hagen Karl:* Volumenverhältnisse, Wirkungsgrade und Druckschwankungen în Zahnradpumpen. Berlin 1961.

2. Ribkin *E. A., Usov A. A.:* Sesterennie nasosi dlia metalorejuşcile stankov Moscova 1960.

3. *Popov, Deciu D, Mitrică I.:* Contribuții la calculul pierderilor radiale în cazul pompelor și motoarelor volumice „Studii și cercetări de Mecanică aplică" nr. 2 T 15 1964.

4. *Oprean A:* Considerații cu privire la calculul debitului teoretic al pompelor cu roți dințate „Metalurgia și construcția de mașini" nr. 11 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

TEHNOLOGIA CONSTRUCȚIILOR DE MAȘINI

C. Z. : 621.91.07 : 621.919.3

CONSIDERAȚIUNI ÎN LEGĂTURĂ CU CREȘTEREA PRECIZIEI DE PRELUCRARE, ÎN CAZUL AȘCHIERII CU SECȚIUNE VARIABILĂ *

I. GAVRILAȘ

În Tehnologia Construcției de Mașini diversele metode de prelucrare prin așchiere, după aspectul pe care îl are așchia se pot clasifica : în prelucrări prin așchiere cu secțiune constantă și prelucrări cu secțiune variabilă.

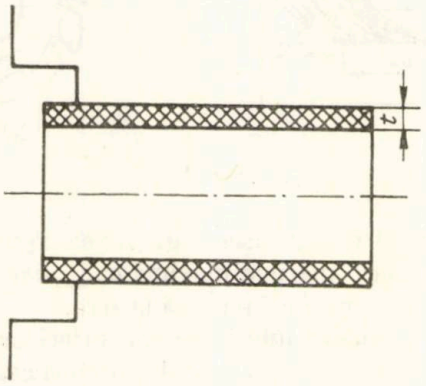


Fig. 1

Metodele de prelucrare, cu secțiune constantă sînt acele prelucrări la care secțiunea așchiei rămîne aproximativ egală în timpul prelucrării.

Cel mai caracteristic exemplu îl constituie strunjirea longitudinală (fig. 1) sau frontală. Se consideră că adaosul de prelucrare a semifabricatului este pe cît posibil uniform. Secțiunea uniformă de așchie există și în cazul prelucrării prin rabotare, broșare, filetare, mortezare etc.

O altă grupă o constituie prelucrările la care secțiunea așchiei este variabilă în timpul procesului de așchiere. Așa de exemplu la prelucrarea

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 28—30 mai 1965.

pieselor prin frezare, rectificare, broșarea, corpurilor de revoluție, filetare în vîrtej etc.

La prelucrarea pieselor din grupa a doua secțiunea aşchiei variază pe dinte în raport de mișcarea relativă a sculei și piesei. Așa cum reiese din (fig. 2 a și b) această variație a secțiunii aşchiei poate fi foarte diferită în funcție de metoda de prelucrare.

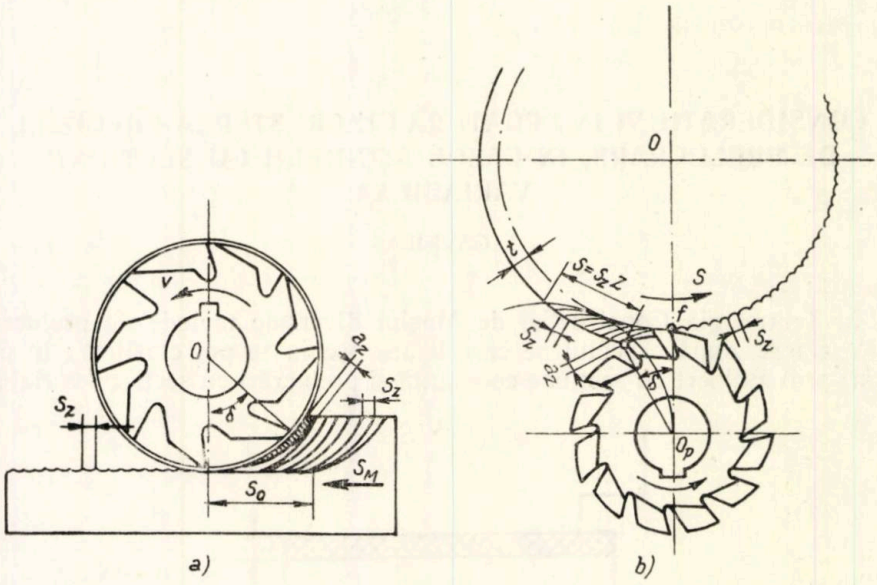


Fig. 2

Astfel în cazul frezării contrasens, grosimea aşchiei a_z variază de la o mărime minimă zero la o mărime maximă $a_{z\,max}$ iar la frezarea în acelaș sens variază invers de la o mărime maximă la zero.

În cazul broșării circulare interioare sau exterioare contra sens sau în acelaşi sens secțiunea aşchiei variază, de asemenea, de la maximum la minimum.

La filetarea în vîrtej secțiunea aşchiei variază de la valoarea minimă la maximă și apoi scade din nou la minimă (fig. 3).

Rezultă că variația secțiunii aşchiei este foarte diferită de la o metodă de prelucrare la alta, ceea ce influențează în mare măsură precizia de prelucrare. De aceea ne propunem să determinăm în cazul broșării circulare (spirale) la exterior următoarele :

a. Care sînt erorile de prelucrare datorită generării suprafeței.

b. Care sînt erorile de prelucrare datorită deformațiilor elastice ale sistemului.

În aceste cazuri deosebim următoarele situații : în metal pot fi angajate mai multe muchii aşchietoare simultan şi este cazul cel mai frecvent la

frezare, broșare etc., sau în metal este angajată numai o muchie tăietoare, un singur dinte dar acești dinți sînt înclinați, cu un unghi $\lambda \neq 0$ (cazul frezelor cilindrice).

Deși secțiunea așchiei este variabilă pe dinte, mărimea forței de așchiere este și ea variabilă însă deformațiile elastice ale sistemului vor fi constante și nu variabile. Aceasta datorită faptului că suma forțelor componentelor de

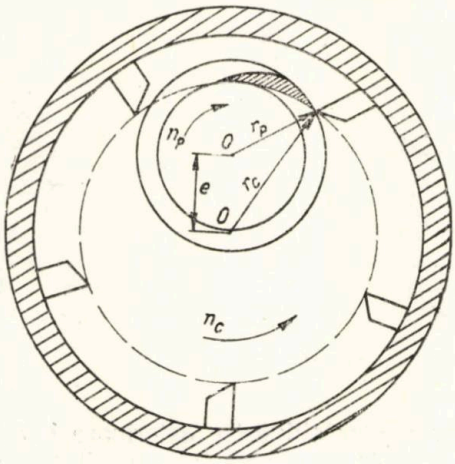


Fig. 3

așchiere ne dă o componentă constantă, la sculă și mașină care va menține o deformație elastică a sistemului, de asemenea, constantă independent de variația secțiunii așchiei pe dinte.

În cazul filetării în vîrtej, broșării circulare (spirale) etc., în general la prelucrare este angajată în metal un singur cuțit la care unghiul de înclinare este zero sau foarte mic 2—3°. In acest caz situația se schimbă mult față de cazul precedent, datorită faptului că obținem o precizie de prelucrare mult mai ridicată, deoarece deformațiile elastice ale sistemului tehnologic vor depinde de variația secțiunii așchiei ajung de la valoarea maximă la valori egale cu zero. Aceasta datorită faptului, că deformațiile elastice ale sistemului după direcția forțelor componente P_z, P_y și P_x, va urma aceiași lege de variație ca și variația secțiunii așchiei.

În cele ce urmează se vor prezenta rezultatele unor cercetări teoretice și experimentale, în cazul prelucrării suprafețelor cilindrice prin broșare circulară (spirală).

1. Secțiunea așchiei la broșarea suprafețelor cilindrice exterioare

La prelucrarea suprafețelor cilindrice interioare și exterioare prin broșare cu broșe circulare putem avea întotdeauna angajați unul sau doi dinți în stratul de metal. Aceasta depinde de piesa pe care o prelucrăm precum și de construcția sculei.

Atunci cînd scula este monobloc pot fi angajaţi în piesă mai mulţi dinţi, datorită distanţei mici între dinţi, iar în cazul cînd scula este cu dinţi demontabili în general se angajează în metal un singur dinte.

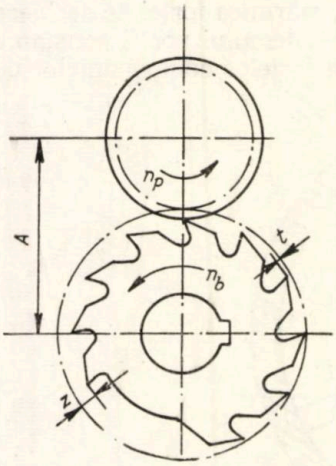


Fig. 4.

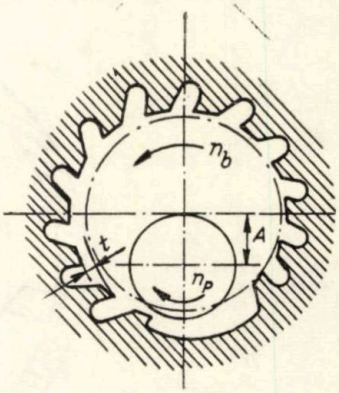


Fig. 5

La broşarea suprafeţelor cilindrice exterioare broşa circulară poate fi cu dinţii la exterior (fig. 4) sau poate fi cu dinţii spre interior (fig. 5). În cazul broşării suprafeţelor cilindrice interioare scula nu poate avea decît dinţii la exterior (fig. 6). În ultimul caz în general scula se execută numai monobloc, din cauza dimensiunilor mici pe care trebuie să le aibă. Aşa după cum reiese din figuri în toate cele trei cazuri indiferent de sensul de prelucrare, secţiunea aşchiei este variabilă, aşa cum s-a enunţat mai sus.

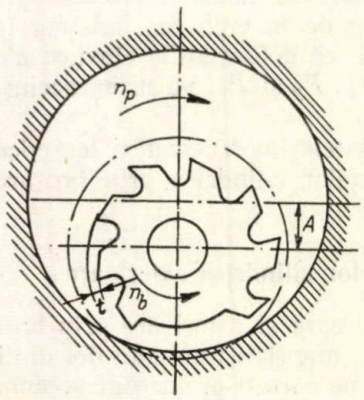


Fig. 6

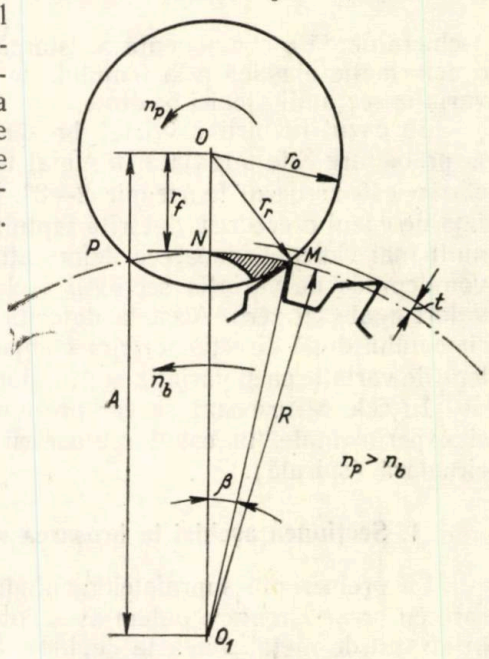


Fig. 7

La broșarea suprafețelor cilindrice cu broșa circulară cu cuțite la exterior grosimea așchiei va varia de-a-lungul arcului MN (fig. 7) corespunzător variației continue a razei semifabricatului r_v, [1], care se poate exprima ca o funcție :

$$\frac{dr_v}{dt} = f\left(\frac{ds_c}{dt}\right) \tag{1}$$

Deci variația razei r_v va da tocmai variația grosimii așchiei care depinde direct de viteza de deplasare a sculei. Deci avansul radial s_r este în funcție de avansul circular al sculei s_c.

Pentru a se asigura condiții normale de desfășurare a procesului de așchiere la care se obține forma corespunzătoare a piesei care se prelucrează este necesar ca turația piesei n_p să fie mai mare ca turația broșei $n_p > n_b$. Astfel din cele două mișcări relative luate în acest caz la periferia piesei se va genera o hipocicloidă.

Din triunghiul OMO_1 (fig. 7), rezultă valoarea razei r_v :

$$r_v = \sqrt{A^2 + R^2 - 2AR\cos\beta} \tag{2}$$

sau

$$r_v = \sqrt{(A-R)^2 + 2AR(1-\cos\beta)} \tag{3}$$

$$r_v = \sqrt{r_f^2 - 2AR(1-\cos\beta}$$

unde :

A — distanța dintre centrul broșei și piesei
R — raza de la centrul broșei pînă la muchia așchietoare a dintelui
β — unghiul format între A și R
r_v — raza variabilă a semifabricatului
r_f — raza finală a piesei prelucrate

Așa după cum se observa relația (3) reprezintă legea de mișcare a fiecărui punct de pe muchia așchietoare și este tocmai ecuația hipocicloidei. Schimbarea valorii unghiului β este proporțională cu avansul circular al broșei mm/rot, iar mărimea lui în radiani se exprimă :

$$\beta = \frac{s_c}{R} \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{s_c}{R} n \tag{4}$$

unde : n — numărul de rotații.

Derivînd ecuația (3) în raport cu timpul se obține tocmai viteza de deplasare a sculei pe direcția radială adică tocmai avansul radial s_r. Acesta va corespunde variației grosimii așchiei pe dinte a_z în timpul prelucrării. Astfel rezultă :

$$\frac{dr_v}{dt} = a_z = \frac{AR\sin\beta\,\frac{d\beta}{dt}}{\sqrt{r_f^2 + 2AR(1-\cos\beta)}} \tag{5}$$

sau

$$\frac{dr_v}{dt} = a_z = \frac{AR}{r_v} \sin \beta \frac{d\beta}{dt}. \tag{6}$$

Din această ecuație (6) rezultă că grosimea așchiei pe dinte este variabilă după o sinusoidă iar mărimea ei depinde direct de valoarea variabilă a unghiului β — adică de rotirea sculei.

La începutul prelucrării se poate observa (fig. 7) că unghiul β are valoarea maximă și corespunde punctului M apoi ajunge egal cu zero în punctul N cînd procesul de așchiere se termină iar grosimea așchiei ajunge să fie zero. Aceasta are o influență deosebit de mare asupra îmbunătățirii preciziei de prelucrare a pieselor.

2. Erori de prelucrare datorită generării suprafeței

Precizia de prelucrare în cazul broșării circulare în afară de o serie de factori ca: uzura sculei, deformații termice, rigiditatea sistemului, etc., este influențată în mare măsură de modul și dinamica de generare a suprafeței.

Așa cum s-a arătat mai sus, eroarea de prelucrare datorită generării suprafeței rezultă din aceea că hipocicloida are maxima la începutul prelucrării și ajunge la valoarea zero cînd trece linia de centru 00_1 sau punctul N (fig. 7) cînd începe să se descrie cea de a doua ramură a hipocicloidei.

De aici reiese că teoretic piesa are mărime minimă numai într-un punct acesta ar fi punctul N, iar toate celelalte puncte vor fi dispuse simetric pe ramurile hipocicloidei, și în locurile de intersecție a lor se vor afla punctele cu raza maximă de centru. În acest caz mărimea erorii $\Delta\Phi_g$ o determină ca diferență între raza variabilei r_v și raza finită r_f în punctul N. Astfel rezultă eroarea :

$$\Delta\Phi_g = r_v - r_f. \tag{7}$$

Introducînd valoarea unghiului β în formula (3) și scăzînd din raza r_v mărimea razei r_f în punctul N se obține mărimea reală a erorii de prelucrare $\Delta\Phi_g$. În această situație este mai practic să înlocuim valoarea cos. β cu sin. β. Astfel :

$$1 - \cos\beta = 2\sin^2\frac{\beta}{2} \tag{8}$$

introducînd această valoare în formula (3) obținem

$$r_v = \sqrt{r_f^2 + 4AR\sin^2\frac{\beta}{2}}. \tag{9}$$

Dezvoltînd expresia (9) și oprindu-ne la primii doi termeni cu suficientă precizie obținem :

$$r_v \approx r_f + \frac{2AR\sin^2\frac{\beta}{2}}{r_f} - \frac{2A^2R^2\sin^4\frac{\beta}{4}}{r_f^3}; \tag{10}$$

La valori mici a lui $\frac{\beta}{2}$ relația (10) devine:

$$r_v = r_f + \frac{AR\beta^2}{2r_f} - \frac{A^2R^2\beta^4}{8r_f^3}. \tag{11}$$

Înlocuim în această expresie valoarea lui β din formula (4) și rezultatul obținut îl introducem în formula (7) obținem:

$$\Delta\varnothing_g = r_v - r_f = \frac{AR s_c^2}{8r_f R^2} - \frac{A^2R^2 s_c^4}{128 r_f^3 R^4} \tag{12}$$

de unde rezultă:

$$\Delta\varnothing_g = \frac{A s_c^2}{8r_f R} - \frac{A^2 s_c^4}{128 r_f^3 R^2} \text{ [mm]}. \tag{13}$$

Din formula (13) se poate observa că valoarea termenului al doilea este mică. Ca urmare ea poate fi neglijată în calcule. Atunci formula de determinare a erorii de generare devine:

$$\Delta\varnothing_g = \frac{A s_c^2}{8r_f R} \text{ [mm]}. \tag{14}$$

Analizînd această formulă se poate observa că cu cît raportul $\frac{A}{R}$ și s_c sînt mici precum și r_f mare, cu atît va rezulta o eroare de generare în timpul prelucrării mai mică.

Un caz particular îl avem atunci cînd A devine infinit, adică tocmai cazul cînd avem broșă dreaptă, adică raportul $\frac{A}{R}$ devine egal cu 1.

$$\frac{A}{R} = \frac{R + r_f}{A} \tag{15}$$

deci valoarea lui este egală cu 1, iar formula (14) devine astfel:

$$\Delta\varnothing_g = \frac{s_c^2}{8r_f} \text{ [mm]}. \tag{16}$$

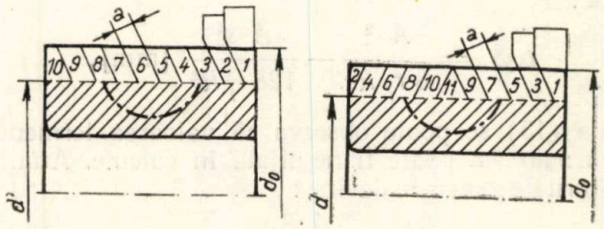
Calculînd eroarea de generare cu valori caracteristice R, A, r_f și s în cazul concret al mașinii pe care s-au făcut experiențele la prelucrarea unor cămăși de rulmenți unde valoarea lui $A = 258{,}16$ mm și raza r_f variază între limitele 35—25, iar R rezultă ca diferență între A și r_f. ($R = A - r_f$), și care variază de la dinte la dinte în limitele 233,16 mm pînă la 221,16 mm. De asemenea, și avansul circular s_c a putut varia între limitele 0,4 mm/rot pînă la 4 mm/rot. În acest caz s-a putut determina care este valoarea maximă și minimă a erorii de generare pentru diverse valori a avansului circular. Din calcule rezultă:

$\Delta\varnothing_g = 0{,}08825$ mm pentru avans 4 mm/rot
$\Delta\varnothing_g = 0{,}00104$ mm „ „ 0,4 mm/rot.

Din calculele efectuate se poate observa că erorile datorită generării suprafeței sînt în general mici. În cadrul experiențelor efectuate cu s_c în limitele 0,4—2,5 mm/rot ca urmare și erorile rezultate variază în limitele 0,001—0,05 mm.

Ca urmare la aceasta, se observă că erorile de prelucrare datorită generării sînt mici, totuși influențează într-o măsură destul de mare precizia de prelucrare. Aceasta mai cu seamă atunci cînd se lucrează cu avansuri mari. De aici rezultă că precizia de prelucrare la broșare circulară crește în raport de micșorarea avansului circular.

Tabel 1



3. Deformațiile elastice ale sistemului tehnologic

Și în cazul broșării circulare, cele mai mari deformații ale sistemului tehnologic care influențează în cea mai mare măsură precizia de prelucrare, sînt deformațiile de așchiere după forța componentă P_y. De asemenea, rezultă deformații mari la sculă, și după direcția componentei P_z (fig. 7), care dă deformații de răsucire la axul sculei, care influențează în mică măsură precizia ci în mare parte calitatea suprafeței prelucrate.

Ținînd seama că punctul de încovoiere al cuțitului coincide cu axa de rotire 0 a broșei (fig. 7), rezultă că eroarea de prelucrare datorită deformațiilor elastice după direcția forței de așchiere P_z poate fi neglijată practic influența ei fiind foarte mică.

Însă deformațiile sistemului elastic după direcția componentei P_y ajung să fie suficient de mari pentru ca să dea erori de prelucrare însemnate în ceea ce privește creșterea diametrului ca urmare a creșterii distanței A dintre axe, deci a creșterii corespunzătoare a deformațiilor axului mașinii Δ_a și a deformațiilor axului broșei circulare Δ_b (fig. 8). Deci distanța dintre axe devine în acest caz:

$$A_1 = A + \Delta_a + \Delta_b. \tag{17}$$

In această relație se observă că s-au neglijat o serie de deformații mici ca cea a cuțitului, a blocului cuțit, a discului broșei etc., considerată neglijabile în prima aproximație.

Deoarece grosimea așchiei variază după o lege sinusoidală așa cum s-a constatat mai înainte (a se vedea formula 6) și mărimea forțelor componente P_x, P_y, P_z, vor urma aceiași lege de variație. De aici rezultă că deformațiile maxime ale sistemului vor fi la începutul așchierii cînd sec-

țiunea de așchie este maximă, deci și valoarea forței P_y este tot maximă. Apoi aceste deformații scad dealungul arcului MN pînă ajung la valoarea O cînd secțiunea așchiei devine 0. Aceasta corespunde tocmai punctului N care se află pe linia centrelor 00_1, adică tocmai punctul maxim al hipocicloidei, ceea ce corespunde momentului în care piesa capătă dimensiunea finală de prelucrare.

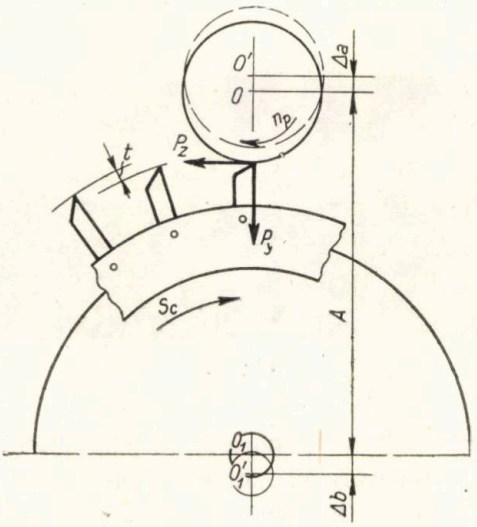


Fig. 8

În concluzie, în acest caz de broșare circulară deformațiile elastice ale sistemului nu au o influență asupra preciziei de prelucrare, adică erorile de prelucrare $\Delta\Phi_d$ datorită deformațiilor elastice ale sistemului sînt egale cu zero. Ca urmare precizia de prelucrare prin această metodă de broșare circulară este ridicată.

Desigur această concluzie este valabilă în cazul cînd avem un singur dinte angajat și mărimea unghiului de înclinare a muchiei tăietoare $\lambda = 0$ sau foarte mic.

Experiențele efectuate de autor la Institutul Bauman din Moscova la prelucrarea cămășilor de rulmenți prin broșare cu broșe circulare cît și rezultatele obținute la Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" din București, la broșarea melcilor globoidali, au confirmat pe deplin aceste concluzii.

Astfel pe oscilograma din fig. 9 se observă curbele caracteristice pentru componenta P_z (curba 1), P_y (curba 2) și pentru putere (curba 3) pentru fiecare dinte în parte. Această oscilogramă a fost realizată la broșarea în același sens a căii de rulare a cămășilor de rulmenți cu cuțite profilate avînd $\lambda = 0$.

Se poate observa pe oscilogramă că forțele de așchiere P_z și P_y sînt la începutul așchierii mici, apoi cresc și ating valoarea maximă undeva pe lungimea arcului MN (fig. 7) ca apoi să scadă la zero cînd ajunge în punctul N.

De subliniat faptul că față de concluziile teoretice apare o neconcordanță și anume la începutul așchierii forțele P_z și P_y nu au valorile maxime, așa cum a rezultat din calcul. Această neconcordanță apare din cauză că la început cuțitul nu se poate infige în metal pe toată grosimea așchiei ci sînt necesare una pînă la două ture ale piesei pînă cînd se atinge grosimea maximă de așchiere.

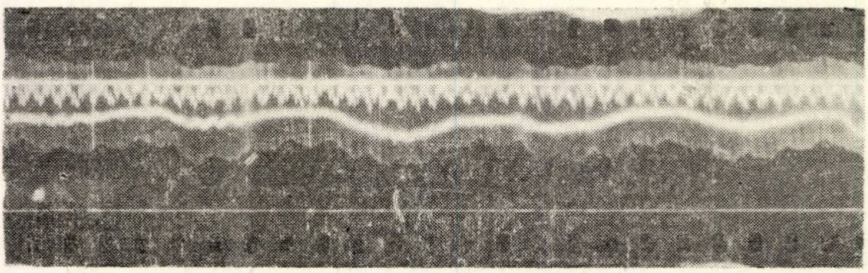


Fig. 9.

Măsurarea experimentală a mărimii forțelor P_z și P_y în cazul broșării a confirmat calculul teoretic. Astfel mărimea forței P_y și P_z măsurate cu ajutorul dinamometrelor tensometrice au înregistrat mărimi apropiate de cele teoretice. În tabela nr. 1 sînt prezentate mărimea forței P_z în cazul broșării cu diverse avansuri unde se poate observa că mărimea lor variază de la dinte la dinte datorită variației lățimii $a' = 2 \div 3{,}5$ mm, iar adîncimea $t = 2$ mm a fost aproximativ constantă. De subliniat că în tabel sînt prezentate numai mărimile maxime ale forței P_z (v. oscil. fig. 9). Determinările au arătat că componenta P_y ajunge să aibă valoare mare în cazul broșării circulare. S-a stabilit că în funcție de caracteristicile sculei raportul P_y și P_z ajunge să fie $\frac{P_y}{P_z} = (0{,}8 \div 1{,}3)$ spre deosebire de alte cazuri unde acest raport variază între: $\frac{P_y}{P_z} = (0{,}3 \div 0{,}8)$. Deci și deformațiile elastice vor ajunge să fie destul de însemnate. Astfel la prelucrarea căii de rulare a cămășilor de rulmenți cu cuțite profilate care au avut raza egală cu raza bilei și la care adaosul de prelucrare a fost mic s-au obținut totuși erori de prelucrare însemnate.

La această operație de finisare a căii de rulare se cere ca piesele să fie lucrate cu foarte multă grijă iar adaosul de prelucrare care rămîne pentru operațiile de finisare (rectificarea profilată să fie pe cît posibil mai mici).

Astfel experiențele s-au efectuat în cazul prelucrării căii de rulare în două cazuri :

a. cînd cuțitul de profilat a avut o anumită valoare a unghiului de înclinare a muchiei așchietoare $\lambda \neq 0$.

b. cuțitul de profilat a avut valoarea unghiului de înclinare egală cu zero $\lambda = 0$.

În primul caz angajarea sculei în piesă se face liniștit și treptat pe toată lungimea ei. Ca urmare mărirea componentei P_y rămîne aproximativ constantă în timpul prelucrării. Deci în consecință și deformațiile elastice ale sistemului vor avea o valoare constantă. Deși secțiunea așchiei așa cum s-a arătat mai sus este variabilă.

Dacă scrim care este diametrul obținut în acest caz, ținînd seama de deformațiile sistemului, exprimate în formula (14) rezultă :

$$D_r = D_1 + 2(\Delta_a + \Delta_b) + 2(e_a + e_b) \qquad (15)$$

unde :

D_r = diametrul real pe care îl obținem după prelucrare
D_1 = diametrul nominal la care am reglat sculele
Δ_a = deformațiilor elastice axului mașinei
Δ_b = deformațiile elastice a axului broșei circulare
e_a = bătaia axului principal
e_b = bătaia axului broșei

Ținînd seama că excentricitatea axelor la reglarea sculelor se include în diametrul nominal de reglare formula (15) poate fi scrisă sub forma

$$D_r = D_1 + 2(\Delta_a + \Delta_b). \qquad (27)$$

Măsurarea statică a rigidității ansamblului pe direcția componentei P_y au arătat că aceste deformații sînt ridicate și influențează direct precizia de prelucrare a cămășilor de rulmenți.

Astfel la încărcarea sistemului pe direcția $P_y = 350$ kg. s-a măsurat o deformație a axului principal $\Delta_a = 0{,}08$ mm și a suportului broșei $\Delta_b = 0{,}01$ mm, de unde rezultă că mărimea rigidității axului este egală cu 18 000 Kg/mm iar rigiditatea axului broșei egală cu 38 000 Kg/mm.

Cu toate că rigiditatea a fost suficient de ridicată în acest caz prelucrările suprafețelor profilate mai sus amintite din cauza așezării cuțitelor la un unghi $\lambda \neq 0$, precizia de prelucrare a fost cuprinsă în limitele între 0,12 și 0,15 mm, deși ținînd seama de variația secțiunii așchiei care are loc ar fi trebuit ca precizia de prelucrare să fie mult mai ridicată. În raport cu prelucrarea aceleiași piese pe strungul automat multiax unde precizia de prelucrare a fost cuprinsă între 0,15—0,20 mm.

În al doilea caz al prelucrării s-au respectat aceleași condiții ale regimului de așchiere numai că valoarea unghiului de înclinare λ s-a luat egal cu zero.

Această așezare a cuțitelor prezintă cîteva avantaje care permit ca precizia de prelucrare să crească simțitor. Astfel cuțitul fiind așezat cu unghiul egal cu zero înseamnă că se va angaja în stratul de metal pe toată lungimea muchiei tăietoare. În consecință mărimea forței de așchiere va atinge valoarea maximă pe toată lungimea sculei dar această mărime a forței nu va influența cu nimic precizia de prelucrare, ea fiind la începutul așchierii, ca

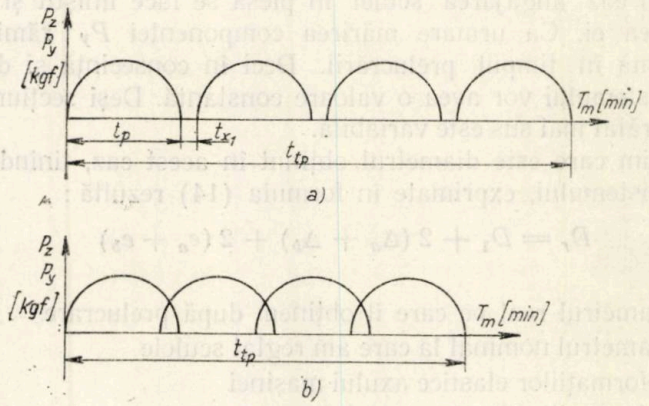


Fig. 10.

apoi să scadă la zero, în momentul ieșirii cuțitului. Aceasta înseamnă că chiar în momentul în care suprafața capătă forma geometrică definitivă mărimea forței P_y ajunge să fie egală cu zero. În consecință și deformațiile elastice ale sistemului vor fi egale cu zero $\Delta_a = 0$ *și* $\Delta_b = 0$. Astfel că în formula (15) termenul al doilea va fi zero și formula va deveni :

$$D_r = D_1 . \tag{16}$$

Experiențele efectuate au confirmat pe deplin aceasta. Astfel piesele prelucrate s-au încadrat într-un domeniu de precizie de la 0,04—0,06 mm. Deci în acest caz precizia de prelucrare crește simțitor în raport cu primul caz. Deși pare la început că nu este recomandat să se lucreze în asemenea condiții cu valoarea unghiului $\lambda = 0$ totuși rezultatele obținute recomandă că în asemenea situații (suprafețe profilate) precizia de prelucrare crește simțitor. Aceasta înseamnă că mărimea adaosului de prelucrare pentru operațiile de finisare prin rectificare s-au redus considerabil. Deci rezultă că și timpul de rectificarea profilată a piesei s-a micșorat fapt ce duce la creșterea productivității.

În acest caz așezarea cuțitelor permite să se păstreze profilul cuțitului după raza bilei nu ca în cazul precedent, unde profilul cuțitului este o formă complexă, ce rezultă din proiecția ca urmare a unghiului de înclinare λ. Aceasta permite ca sculele să se execute ușor și să fie întreținute ușor, iar reglarea lor nu ridică probleme. Dispozitivul de ascuțire, de asemenea este simplu și ieftin de executat în comparație cu primul caz.

La broșele circulare există tendința ca cuțitele broșei să nu lucreze cu intermitență ci continuu adică să fie angajați mai mulți dinți în metal. Aceasta duce la mărirea productivității mașinii. Deci micșorînd spațiile dintre cuțite s-ar micșora timpul de mașină t_m (fig. 10 a, b), dar aceasta ar face să se anuleze efectul compensării deformațiilor elastice, deci ar scădea în consecință precizia de prelucrare datorită faptului că deformațiile elastice ale sistemului ar fi constante.

În rezumat rezultă că atunci cînd se prelucrează suprafețe care cer o precizie ridicată (suprafețe profilate) este recomandabil ca cuțitele care prelucrează fie așezate la un unghi $\lambda = 0$, iar în piesă să nu fie mai multe muchii angajate simultan. Aceasta atrage după sine creșterea preciziei de prelucrare, datorită faptului că și deformațiile elastice vor varia în raport de modul cum variază secțiunea așchiei, lucru ce se reflectă pozitiv asupra preciziei de prelucrare.

Astfel reiese că la prelucrarea prin broșare a corpurilor de revoluție, precizia de prelucrare este influențată în mică măsură de deformațiile elastice ale sistemului, precum și de dinamica de generare a suprafeței. Fapt ce face ca această metodă să ocupe din zi în zi o răspîndire tot mai largă în Tehnologia Construcțiilor de Mașini, asigurînd o precizie ridicată de prelucrare.

Catedra de tehnologia construcțiilor de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *G. A. Granovschi:* — Chinematica rezania, Mașghiz 1948.
2. *A. I. Zogorodnicov:* — Povîșene proizvoditelnosti izdane — MBTY — Bauman, 1962.
3. *I. Gavrilaș:* — Dinamica abrabotca tel vrașcenie metoda prataghivanie, Dizertație — Moscova 1963.
4. *G. A. Saumian:* — Automatî i automaticeschi linii, Mașghiz 1962.

La broșele circulare există tendința ca cuțitele broșei să nu lucreze cu intermitență ci continuu adică să fie angajați mai mulți dinți în metal. Aceasta duce la mărirea productivității mașinii. Deci micșorînd spațiile dintre cuțite s-ar micșora timpul de mașină t_m (fig. 10 a, b), dar aceasta ar face să se anuleze efectul compensării deformațiilor elastice, deci ar scădea în consecință precizia de prelucrare datorită faptului că deformațiile elastice ale sistemului ar fi constante.

În rezumat rezultă că atunci cînd se prelucrează suprafețe care cer o precizie ridicată (suprafețe profilate) este recomandabil ca cuțitele care prelucrează fie așezate la un unghi $\lambda = 0$, iar în piesă să nu fie mai multe muchii angajate simultan. Aceasta atrage după sine creșterea preciziei de prelucrare, datorită faptului că și deformațiile elastice vor varia în raport de modul cum variază secțiunea așchiei, lucru ce se reflectă pozitiv asupra preciziei de prelucrare.

Astfel reiese că la prelucrarea prin broșare a corpurilor de revoluție, precizia de prelucrare este influențată în mică măsură de deformațiile elastice ale sistemului, precum și de dinamica de generare a suprafeței. Fapt ce face ca această metodă să ocupe din zi în zi o răspîndire tot mai largă în Tehnologia Construcțiilor de Mașini, asigurînd o precizie ridicată de prelucrare.

Catedra de tehnologia construcțiilor de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *G. A. Granovschi*: — Chinematica rezania, Mașghiz 1948.
2. *A. I. Zogorodnicov*: — Povîșene proizvoditelnosti izdane — MBTY — Bauman, 1962.
3. *I. Gavrilaș*: — Dinamica abrabotca tel vrașcenie metoda prataghivanie, Dizertație — Moscova 1963.
4. *G. A. Saumian*: — Automatî i automaticeschi linii, Mașghiz 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXVII — 1965, Numărul 6

C. Z. : 621.837

CORELAȚIA DINTRE PARAMETRII CONSTRUCTIVI ȘI CEI FUNCȚIONALI LA EXCENTRICII CIRCULARI *

V. TACHE, GH. BADESCU, A. BRAGARU

Mecanismul de strîngere simplu de forma unui excentric, poate fi considerat că este constituit dintr-o pană cu o singură față înclinată înfășurată pe un cerc de bază (fig. 1).

Din punctul de vedere al formei profilului de lucru se deosebesc două tipuri de excentrici : excentrici cu profilul de lucru executat sub forma unui arc de cerc [circulari] și excentrici cu profilul executat sub forma unor spirale [curbilinii].

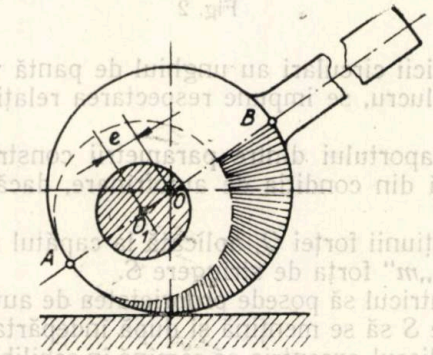


Fig. 1

Spre deosebire de excentricii curbilinii, a căror execuție este uneori destul de dificilă, excentricii circulari se caracterizează prin simplitate constructivă și execuție ușoară.

Lucrarea prezintă un studiu al parametrilor funcționali ai excentricilor circulari și a legăturii dintre parametrii funcționali și constructivi, întrucît o asemenea problemă este insuficient tratată în literatura de specialitate.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 28—30 mai 1965.

Mecanismele cu excentric trebuie să posede proprietăți de autofrînare pe toată lungimea profilului de lucru. În consecință trebuie determinat un anumit raport între parametrii constructivi ai excentricului, raport rezultat din respectarea condiției de autofrînare, adică :

$$\alpha \leqslant \varphi_1 + \varphi_2 \tag{1}$$

în care :

α — unghiul de pantă al excentricului ;
φ_1 — unghiul de frecare dintre excentric și piesă ;
φ_2 — unghiul de frecare dintre excentric și fus.

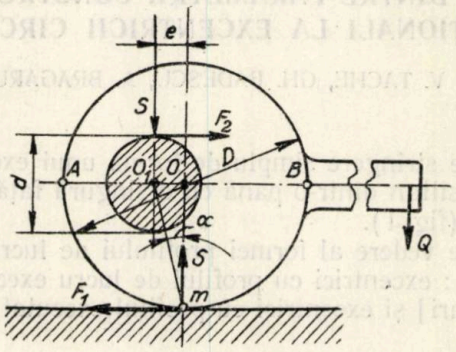


Fig. 2

Întrucît excentricii circulari au unghiul de pantă variabil pe toată lungimea profilului de lucru, se impune respectarea relației (1) în orice punct al profilului.

Determinarea raportului dintre parametrii constructivi „e" și „D" ai excentricului rezultă din condiția de autofrînare, dacă se folosește schema de calcul din fig. 2.

Ca urmare a acțiunii forței Q, aplicată la capătul manivelei, excentricul dezvoltă în punctul „m" forța de strîngere S.

Pentru ca excentricul să posede proprietatea de autofrînare, este necesar ca forța de strîngere S să se mențină și după îndepărtarea forței Q, aplicată la manivelă, adică discul excentric să rămînă în echilibru numai sub acțiunea forțelor de frecare F_1 și F_2 și a reacțiunilor normale S.

Dacă se scrie ecuația de momente față de axa O_1 a fusului și se neglijează frecarea pe fusul excentricului, iar coeficientul de frecare dintre excentric și piesă se ia $\mu_1 = 0{,}1$, care corespunde unui unghi de frecare $\varphi_1 = 5°43'$ rezultă :

$$\frac{D}{e} = 20. \tag{2}$$

Relația 2, poartă denumirea de caracteristica excentricului. Dacă se ține seama de faptul că, în timpul funcționării mecanismului cu excentric se produce frecare și între discul excentric și fus, sau între fusul excentricului

și suportul pe care se montează acesta, rezultă că raportul dintre parametrii constructivi poate fi luat între $\frac{D}{e} = 14$ și $\frac{D}{e} = 20$, așa cum se recomandă în literatura de specialitate.

Raportului $\frac{D}{e} = 14$ îi corespunde un coeficient de frecare $\mu = 0{,}15$, adică un unghi de frecare total $\varphi = 8°32'$.

Deci caracteristica excentricului poate lua valorile $14 \leqslant \frac{D}{e} \leqslant 20$ corespunzătoare unghiurilor de frecare totale $\varphi = 5°43' \div 8°32'$.

În cele ce urmează, se va căuta pe cît posibil să se prezinte legătura dintre caracteristicile excentricilor și parametrii funcționali, punîndu-se în evidență corelația dintre parametrii constructivi și cei funcționali.

Pentru aceasta este necesar să fie analizați succint parametrii funcționali, variația lor și dependența de parametrii constructivi.

1. Cursa excentricului

Întrucît la fixarea unei piese sau la blocarea unui mecanism, trebuie să se cunoască printre altele cursa pe care o poate dezvolta un excentric dat, se impune necesitatea studierii acestui parametru funcțional. O asemenea cursă trebuie să permită introducerea și scoaterea comodă a piesei din dispozitiv, să compenseze jocul din lagăre, uzura rezultată în timpul funcționării și deformațiile sistemului de strîngere.

Considerînd ca poziție inițială, poziția din fig. 3. a, se vede că în această situație excentricul nu dezvoltă nici un fel de cursă.

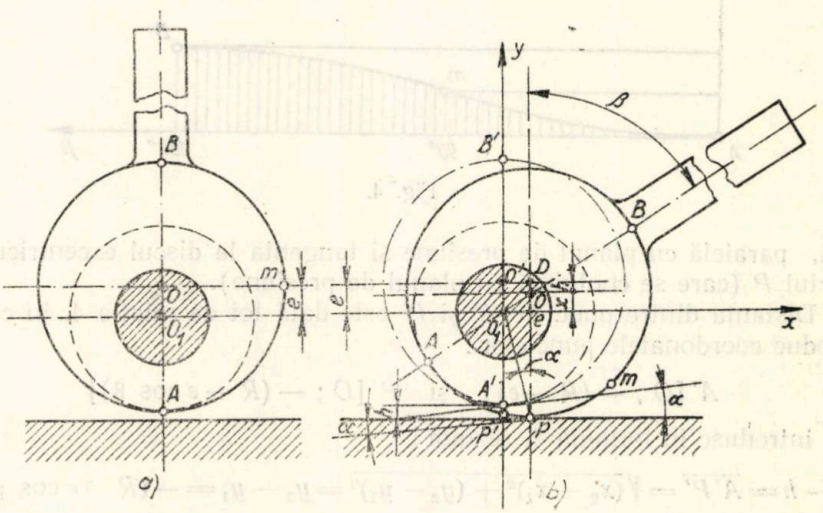


Fig. 3

Dacă se rotește excentricul cu un unghi oarecare β (fig. 3. b) centrul O al discului coboară față de poziția inițială cu o cantitate „h", care reprezintă cursa excentricului corespunzătoare unghiului de rotire β.

Relația de calcul pentru determinarea cursei „h" a excentricului poate fi calculată analitic după cum urmează : se consideră un sistem de axe rectangulare cu originea în axa fuxului O_1 și cursa „h", distanța dintre punctele O și D (fig. 3. b). Punctele O și D au coordonatele : $O\ (e \sin \beta\ ;\ e \cos \beta)$ și $D\ (e \sin \beta\ ;\ e)$.

Dacă se folosește relația cunoscută din „Geometria analitică", cu care se calculează distanța dintre două puncte

$$\overline{OD} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4}$$

în care se înlocuiesc coordonatele punctelor O și D se obține :

$$\overline{OD} = h = e - e \cos \beta = e(1 - \cos \beta). \tag{5}$$

Deci cursa excentricului variază în funcție de excentricitate și de unghiul de rotire β. Variația cursei „h" este pusă în evidență în graficul din figura 4.

Cursa excentricului pentru porțiunea de profil cuprinsă între punctele A și B, adică pentru un unghi de rotire $\beta = 0 \div \pi$, capătă valori cuprinse între $h = 0 \div 2\ e$.

În literatura de specialitate, se afirmă că variația cursei „h", corespunde cu desfășurata penei cuprinsă între punctele A și B și că unghiul de pantă al excentricului este unghiul format de tangenta la curba A—B într-un punct oarecare și orizontală, afirmații ce urmează a fi verificate.

Din fig. 3. b rezultă de asemenea, că se poate determina cursa h și ca distanța dintre punctele A' și P', adică distanța dintre tangenta la cercul de

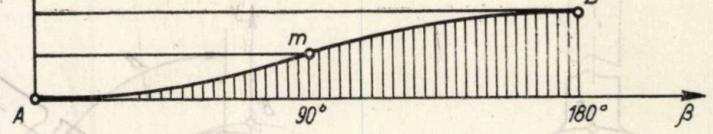


Fig. 4.

bază, paralelă cu planul de presiune și tangenta la discul excentricului în punctul P (care se confundă cu planul de presiune).

Distanța dintre punctele A' și P' este dată tot de relația 4, în care se introduc coordonatele punctelor :

$$A'[O\ ;\ -(R - e)] \quad \text{și} \quad P'[O\ ;\ -(R - e \cos \beta)]$$

care introduse în formula 4, rezultă :

$$-h = \overline{A'P'} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = y_2 - y_1 = -(R - e \cos \beta) + \\ + R - e = -e(1 - \cos \beta)$$

adică

$$h = e\,(1 - \cos\beta). \qquad (5)$$

Se vede că distanța dintre punctele A' și P' reprezintă tot cursa „h" a excentricului.

Întrucît pana înfășurată pe cercul de bază, între punctele A și B (fig. 3. b) are ca bază desfășurata cercului de bază cu raza $\overline{O_1 A}$, iar ca față înclinată desfășurata semicercului cu raza $\frac{D}{2}$, rezultă că segmentul $\overline{A' P'}$, ar trebui să fie perpendicular pe baza penei și nu pe planul de presiune așa cum este în realitate.

Din fig. 3. b și din cele arătate mai sus, se constată că înălțimea penei corespunzătoare punctului P, este dată de diferența dintre dreapta $\overline{O_1 P}$ și raza cercului de bază $\overline{O_1 A}$.

În concluzie, desfășurata penei nu corespunde cu curba de variație a cursei „h", așa cum se afirmă într-o serie de lucrări de specialitate, ci este dată de curba de variație a razei de rotire „ρ" a excentricului, problemă care va fi analizată ulterior.

Variația cursei „h" a excentricului poate fi analizată dacă se studiază funcția $h = f(\beta)$, unde β este unghiul de rotire al manivelei excentricului, care teoretic poate căpăta valori cuprinse între 0 și 2π.

Întrucît punctele A și B împart discul excentric în două jumătăți simetrice, se poate limita domeniul de studiu pentru valori ale unghiului β cuprinse între 0 și π.

Valoarea minimă a cursei „h" corespunde unghiului de rotire $\beta = 0$, unde $h = 0$, iar valoarea maximă, unghiului de rotire $\beta = \pi$, rezultînd în mod corespunzător $h = 2\,e$.

Se poate vedea că la $\beta = \frac{\pi}{2}$, curba de variație a cursei h, prezintă un punct de inflexiune.

În fig. 7 sînt reprezentate cu linie punct, curbele de variație a cursei „h" pentru următoarele caracteristici ale excentricilor circulari :

$$\frac{D}{e} = 20\,;\quad \frac{D}{e} = 18\,;\quad \frac{D}{e} = 16 \quad \text{și} \quad \frac{D}{e} = 14\,.$$

2. Unghiul de pantă „α" al excentricului

Un alt parametru foarte important în funcționarea excentricilor circulari îl constituie unghiul de pantă „α", care se definește ca fiind unghiul cuprins între tangenta la discul excentric în punctul de contact P și perpendiculara dusă pe raza de rotire $\overline{O_1 P}$ (fig. 3. b), sau unghiul dintre raza de rotire $\overline{O_1 P}$ și perpendiculara dusă în punctul P pe suprafața de presiune. Ținînd cont însă că o tangentă la cercul de bază dusă în punctul de intersecție cu raza de rotire, este perpendiculară pe această rază, iar dreapta $\overline{OP}$ este

perpendiculară pe planul de presiune, rezultă că unghiul dintre tangentă și planul de presiune este tot unghiul „α".

Una din particularitățile excentricilor circulari care reprezintă principalul lor dezavantaj, îl constituie faptul că unghiul de pantă „α" este variabil pe lungimea profilului de lucru.

Necesitatea studierii variației unghiului de pantă este legată de respectarea condiției de autofrînare și de evitarea fenomenului de înțepenire a mecanismului în timpul strîngerii.

Tangenta unghiului de pantă a excentricilor circulari, poate fi determinată analitic, folosind schema din fig, 3. b.

Dacă se consideră același sistem de axe de coordonate cu originea în axa fusului O_1, se poate determina ecuația dreptei $\overline{O_1P}$ și coeficientul unghiular a acesteia :

$$[\overline{O_1P}]\ x\,(R - e\cos\beta) + y(e\sin\beta) = 0 \tag{7}$$

coeficientul unghiular al dreptei $\overline{O_1P}$ este dat de relația :

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{R - e\cos\beta}{e\sin\beta} \tag{8}$$

dar

$$m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

în acest caz se obține :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\dfrac{R - e\cos\beta}{e\sin\beta}} = \frac{e\sin\beta}{R - e\cos\beta}. \tag{9}$$

Se observă că unghiul de pantă „α" variază în funcție de excentricitate, de raza discului excentric și de variația unghiului de rotire β.

Pentru a scoate mai pregnant în evidență legătura dintre unghiul de pantă (ca unul dintre principalii parametrii funcționali) și parametrii constructivi se va pune relația 9 sub altă formă și anume :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e\sin\beta}{e\left(\dfrac{R}{e} - \cos\beta\right)} = \frac{\sin\beta}{\dfrac{R}{e} - \cos\beta}. \tag{10}$$

Relația 10 arată că unghiul de pantă „α", variază în funcție de unghiul de rotire β și de caracteristica excentricului.

Utilizînd relația 10 se obțin simplificări ale calculelor, deoarece raportul $\dfrac{R}{e}$ poate căpăta valori cuprinse în limitele $7 \leqslant \dfrac{R}{e} \leqslant 10$.

Se observă de asemenea, că pentru o anumită caracteristică, unghiul de pantă depinde numai de variația unghiului β și de raportul parametrilor constructivi.

În consecință, discurile excentrice construite cu aceeași caracteristică $\frac{D}{e}$, au același unghi de pantă, indiferent de valorile separate ale diametrului „D" și excentricității „e".

De exemplu, pentru un anumit unghi de rotire β, unui excentric cu diametrul $D_1 = 200$ mm și cu excentricitatea $e_1 = 10$ mm, îi va corespunde ace-

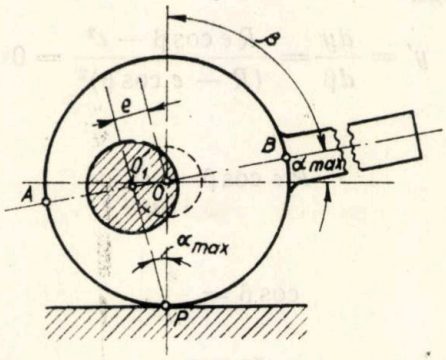


Fig. 5.

lași unghi de pantă „α", care este dat de un excentric cu $D_2 = 40$ mm și cu $e_2 = 2$ mm, întrucît ambele discuri excentrice au aceeași caracteristici $\frac{D}{e} = 20$.

În literatura de specialitate se afirmă că unghiul de pantă „α_{max}" are loc pentru o rotire a manivelei cu $\beta = \frac{\pi}{2}$, lucru care este inexact și care poate fi demonstrat atît geometric cît și analitic.

Astfel, din schema dată în fig. 5 se poate determina valoarea unghiului „α_{max}" și mărimea unghiului de rotire β corespunzătoare acestui unghiu.

La excentricul reprezentat în fig. 5, se presupune că se rotește axa fusului O_1 în jurul axei discului O. În felul acesta, axa fusului O_1 descrie în jurul axei O, un cerc de rază $\overline{O_1O} = e$.

Dacă din punctul de contact P, se duce o tangentă la cercul cu raza $\overline{O_1O}$, se obține triunghiul dreptunghic OO_1P, în care $\widehat{OPO_1}$ este $\alpha_{max.}$, iar $\widehat{O_1OP}$, este unghiul corespunzător de rotire „β".

Se observă că la variația unghiului de rotire β, de la 0 la π, unghiul de pantă „α" variază de la $\alpha = 0$, la $\alpha = \alpha_{max}$ și apoi scade din nou la $\alpha = 0$.

Din ΔOO_1P rezultă:

$$\sin \alpha_{max} = \frac{e}{R} \tag{11}$$

și

$$\cos \beta = \frac{e}{R}. \tag{12}$$

În concluzie, unghiul de pantă „α_{max}" are loc pentru un unghi de rotire $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_{max}$ și nu pentru $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Variația unghiului de pantă poate fi analizată și studiind funcția $tg\alpha = f(\beta)$. Astfel, extremele funcției vor fi date de soluțiile ce verifică prima derivată a funcției $y = tg\alpha$

$$y' = \frac{dy}{d\beta} = \frac{R\,e\cos\beta - e^2}{(R - e\cos\beta)^2} = 0$$

de unde :

$$R\,e\cos\beta = e^2$$

adică :

$$\cos\beta = \frac{e}{R}.$$

În consecință, pentru arc cos $\frac{e}{R}$ corespunde valoarea maximă a funcției, ceea ce a fost demonstrat mai sus și pe cale geometrică.

Tabela 1

$\frac{D}{e}$	20	18	16	14
e	4,5	5	5,5	6
$\cos\beta = \frac{e}{R}$	0,1	0,111	0,125	0,143
β	84°15′38″	83°37′14″	82°49′7″	81°47′13″
tg α_{max}	0,1	0,101	0,104	0,1044
α_{max}	5°44′20″	6°22′45″	7°10′51″	8°12′35″

În tabela 1 sînt date valorile extreme ale unghiului de pantă α, calculate pentru diferite caracteristici ale excentricilor circulari, cuprinse între

$$14 \leqslant \frac{D}{e} \leqslant 20.$$

Figura 6 reprezintă curbele de variație a unghiului de pantă pentru caracteristicile $\frac{D}{e}$ egale cu : 20 ; 18 ; 16 ; și 14.

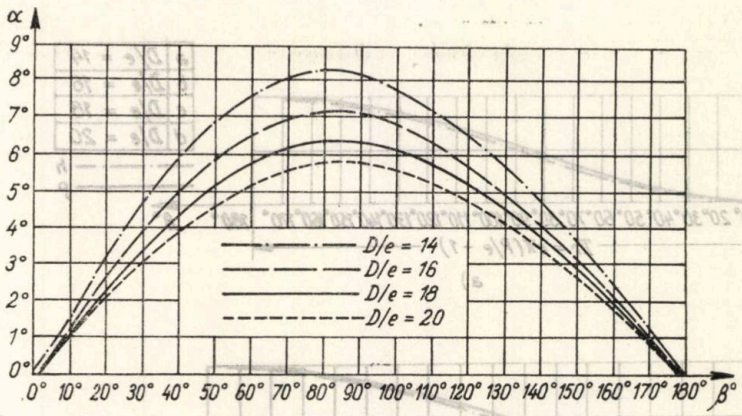


Fig. 6.

3. Raza de rotire a excentricului „ϱ".

În literatură este insuficient studiată variația razei de rotire a excentricului, cu toate că așa cum a rezultat din studiul variației cursei *h*, desfășurata penei cuprinsă între punctele *A* și *B* corespunde cu curba de variație a razei „ϱ" și nu cu a cursei *h*, așa cum se afirmă într-o serie de lucrări de specialitate.

Prin urmare, considerăm util să se determine mărimea razei de rotire „ϱ" și curba de varaiție a acesteia.

Raza de rotire „ϱ" poate fi determinată analitic ca fiind distanța dintre punctele O_1 și P, ale căror coordonate în raport cu sistemul de axe adoptat în figura 3. b, sînt :

$$O_1\,[O\,;\,O] \quad \text{și} \quad P\,[e\,\sin\beta\,;\,-(R-e\,\cos\beta)]\,.$$

Dacă se introduc coordonatele punctelor O_1 și P în relația 4 se obține :

$$\varrho = \overline{O_1P} = \sqrt{e^2\sin^2\beta + R^2 - 2Re\cos\beta + e^2\cos^2\beta} =$$

$$= \sqrt{R^2 - 2Re\cos\beta + e^2} \qquad (13)$$

Se observă că raza de rotire „ϱ" variază în funcție de excentricitatea „*e*", de raza discului excentric „*R*" și de variația unghiului β.

Dacă în relația 13 scoatem în afara radicalului excentricitatea, rezultă o altă structură a relației de calcul a razei de rotire ϱ.

$$\varrho = \sqrt{e^2\left[\left(\frac{R}{e}\right)^2 - 2\frac{R}{e}\cos\beta + 1\right]} = e\sqrt{\left(\frac{R}{e}\right)^2 - 2\frac{R}{e}\cos\beta + 1} \qquad (14)$$

Relația 14 simplifică mult calculele în cazul studierii variației razei de rotire „ρ" în funcție de diferitele caracteristici date.

In tabela 2 sînt date diferite valori care reprezintă variația diferenței dintre raza de rotire a excentricului și raza cercului de bază.

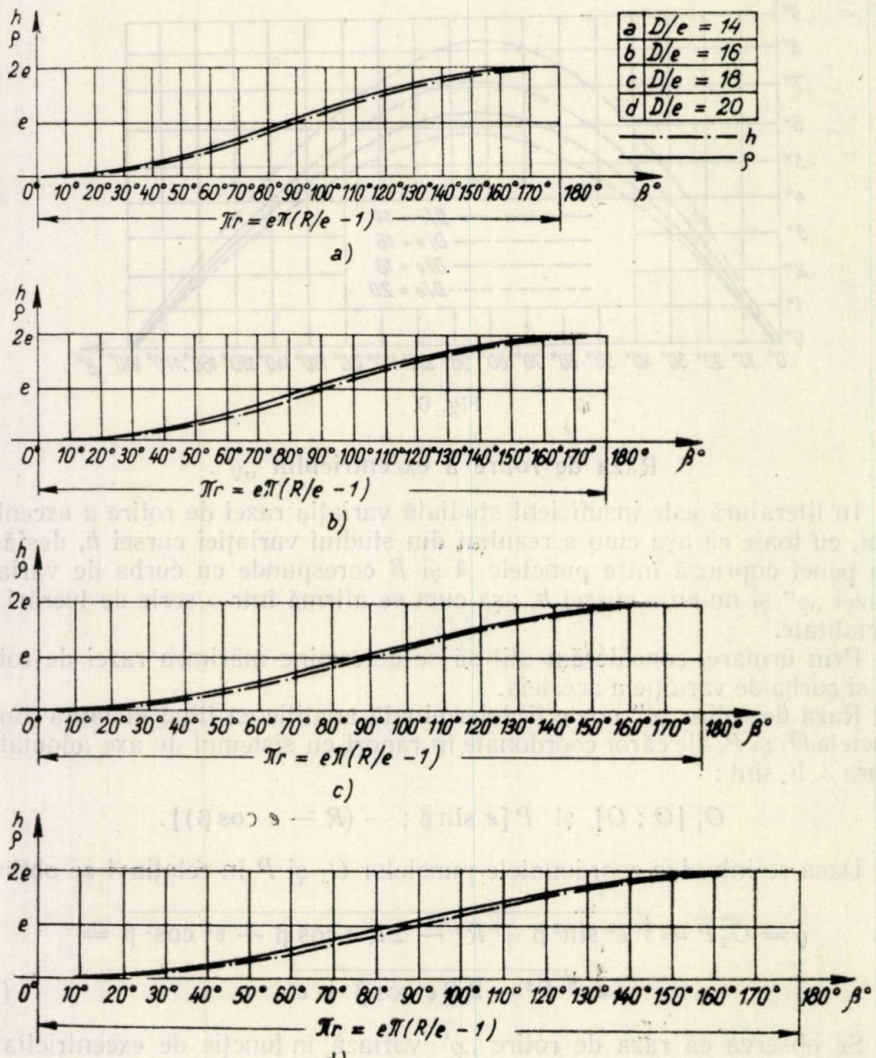


Fig. 7.

În funcție de aceste valori s-au trasat curbele de variație date în figura 7.

Curbele din fig. 7 reprezintă în funcție de excentricitate, desfășurata penei cuprinsă între punctele A și B.

Tabela 2

$\frac{D}{e}$ \ β	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
20	0	0,0168 *e*	0,0668 *e*	0,1470 *e*	0,2560 *e*	0,390 *e*	0,540 *e*	0,706 *e*	0,875 *e*	1,050 *e*	1,220 *e*	1,380 *e*	1,535 *e*	1,671 *e*	1,760 *e*	1,876 *e*	1,944 *e*	1,982 *e*	2 *e*
18	0	0,0170 *e*	0,0675 *e*	0,1490 *e*	0,258 *e*	0,392 *e*	0,544 *e*	0,708 *e*	0,880 *e*	1,055 *e*	1,226 *e*	1,389 *e*	1,539 *e*	1,673 *e*	1,767 *e*	1,870 *e*	1,945 *e*	1,986 *e*	2 *e*
16	0	0,0173 *e*	0,069 *e*	0,151 *e*	0,266 *e*	0,396 *e*	0,550 *e*	0,715 *e*	0,890 *e*	1,065 *e*	1,230 *e*	1,390 *e*	1,540 *e*	1,675 *e*	1,770 *e*	1,880 *e*	1,950 *e*	1,990 *e*	2 *e*
14	0	0,0184 *e*	0,078 *e*	0,164 *e*	0,270 *e*	0,402 *e*	0,553 *e*	0,723 *e*	0,899 *e*	1,070 *e*	1,240 *e*	1,410 *e*	1,557 *e*	1,680 *e*	1,775 *e*	1,882 *e*	1,952 *e*	1,991 *e*	2 *e*

Tabela 3

β	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
h	0	0,015 *e*	0,060 *e*	0,133 *e*	0,233 *e*	0,352 *e*	0,5 *e*	0,658 *e*	0,826 *e*	*e*	1,173 *e*	1,342 *e*	1,5 *e*	1,642 *e*	1,766 *e*	1,866 *e*	1,939 *e*	1,984 *e*	2 *e*

Pentru a scoate în evidență diferența dintre desfășurata penei și curba de variație a cursei h, în tabela 3 sînt calculate valorile cursei h în funcție de excentricitatea „e" și de unghiul de rotire „β".

În fig. 7 s-a reprezentat cu linie punct și variația cursei h. În consecință, curbele de variație a cursei h sînt apropiate ca formă de desfășurata penei, către limitele extreme ; $\beta = 0$ și $\beta = \pi$, însă prezintă oarecare diferență între aceste limite. De asemenea, desfășurata penei diferă de la caracteristică la caracteristică, în timp ce curba de variație a cursei este aceeași, întrucît nu depinde de raportul $\frac{D}{e}$, adică de caracteristica excentricului.

Dacă se anulează derivata funcției $\rho = f(\beta)$, în intervalul $\beta = 0 \div \pi$, rezultă punctele extreme ale razei de rotire.

$$\rho' = \frac{R e \sin \beta}{\sqrt{R^2 - 2Re\cos\beta + e^2}} = 0 \qquad (15)$$

de unde :

$$R e \sin \beta = 0$$

cum R și e nu pot fi nule, rezultă $\sin \beta = 0$.

Soluția generală a ecuației $\sin \beta = 0$, este $\beta = k\pi$, iar pentru intervalul considerat se obține :

$\beta = 0$; $\rho_0 = R - e$; (raza minimă de rotire a excentricului) ;

$\beta = \pi$; $\rho_\pi = R + e$; (raza maximă de rotire a excentricului).

Dacă se urmărește schema din fig. 3. b, se vede că se verifică construcția geometrică dată.

4. Forța de strîngere dezvoltată de excentrici

Un alt parametru funcțional foarte important puțin studiat în literatură, îl reprezintă forța de strîngere dezvoltată de excentricii circulari. Așa cum s-a mai arătat, excentricii circulari se prezintă sub forma unor pene cu o singură față înclinată înfășurată pe circumferința cercurilor de bază.

Profilul de lucru al excentricului îl reprezintă suprafața înclinată a penei, iar circumferința cercului de bază cu raza $\overline{O_1 A}$, baza penei (fig. 8).

În consecință, forța de strîngere poate fi calculată cu suficientă precizie, dacă se consideră că excentricul lucrează ca o pană cu o singură față înclinată cu frecare pe ambele suprafețe.

Relația de calcul a forței de strîngere dezvoltată de excentricii circulari prezentată în majoritatea lucrărilor de specialitate este :

$$S = \frac{QL}{\rho[\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) + \operatorname{tg}\varphi_2]} \qquad (16)$$

în care:

Q — este forța aplicată la manivelă, în kgf.;

L — lungimea manivelei, în mm.

Analizînd fiecare parametru funcțional și constructiv în parte, se poate găsi o altă formă a relației care dă forța de strîngere, formă ce ușurează calculele și dă posibilitatea să se tragă anumite concluzii asupra variației forței de strîngere.

Ținînd cont că forța aplicată Q, poate avea valori cuprinse între 5÷15 kgf., și că brațul de pîrghie L poate fi normalizat, astfel încît să fie:

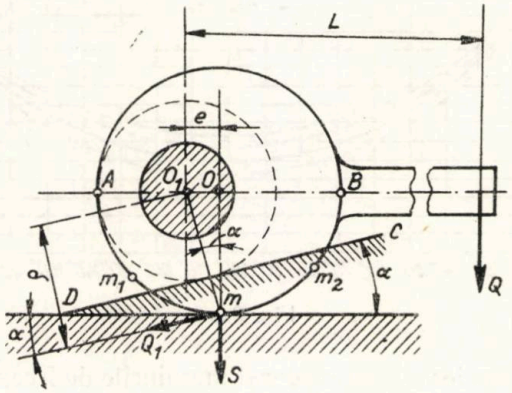


Fig. 8.

$L = (4 \div 5)\ R$ și introducînd în relația 16 și valoarea razei de rotire a excentricului dată de relația 14 se obține:

$$S = \frac{R}{e} \cdot \frac{K \cdot Q}{\sqrt{\left(\frac{R}{e}\right)^2 - 2\frac{R}{e}\cos\beta + 1}\ [\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1) + \operatorname{tg}\varphi_2]} \qquad (17)$$

Raportul $\frac{R}{e}$ reprezentînd jumătate din caracteristica excentricului, rezultă că poate căpăta valori $\frac{R}{e} = 7 \div 10$.

In urma unei analize sumare, se poate vedea că forța de strîngere dezvoltată de excentric variază în funcție de raportul $\frac{R}{e}$ și de variația unghiului de rotire β.

De asemenea, rezultă că pentru același unghi de rotire β, excentricii circulari cu aceeași caracteristică, indiferent de valorile luate separate pentru „e" și „D", dezvoltă aceeași forță de strîngere S și același unghi de pantă α.

În fig. 9 sînt trasate curbele de variație a forței de strîngere dezvoltată de excentricii cu următoarele caracteristici :

$$\frac{D}{e}=20\ ;\ \frac{D}{e}=18\ ;\ \frac{D}{e}=16 \text{ și } \frac{D}{e}=14.$$

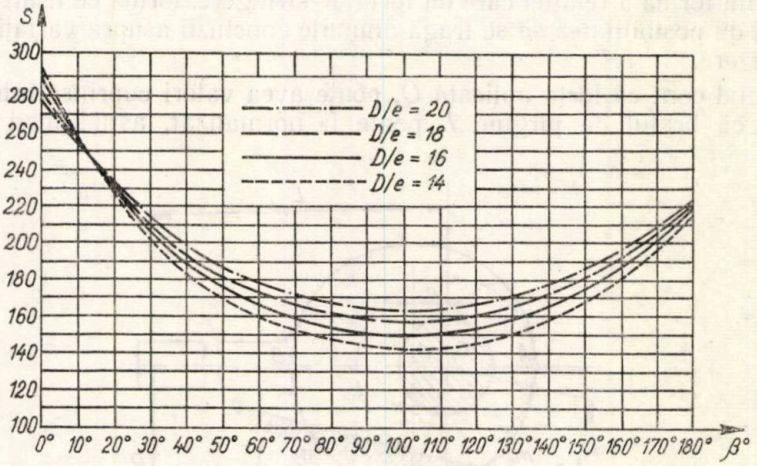


Fig. 9.

La trasarea curbelor s-au considerat unghiurile de frecare $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}1$; constanta $K = 5$, iar forța aplicată la manivelă $Q = 10$ kgf.

Concluzii

În lucrarea de față se adîncește sub aspect teoretic studiul parametrilor funcționali la excentricii circulari în dependență de parametrii constructivi.

Pe baza studiului prezentat se aduc completări și se infirmă unele date cuprinse în literatura de specialitate.

Astfel, s-a demonstrat că graficul de variație a cursei „*h*" la excentricii circulari nu corespunde cu desfășurata penei cuprinsă între punctele *A* și *B* (fig. 1), iar unghiul dintre tangenta la curbă și orizontală, într-un punct la curbă, nu reprezintă unghiul de pantă „α". Așa cum a rezultat din calculul analitic al parametrilor funcționali, desfășurata penei cuprinsă între punctele *A* și *B*, corespunde graficului de variație a razei de rotire „ρ".

De asemenea, a reeșit că valoarea maximă a unghiului de pantă „α" nu are loc pentru rotirea excentricului cu unghiul $\beta = \frac{\pi}{2}$, ci pentru $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_{max}$

În același timp, s-a arătat cu unghiul de pantă „*a*" și forța de strîngere „*S*", pentru excentricii cu aceleași caracteristici, depind numai de unghiul de rotire β.

În ceea ce privește forța de strîngere s-a mai demonstrat că, deși depinde și de variația unghiului de pantă „α", forța de strîngere minimă nu

corespunde unghiului de rotire $\beta = \frac{\pi}{2}$ și nici poziției în care unghiul de pantă „α" are valoarea maximă, ci se găsește situată la un unghi de rotire $\beta \approx 100°$.

Pentru a realiza mecanisme de strîngere sau de blocare raționale, construite cu excentrici circulari, se impune ca la alegerea profilului de lucru să se urmărească cu atenție influiența reciprocă a parametrilor funcționali în dependență de valoarea raportului dintre parametrii constructivi.

Profilul de lucru, adică lungimea arcului de cerc cuprins între punctele A și B, folosit la strîngere sau blocare, trebuie să fie cu autoblocare în orice punct și în același timp să evite porțiunile în care unghiul de pantă este nul sau are valori foarte mici, deoarece pe asemenea porțiuni se produce înțepenirea mecanismului.

De asemenea, cunoscînd variația unghiului de pantă „α" și a forței de strîngere (blocare) „S", se propune limitarea lungimii profilului de lucru la arce de cerc cuprinse între $60° \div 90°$, situate simetric în raport cu $\beta = 100°$.

Mecanismele de strîngere sau blocare cu excentrici circulari, cu profile de lucru corespunzătoare unghiurilor de rotire $\beta = 100° \pm 45$, sau $\beta = 100° \pm 30°$, ale căror caracteristici sînt cuprinse între $14 \leqslant \frac{D}{e} \leqslant 20$, realizează autoblocarea în orice punct al profilului de lucru, lucrează liniștit, fără șocuri sau înțepeniri, iar variațiile unghiurilor de pantă și ale forțelor de strîngere sînt mici, încît pentru necesitățile practice pot fi considerate constante.

Catedra de tehnologia construcției de mașini și mecanică fină.
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *M. A. Anserov* — Prisposoblenia dlea metallorejușcih stankov, Mașghiz 1962.
2. *R. I. Bacșut — M. D. Lemberg* — Zajimnîie ustroistva tokarnîh stankov, Mașghiz 1962.
3. *V. S. Korsakov* — Calculul și proiectarea dispozitivelor în construcția de mașini, traducere din limba rusă, I.D.T. 1962.
4. *Fremunt M. și alții* — Konstruce pripravku, Praha 1960.
5. *Fritz Klautke* — Vorrichtungsbau I. Spriger-Verlag, Berlin, 1942.
6. *D. Simionescu — I. Munteanu* — Dispozitive pentru mașini-unelte, Editura tehnică 1961.
7. *I. Stănescu — V. Tache* — Proiectarea și construcția dispozivelor. Editura didactică și pedagogică 1964.
8. *Wildförster E.* — Werkstückspanner im maschinenbau, Halle (Salle) 1958.
9. *W. E. Wilson — I. M. Holt* — Handbook of fixture design, New-York — Toronto — Londra, 1962.

SUMMARY OF THE REVIEWS IN 1965

SOCIAL SCIENCES

D. Rebuşapcă, R. Soare, P. Ioniţă, S. Antonescu, Gh. Maşală, M. Vasilache, M. Hagistate. Work Productivity and its Factors of Growing in Electrical Enegineering Industry (1. 1965)

A. Katz The Blending of the Material and Moral Stimuli of the Work in the Stage of the Completion of the Socialist Construction and the Part Played by their Interaction in Forming the Socialist Conscience. (3. 1965)

MATHEMATICS

A. Tănăsescu An Axial-helicoid Projection System (1. 1965)

C. Ionescu Bujor Optical Transformations in the Space (2. 1965)

E. Kreindler On a Derivative in Unitary Modules and Vector-Spaces (3. 1965).

C. Ionescu-Bujor Optical Transformations in the Space (4. 1965)

M. St. Botez On a Class of Cubic Surfaces (4. 1965)

Gh. D. Simionescu A Generalization of the Finite Increment Formula. Consequences. (4. 1965)

M. St. Botez, A Tănăsescu About the Newtonian Perspective (5. 1965)

I. M. Miu On the Factorization of the Differential Polynoms (5. 1965)

Gh. D. Simionescu Generalizations of Cauchy's Mean Value Formula (5. 1965)

I. M. Miu Contributions to the Theory of Some Differential Equations (6. 1965)

N. Donciu On the Curvature of a Curve Traced on any Conical Surface (6. 1965)

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

M. Corbu Munteanu, I. Teoreanu, M. Thaler. Considerations on the Rheological Behaviour of the Limestoneclay Paste. (3. 1965).

I. Cristea, Gr. Pop, Gh. Ioniţă. Copolymerization in Emulsion of Vinyl Acetate with Linseed Oil (3. 1965).

R. Dinescu, M. Thaler, M. Cherchez. On the Methods of Determining the Corrosion Resistance of Enamels (4. 1965).

INORGANIC CHEMISTRY

T. D. Ionescu, G. Uţă, G. Tudorache. The Use of the Change of Ions in the Electrolysis of Sodium Chloride (2. 1965).

A. Ianu, Gr. Teodorescu, A. Dinescu, L. Cocărgeanu. The Identification and Dosing of Mercury Losses in the Electrolyses of Sodium Chloride (2. 1965).

MACROMOLECULE CHEMISTRY

O. F. Solomon, I. Z. Ciută, N. Cobianu, M. Georgescu. Polymerization of N. Vinyl Carbazol with Perchlorine in Aqueons Medium (1. 1965).

O. F. Solomon, N. Cobianu, I. Z. Ciută. The Polymerization of N. Vinylcarbazole in Aqueous Solutions of Perchloric Acid (2. 1965).

PHYSICS

C. Bereny, G. Teodorescu, M. Chimirel. A Method for the Collecting and for the Spectrochemical Determining of the Solid Suspension Composition in the Atmosphere (5. 1965).

HYDRAULICS

D. Pavel. The Treatement of the Profile and the Flux of Francis Rotors (2. 1965).

MECHANICS

G. Ţiţeica. Experimental Results in the Study of Impacts. Porous Rocks Infiltration of Petroleum (1. 1965).

Al. Marinescu, C. Guţă. The Shortest Rising Time of Multy-stage Rockets (1. 1965).

N. I. Manolescu, M. Dranga. On the Equation of the Inertia Pole Curve in the Plane Motion (4. 1965).

N. I. Manolescu, Gh. Popa, A. Martineac. New Demonstrations Concerning the Triple Generation of the Coupler-point Curve (Coupler-curve) for the Synthesis of Planar Mechanisms (6. 1965).

STRENGTH OF MATERIALS

I. Zamfirescu. On the Absolute Distortions of Pipes (2. 1965).

V. Drobotă. The Asymmetrical and Symmetrical Lateral Buckling of the Pendulous Beams under Transversal Loads (5. 1965).

THERMODYNAMICS

L. Stoicescu, S. Petrescu. Thermodynamic State Changes Displayed with Variable Finite Speed (1. 1965).

L. Stoicescu, S. Petrescu. Cycles Covered with Finite Speed (2. 1965).

L. Stoicescu, S. Petrescu. The Experimental Verification of a New Expression of the First Principle for Thermodynamic Processes with Finite Speed (2. 1965).

C. Ţurcanu. Contributions to the Applying of Similarity to Rocket Engines with Liquid Fuel (2. 1965).

M. Grigoriu. Importance of Exergy for the Study of the Stean Compression Refrigerating Machine (2. 1965).

V. Radcenco. The Thermodynamic Analysis of the Theoretical Processes of Filling and Exhausting the Gas from the Cylinder of the Piston Detentor (3. 1965).

V. Radcenco. The Thermodynamic Analysis of the Theoretical Diagram of the Working of the Piston Detentor (4. 1965).

N. Leonăchescu. The Use of the Limage Method in the Thermic Fluk Calculus in Underground Pipes and Heating-lighting Conduits (5. 1965).

C. Guţă. The Border Influence upon the Leakage through the Networks of Profile Slightly Lengthened of the Axial Turbomachines (6. 1965).

DETAILS OF MACHINES

M. Renert, H. Ionescu. On the Theory of the Single-screw Extruder (4. 1965).
J. Magyar. On the Cylindrical Worm-Gear (4. 1965).
Gh. Manea, M. R. Mustaţa, M. Pascovici. On the Temperature of Radial-Slide-Bearings in a State of Temperature Equilibrium and the Insulating Effect of the Bushings of Plastics (5. 1965).

HEAT ENGINE

T. Dudaş. Some Problems on the Dynamics of the Four-Stroke Motors with Two Parallel Lines of Cylinders (1. 1965).
N. Apostolescu. Considerations on the Development of the Combustion in Motors with Rapid Compression Ignition, with Direct Injection (4. 1965).
N. Apostolescu. Calculation Method of the Fuel Drop Combustion during the Diffusive Combustion in the Diesel Engine (5. 1965).

ELECTRIC POWER

C. Dinculescu, P. Buhuş. The Avoidance of Switches in External Stations, with Double Bus-bar Systems and the Disconnecting Switches Set in Line (3. 1965).
N. Dănilă, C. Haiduc. Determination of Fed Water Temperature Nuclear Power Stations with Boiling Water Reactors and Nuclear Superheating (5. 1965).
C. Dinculescu, N. Dănilă, C. Wlezek. Technical-economic Calculation Method for Determining the Optimum Type of Atomic Power Station and the Competition between Atomic and Classical Power Stations (6. 1965).

AUTOMATION

S. Florea, I. Dumitrache, V. Găburici. Consideration About Pneumatic with Jet Computation Elements (1. 1965).

MACHINE TOOLS

A. Oprean. The Study of the Volume Losses in Gear Pumps (6. 1965).

ELECTRICITY

N. Galan. The Running of the Massive Rotor Induction Motor at Variable Frequency and Voltage (5. 1965).

MACHINE BUILDING TECHNOLOGY

I. Gavrilaş, Considerations Concerning the Growth of the Working Precision in the Case of the Variable Section Cutting (6. 1965).
V. Tache, Gh. Bădescu, A. Brăgaru. The Correlation between the Constructive and Functional Parameters at the Circular Eccentrics (6. 1965).

ELECTRONICS

M. Petrescu. The Form, the Period and the Spectrum of the Free Oscillations in the *L. C.* Circuit with a Nonlinear Capacity of the *p-n* Function (1. 1965).
I. Teodorescu, I. Luchian. Ion Resonant Accelerators with Stationary Wave (2. 1965).

Edm. Nicolau. Synthesis of Automata Which are Models for Operators in *n* Valued Logics, or of Timefunction Generators (3. 1965).

M. Petrescu. The Study of Free Oscillations in the *L. C.* Circuit with a Nonlinear Capacity of the *p-n* Junction by Means of the Phase Plane (3. 1965).

M. Drăgănescu. Frequency Properties of the Ideal Dielectric Diode at Small Signals (4. 1965).

G. Rulea. Relations for Directly Determining the Elements of Second Order Square Matrix Raised to the *n* Power and their Application to the Linear Electrical Network Theory (4. 1965).

M. Drăgănescu, D. Dascălu. A Detailed Equivalent Scheme for the Dielectric Diode at Small Signals (5. 1965).

TRANSPORT

Al. Popa. The Determination of the Running Speed and Times of Trains by the Pattern Method (1. 1965).

C .Ghiulai, A. Stoicescu. On the Stability of the Direction of the Automobile at Braking (3. 1965).

Al. Popa, Al. Neagu. Concerning the Traffic Speed of Goods Trains (3. 1965).

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10877

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1966 AUG 2